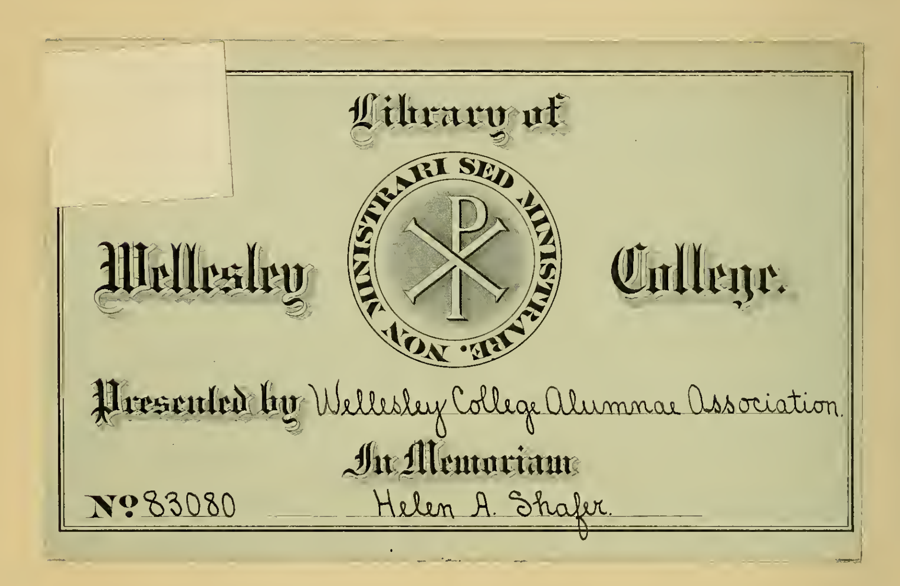
B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN V, 2

GINO LORIA

SPEZIELLE
ALGEBRAISCHE UND TRANSSCENDENTE
EBENE KURVEN
THEORIE UND GESCHICHTE
II



Library of
Wellesley
NON MINISTRARI SED MINISTRARE.
College.
Presented by Wellesley College Alumnae Association.
In Memoriam
No. 83080
Helen A. Shafer.



B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND 5, 2

DR. GINO LORIA
ORD. PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT GENUA

SPEZIELLE
ALGEBRAISCHE UND TRANSZENDENTE
EBENE KURVEN
THEORIE UND GESCHICHTE

AUTORISIERTE, NACH DEM ITALIENISCHEN MANUSKRIPT BEARBEITETE
DEUTSCHE AUSGABE

VON

PROF. FRITZ SCHÜTTE
OBERLEHRER AM STIFTISCHEN GYMNASIUM ZU DÜREN

ZWEITE AUFLAGE

ZWEITER BAND

DIE TRANSZENDENTEN
UND DIE ABGELEITETEN KURVEN

MIT 80 FIGUREN AUF 6 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

Inhalt des zweiten Bandes.

VI. Abschnitt.

Transzendente Kurven.

VII. Abschnitt.

Abgeleitete Kurven.

VI. Abschnitt.

Transzendente Kurven.

Erstes Kapitel.

Einleitung. Die panalgebraischen Kurven.

174. Alle diejenigen Kurven, die man nicht durch eine algebraische (ganze, rationale) Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten x, y ihrer Punkte darstellen kann, nennt man transzendente Kurven. Unter den nicht algebraischen Kurven verdienen diejenigen einen abgesonderten Platz, bei deren Gleichung die linke Seite ein Polynom in x, y mit irrationalen Exponenten ist; diese tragen nach einem Vorschlage von Leibniz den Namen interszendente Kurven[1]), und sie bezeichnen gewissermaßen den Übergang zwischen den algebraischen und transzendenten Kurven; als Beispiel sind uns schon (Bd. I, S. 347) die interszendenten Parabeln begegnet.

Jener Teil der Theorie der algebraischen Kurven, der die in bezug auf eine projektive oder Cremonasche Transformation invarianten Eigenschaften betrifft (Polaren-Theorie, kovariante Kurven, Plückersche Charakteristiken, Geschlecht, adjungierte Kurven, usw.) hat bis heute kein Gegenstück in der Theorie der transzendenten Kurven; dagegen ist die ganze metrische Theorie der Kurven (Konstruktion der Tangenten des Krümmungskreises, Quadratur, Rektifikation usw.) durchaus auf die transzendenten Kurven anwendbar, da sie von der Annahme, daß die Gleichung algebraisch sei, nicht abhängt.

Ferner hat H. Brocard (Intermédiaire V, 1898 S. 99 und XVI, 1909 S. 220) zweimal die Frage aufgeworfen, ob es bei den transzendenten Kurven Punkte gäbe, die den Brennpunkten der algebraischen analog wären. In der Antwort darauf haben der Verfasser und E. Dubois (das. XVII, 1910, S. 10—13) bemerkt, daß die von Plücker gegebene Definition auch auf die transzendenten Kurven anwendbar sei, und an einigen Beispielen (der Sinus- und logarithmischen Kurve) gezeigt, wie sich die Koordinaten solcher Brennpunkte bestimmen lassen.

---

1) Vgl. G. Cramer, *Introduction à l'analyse des courbes lignes algébriques* (Genève, 1750) S. 8; dort ist als Beispiel angeführt: $y^{\sqrt{2}} + y = x$.

Eine Singularität dagegen, die nur bei transzendenten Kurven möglich ist, ist der sogenannte asymptotische Punkt, d. h. ein solcher Punkt, den die Kurve in immer enger werdenden unendlich vielen Windungen umläuft; dabei kann aber das von einem bestimmten Punkte an gerechnete Stück der Kurve bis zu dem asymptotischen Punkte dennoch eine endliche Länge haben. Eine transzendente Kurve kann sogar unendlich viele solcher Punkte haben.

Wenn man sich an den Gebrauch kartesischer Koordinaten hält, so erweisen sich die algebraischen und transzendenten Kurven als völlig heterogene geometrische Figuren; wendet man dagegen andere Koordinatensysteme an, so verschwindet dieser Unterschied in vielen Fällen. So haben wir z. B. in Nr. **134** gesehen, daß die Gleichung in Polarkoordinaten $\varrho = R \cdot \sin \mu \omega$ bei Variierung des Index μ unzählig viele Kurven darstellt, die algebraisch oder transzendent sind, je nachdem μ rational oder irrational ist, die sich jedoch vieler gemeinsamer Eigenschaften erfreuen; dies beweist, daß man in einem solchen Falle — sowie in vielen anderen ähnlichen — von kartesischen Koordinaten abzusehen und sich anderer Koordinaten zu bedienen hat, die mehr geeignet sind, die eigentliche Natur der verschiedenen bekannten transzendenten Kurven auszudrücken. Diese Ansicht ist so verbreitet, daß man Versuche gemacht hat, Theorien aufzustellen für die Kurven, die durch eine algebraische Gleichung dargestellt werden, wenn man Polarkoordinaten anwendet, oder für bipolare oder natürliche Koordinaten usw. Da man jedoch auf diesem Wege noch nicht einmal dahin gelangt ist, die Fundamente für eine allgemeine Theorie der transzendenten Kurven zu legen[1]), so hat man versucht, sie mit algebraischen Kurven zu verknüpfen, damit die ungemein reichen Kenntnisse, die man von diesen besitzt, auch auf jene ihr Licht werfen mögen; das sie verknüpfende Band wurde durch die Theorie der Differentialgleichungen hergestellt, und es sollen die erhaltenen Resultate hier zusammengestellt werden.[2])

Die meisten der bisher betrachteten transzendenten Kurven erfreuen sich der Eigenschaft, **daß für jeden ihrer Punkte der Neigungskoeffizient der Tangente** $\left(\frac{dy}{dx} = y'\right.$ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten$\left.\right)$ **die Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, deren Ko-**

1) Und das wird auch nicht möglich sein, solange der Begriff „transzendent" ein negativer ist. (Bem. d. Übers.).

2) Für das Folgende s. Fouret, *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendentes, définis par deux charactéristiques* und *Sur les courbes planes transcendentes susceptibles de faire partie d'un système* μ, ν (Bull. Soc. math. France II, 1873/74); Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I. (Leipzig, 1875) VII. Abt. IV. Kap.; G. Loria, *Le curve panalgebriche* (Prager Ber., 1901; Le matem. pure ed applicate, II 1902.)

effizienten ganze Polynome in x, y sind; mit anderen Worten: jede derartige Kurve ist die Integralkurve einer irreduzibelen Differentialgleichung (erster Ordnung) von folgendem Typus

$$F(x, y, y') \equiv \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) \cdot y'^{n-r} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo die $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ n Polynome ohne gemeinsamen Faktor sind; wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß zu dieser Klasse fast alle transzendenten Kurven gehören, die einen besonderen Namen erhalten haben, ausgenommen die Klothoide, die Eulersche Kurve, die Linien von Mercator, die Kettenlinie gleichen Widerstandes, die Lemniskatrix und die Additions- und Subtraktions-logarithmische Kurve. Da sich nun der oben erwähnten Eigenschaft auch alle algebraischen Kurven erfreuen, so können jene transzendenten Kurven als eine Verallgemeinerung derselben angesehen werden. Wir haben sie daher mit dem Namen panalgebraische Kurven bezeichnet; n wollen wir ihren Grad nennen, und ν, den höchsten Grad der Polynome $f_0, f_1, \ldots, f_n$, ihren Rang. Wir wollen nun zeigen, daß die panalgebraischen Kurven eine Reihe von Eigenschaften besitzen die ganz analog den bekannten der algebraischen Kurven sind.

Mit u und v bezeichnen wir die Plückerschen Koordinaten der Tangente im Punkte (x, y) einer panalgebraischen Kurve, die der Gleichung (1) genügt; die Ableitungen nach x wollen wir im allgemeinen durch Akzente ausdrücken. Dann haben wir ersichtlich

$$u = \frac{y'}{y - xy'}, \quad v = \frac{-1}{y - xy'};$$

daraus folgt:

$$y' = -\frac{u}{v}, \quad u' = \frac{yy''}{(y - xy')^2}, \quad v' = -\frac{xy''}{(x - xy')^2}; \quad \frac{v'}{u'} = \left(\frac{dv}{du}\right) = -\frac{x}{y},$$

und daher

$$x = -\frac{dv}{u \cdot dv - v \cdot du}, \quad y = \frac{du}{u \cdot dv - v \cdot du}.$$

Setzen wir nun in die Gleichung (1) für x, y, y' die eben als Funktionen von u und v gefundenen Werte ein, so erhalten wir:

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r u^{n-r} \cdot v^r \cdot f_r \left(\frac{-dv}{u \cdot dv - v \cdot du}, \frac{du}{u \cdot dv - v \cdot du}\right) = 0 \quad . \quad (2)$$

Nun ist dies eine Differentialgleichung in u und v von analoger Beschaffenheit wie (1), aber vom Grade ν. Dies zeigt uns, daß die panalgebraischen Kurven in ähnlicher Weise wie die algebraischen, zweier zueinander dualer Definitionen fähig sind, oder anders gesagt, man kann aussprechen den folgenden

Satz I. **Eine panalgebraische Kurve kann ebensowohl als Punktort als auch als Enveloppe von Tangenten aufgefaßt werden.**

Die Betrachtung der Differentialgleichung (1) führt auch sehr leicht zur Erkenntnis der geometrischen Bedeutung der Zahlen n und ν; man findet nämlich als

Satz II. **In einer Schar panalgebraischer Kurven vom Grade n und vom Range ν finden sich n Kurven, die durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen, und ν, welche eine gegebene Gerade der Ebene berühren.**

Dieser Satz ist schon enthalten in einem allgemeineren, nämlich in folgendem:

Satz III. **In einem System panalgebraischer Kurven vom Grade n und vom Range ν gibt es $m\nu + n\mu$ Kurven, die eine algebraische Kurve von der Ordnung m und der Klasse μ berühren.**

Um diesen Satz zu beweisen, könnte man die Methoden der abzählenden Geometrie herbeiziehen[1]), aber man kann auch folgendermaßen verfahren: Es sei

$$\varphi(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

die Gleichung einer algebraischen Kurve von der Ordnung m mit d Doppelpunkten und k Spitzen, so daß demnach ihre Klasse

$$\mu = m(m-1) - 2d - 3k$$

ist. Wird diese nun im Punkte (x, y) von einer Kurve des betrachteten Systems berührt, so wird die Gleichung derselben befriedigt, wenn man darin setzt

$$y' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

sie wird daher sein

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r f_r(x, y) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{n-r} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Sie zeigt, daß die Berührungspunkte der gegebenen Kurve mit den Kurven des gegebenen Systems die den Kurven (α) und (β) gemeinsamen Punkte sind, falls sie für die erste nicht singulär sind. Nun stellt offenbar Gleichung (β) eine Kurve von der Ordnung $\nu + n(m-1)$ dar, die in jedem Doppelpunkte von (α) einen n-fachen Punkt hat, in jeder Spitze einen n-fachen mit in die Spitzentangente zusammenfallenden Tangenten. Demnach haben (α) und (β) gemeinsam

$$m\nu + nm(m-1)$$

Punkte, von denen $2dn$ in die Doppelpunkte und $3kn$ in die Spitzen von (α) fallen.

1) Vgl. H. Schubert, *Abzählende Geometrie* (Leipzig, 1879) S. 51.

Die noch verbleibenden

$$N = m\nu + nm(m-1) - 2nd - 3nk = m\nu + n\{m(m-1) - 2d - 3k\}$$

Schnittpunkte entsprechen ebensovielen Kurven des Systems, die die (α) berühren. Da man nun ersichtlich auch schreiben kann

$$N = m\nu + n\mu,$$

so ist der Satz bewiesen.

Sind X, Y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente an die Integralkurve (1) im Punkte (x, y) so ist die der Tangente selbst

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{dy}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung und (1) $\frac{dy}{dx}$, so findet man

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) \cdot (Y-y)^{n-r} \cdot (X-x)^r = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

Betrachtet man hierin x, y als gegeben, X, Y als variabel, so stellt sie insgesamt die Tangenten im Punkte (x, y) an die n Integralkurven von (1) dar, die durch diesen Punkt gehen. Betrachtet man hingegen X, Y als gegeben, so wird sie durch die Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes der Ebene befriedigt, von der Art, daß die Tangenten daselbst an eine der entsprechenden Integralkurven durch den Punkt (X, Y) gehen; mit anderen Worten: Gleichung (4) stellt den geometrischen Ort der Berührungspunkte der von (X, Y) an eine beliebige der Gleichung (1) befriedigenden panalgebraischen Kurven dar. — Beachtet man ferner, daß die Gleichung (4) eine Kurve $(n+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, die n-mal durch den Punkt (X, Y) geht, so schließt man auf die beiden zueinander dualen Sätze:

Satz IV. **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte an eine panalgebraische Kurve vom Grade n und vom Range ν gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve von der Ordnung $\nu + n$, die jenen Punkt als n-fachen Punkt hat.**[1])

Satz V. **Die Tangenten in den Punkten einer panalgebraischen Kurve vom Range ν und vom Grade n, in denen sie von einer beliebigen Geraden geschnitten wird, gehören einer Kurve von der Klasse $n + \nu$ an, die jene Gerade als ν-fache Tangente hat.**

Für jeden Punkt (X, Y) der Ebene einer algebraischen Kurve ist somit eine Kurve bestimmt, die in bezug auf jene denselben Dienst leistet, wie die Polare eines Punktes in bezug auf eine algebraische Kurve, und daher die *Parapolare* jenes Punktes heißt. Wenn die

---

1) Betreffs einiger Spezialfälle dieses Satzes s. P. H. Schoute, Intermédiaire III, 1896, 3. 7.

panalgebraische Kurve als Integralkurve einer Differentialgleichung zwischen den kartesischen Koordinaten x, y bestimmt ist, so liefert die Gleichung (4) sogleich die Darstellung der Parapolare. Ist hingegen jene Kurve in Polarkoordinaten gegeben, so kann man die der Parapolare auch, ohne zu kartesischen Koordinaten überzugehen, auf folgende Weise erhalten. Es sei $P(\mathrm{P}, \Omega)$ ein beliebiger Punkt der Tangente im Punkte $M(\varrho, \omega)$ an die betrachtete Kurve; ist μ der Winkel zwischen dem Vektor OM und der Tangente MP, so folgt aus dem Dreieck MOP, daß

$$\frac{\mathrm{P}}{\sin\mu} = \frac{\varrho}{\sin(\mu + \Omega - \omega)}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Nun wird diese Gleichung, wenn man P und Ω als gegeben annimmt, befriedigt durch die Polarkoordinaten aller und nur solcher Berührungspunkte der Tangenten, die von P an die gegebene Kurve gezogen sind; also ist (5) die Polargleichung der Parapolaren des Punktes P.

Die Ordnung der Parapolaren eines Punktes in bezug auf eine panalgebraische Kurve erfährt meistens bemerkenswerte Reduktionen, wenn der Pol sich im Unendlichen befindet. Es ergibt sich nämlich aus Gleichung (1), daß der Ort der Punkte (x, y) in denen die Tangenten an die entsprechenden Integralkurven mit der X-Achse den Winkel α bilden, eine Gleichung hat, die man erhält, wenn man in der genannten Gleichung $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ setzt; der Ort selbst hat daher folgende Gleichung:

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) \operatorname{tg}^{n-r}\alpha = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Er ist daher eine algebraische Kurve, deren Ordnung im allgemeinen gleich dem Range der gegebenen ist, und den man die *Paradiametrale* in bezug auf die durch α definierte Richtung nennen kann. Wäre die Kurve in Polarkoordinaten gegeben, so kann man die allgemeine Gleichung der Paradiametralen folgendermaßen erhalten: Ist $M(\varrho, \omega)$ ein Punkt jener Kurve, in dem die bezügliche Tangente mit der Polarachse den Winkel α bildet, und hat μ die oben angegebene Bedeutung, so ist $\mu = \alpha - \omega$, oder $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\alpha - \omega)$, und daher ist

$$\varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

die Gleichung der Paradiametralen, die dem Winkel α entspricht, wenn man die Differentialgleichung berücksichtigt, die ϱ und ω miteinander verknüpft.

Eine interessante Eigenschaft der panalgebraischen Kurven ergibt sich aus einem Fundamentalsatz über die singulären Lösungen der

Differentialgleichungen erster Ordnung, den man Darboux verdankt.[1]) Dieser Satz besagt, daß man durch Elimination von y' aus den beiden Gleichungen

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

die Gleichung des Ortes der Spitzen der Integralkurven der Gleichung (1) erhält. Nun ist die resultierende Gleichung algebraisch, und auf dem Orte liegen insbesondere auch die Spitzen einer jeden beliebigen unter jenen Integralkurven; man schließt daher den

Satz VI. **Die Spitzen einer panalgebraischen Kurve liegen auf einer algebraischen.**

Hierzu können wir wegen der Dualität (vgl. Satz I) hinzufügen den

Satz VII. **Die Wendetangenten einer panalgebraischen Kurve berühren eine algebraische Kurve.**

Jede „algebraische" Berührungstransformation, wie sie durch Gleichungen vom Typus

$$\varphi(y, y, y';\ x_1, y_1, y_1') = 0, \qquad \chi(x, y, y';\ x_1, y_1, y_1') = 0,$$
$$\psi(x, y, y';\ x_1, y_1;\ y_1') = 0$$

definiert wird, wo φ, χ, ψ ganze, rationale algebraische Funktionen der Koordinaten x, y, y' und x_1, y_1, y_1' der beiden sich entsprechenden Linienelemente sind, verwandelt offenbar die Differentialgleichung (2) in eine andere von demselben Typus, verwandelt daher jede Integralkurve von (2) in eine andere analoge; daraus geht hervor der

Satz VIII. **Jede panalgebraische Kurve wird durch eine Berührungstransformation in eine andere umgewandelt.**

So sind z. B. alle Parallelkurven, Fußpunktkurven, Inversen einer panalgebraischen Kurve wieder panalgebraisch.

Die orthogonalen Trajektorien der ∞^1 Integralkurven der Differentialgleichung (2) genügen der Differentialgleichung

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \cdot f_r(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^r = 0 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

und da diese dieselbe Form hat wie (2), so besteht folgender

Satz IX. **Die orthogonalen Trajektorien einer Schar panalgebraischer Kurven sind ebenfalls panalgebraisch und von demselben Grade und Range.**

Die Parapolarkurven der Punkte der Ebene in bezug auf eine panalgebraische Kurve besitzen jede eine bestimmte Zahl singulärer

---

1) *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre* (Bull. Sc. math. astr. IV, 1873), vgl. E. Picard, *Traité d'analyse* III. (Paris, 1896) S. 47.

(fester oder auch von Kurve zu Kurve variabeler) Punkte von bestimmter Vielfachheit. Es wird daher im allgemeinen ∞^1 Parapolaren geben, von denen jede wenigstens einen Doppelpunkt mehr hat; daher kann man (von der Analogie geleitet) den Ort der Punkte aufsuchen, die außer dem gewöhnlichen noch einen Doppelpunkt haben, ebenso den geometrischen Ort dieser Doppelpunkte. Diese beiden Orte kann man, wegen der Analogie, die sie mit jenen Kovarianten einer algebraischen Kurve, die den Namen Steiners und Hesses tragen, als die Para-Steinersche und die letztere als Para-Hessesche bezeichnen. Dann kann man leicht beweisen den

Satz X. **Die Para-Steinersche und Para-Hessesche einer panalgebraischen Kurve sind algebraisch.**

Damit nämlich die durch die Gleichung

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y)\,(Y-y)^{n-r}\cdot(X-x)^r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dargestellte Kurve, welche ja die Parapolare des Punktes (X, Y) ist, einen Doppelpunkt in (x, y) habe, müssen außer der Gleichung (10) noch die beiden folgenden bestehen:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{r=n} \left\{\frac{\partial f_r}{\partial x}(Y-y)^{n-r}\cdot(X-x)^r - r f_r (Y-y)^{n-r}\cdot(X-x)^{n-1}\right\} = 0, \\ &\sum_{r=0}^{r=n} \left\{\frac{\partial f_r}{\partial y}(Y-y)^{n-r}\cdot(X-x)_r - (n-r) f_r (Y-y)^{n-r-1}\cdot(X-x)^r\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Eliminiert man aus (10) und (11) X und Y, so erhält man die Gleichung der Para-Hesseschen, dagegen x, y, die der Para-Steinerschen. Diese Elimination ist im allgemeinen zwar nicht ausführbar, jedenfalls aber ist sicher, daß in beiden Fällen das Resultat eine algebraische Gleichung sein wird (von der man auch durch Anwendung bekannter Sätze aus der Algebra den Grad bestimmen kann), womit der Satz bewiesen ist. Die Elimination von X, Y aus (10), (11) läßt sich aber ausführen, wenn $f_1 = f_2 = f_3 = \cdots = f_{n-1} = 0$ ist; in dem Falle nämlich stellen sich jene Gleichungen in folgender Form dar

$$f_0\cdot(Y-y)^n + f_n\cdot(X-x)^n = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_0}{\partial x}\cdot(Y-y)^n + \frac{\partial f_n}{\partial x}\cdot(X-x)^n = n f_n\cdot(X-x)^{n-1}, \\ &\frac{\partial f_0}{\partial y}\cdot(Y-y)^n + \frac{\partial f_n}{\partial y}\cdot(X-x)^n = n f_0\cdot(Y-y)^{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Schreibt man die beiden letzteren wie folgt,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}\,\frac{(Y-y)^n}{(X-x)^n} + \frac{\partial f_n}{\partial x} = \frac{n f_n}{X-x}, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial y}\,\frac{(X-x)^n}{(Y-y)^n} + \frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{n f_0}{Y-y},$$

so erkennt man, wenn man sie mit der ersteren kombiniert, daß sie werden zu

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_n \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{n f_0 f_n}{X-x}, \qquad \begin{vmatrix} f_n & f_0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{n f_n f_0}{Y-y};$$

erheben wir diese in die n^{te} Potenz, wenden von neuem Gleichung (11) an, so erhalten wir

$$H \equiv f_0 \begin{vmatrix} f_0 & f_n \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{vmatrix}^n + f_n \begin{vmatrix} f_n & f_0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial y} \end{vmatrix}^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

als Gleichung der Para-Hesseschen der gegebenen panalgebraischen Kurve sowohl als auch aller derjenigen, welche der oben gekennzeichneten Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leisten.

Wenn man, was noch spezieller ist, $n = 1$ setzt, und der Einfachheit wegen $f_n = \varphi$, $f_0 = \psi$ setzt, so wird die vorige Gleichung

$$H \equiv \begin{vmatrix} \varphi & \psi & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \psi \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Man beachte nun, daß man sich die Gleichung der Para-Hesseschen einer panalgebraischen Kurve immer in dieser Form geschrieben denken kann. Löst man nämlich die Differentialgleichung (2) auf nach $y' = \frac{dy}{dx}$, so erhält man ein Resultat von folgender Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi}{\psi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wo φ und ψ bestimmte, immer endliche Funktionen von x sind, sucht man nun die Bedingung dafür, daß die Parapolare des Punktes (X, Y), nämlich die Kurve

$$\frac{X-x}{Y-y} = -\frac{\psi}{\varphi}$$

einen Doppelpunkt habe, so findet man in der Tat die Gleichung (13).

Diese Bemerkung führt uns zur Entdeckung einer anderen wichtigen Eigenschaft, die allen panalgebraischen Kurven gemeinsam ist. Differenzieren wir die Gleichung (14), so finden wir

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \varphi\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\psi^3},$$

das will besagen, daß

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{H}{\psi^3}.$$

Aus diesem Ausdrucke geht hervor, daß für alle Punkte, in denen $H = 0$, $\psi \neq 0$, auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, daher sind diese Punkte für die Integralkurven der betrachteten Differentialgleichung Wendepunkte. Umgekehrt hat man für einen Wendepunkt der Integralkurve $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ daher muß, weil ψ immer eine endliche Funktion ist, $H = 0$ sein. Es liegen daher auf der Para-Hesseschen die Wendepunkte aller (speziell einer jeden) der betrachteten Integralkurven. Wir schließen somit den

Satz XI. **Die Wendepunkte jeder panalgebraischen Kurve liegen auf einer algebraischen Kurve.**

Und wegen der Dualität (s. Satz I) können wir auch schließen auf den folgenden

Satz XII. **Die Spitzentangenten jeder panalgebraischen Kurve berühren eine algebraische Kurve.**

Aus XI ergibt sich eine bequeme Methode, die Gleichung der Para-Hesseschen einer panalgebraischen Kurve zu finden. Wenn diese nämlich in kartesischen Koordinaten definiert ist, so braucht man nur einen Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$ herzuleiten und gleich Null zu setzen, nachdem man die transzendenten Funktionen vermittelst der Kurvengleichung eliminiert hat. Ist dagegen die Kurve durch eine Gleichung in Polarkoordinaten definiert, so genügt es, die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

zu berechnen und sie dann vermittels der Gleichung der gegebenen Kurve so zu reduzieren, daß sie algebraisch erscheint.

Die bislang angestellten Betrachtungen zeigen uns, daß die panalgebraischen Kurven enge mit der Betrachtung einer ziemlichen Zahl algebraischer Kurven verknüpft sind. Aber die angeführten sind nicht die einzigen, die man betrachten kann. Beachtet man, daß uns der Satz VII beweist, daß man in den meisten Fällen bei den dargelegten Entwickelungen an Stelle der Tangenten auch die Normalen setzen kann, so führt uns die gleichzeitige Betrachtung der einen sowohl wie der anderen zu wichtigen Bemerkungen, wie sich aus folgendem ergibt:

Wir nehmen in der Ebene einer panalgebraischen Kurve, die der Differentialgleichung (2) genügt, einen beliebigen Punkt P (x_0, y_0) an. Dann werden die Punkte der Kurve, deren Tangenten durch P gehen, durch die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

definiert werden. Die Normale in einem dieser Punkte (x, y) hat die Gleichung

$$(X - x) + (Y - y)y' = 0,$$

daher sind

$$u = -\frac{1}{x + yy'}, \quad v = -\frac{y'}{x + yy'}$$

ihre Koordinaten. Demzufolge ist

$$y' = \frac{v}{u} \quad . \quad . \quad . \quad (17), \qquad ux + vy + 1 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

infolge von (17) wird dann Gleichung (16)

$$vx - uy = vx_0 - uy_0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und diese kombiniert mit (18) liefert folgende Werte

$$x = -\frac{u + v(uy_0 - vx_0)}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v + u(vx_0 - uy_0)}{u^2 + v^2} . \quad . \quad (20)$$

Setzen wir in (2) die Werte von (17) und (20) ein, so finden wir

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r\left(\frac{u + v(uy_0 - vx_0)}{u^2 + v^2}, \quad -\frac{v + u(vx_0 - uy_0)}{u^2 + v^2}\right)\left(\frac{v}{u}\right)^{n-r} = 0 \qquad (21)$$

Da nun diese Gleichung in u und v algebraisch ist, so ist der Beweis erbracht für folgenden

Satz XIII. **Die Normalen einer panalgebraischen Kurve in den Punkten, in denen sie von den Strahlen eines Strahlenbüschels berührt wird, sind sämtlich Tangenten einer und derselben algebraischen Kurve.**

Ein Spezialfall dieses Satzes war zur Zeit schon bekannt, indem Juel bemerkte, daß die Normalen einer Epi- (oder Hypo-)Zykloide in den Punkten, in denen sie von den Strahlen eines Strahlenbüschels berührt wird, alle denselben Kegelschnitt berühren.

Ähnlich kann man beweisen den folgenden

Satz XIV. **Die Tangenten einer panalgebraischen Kurve in den Punkten von der Art, daß die entsprechenden Normalen durch einen Punkt gehen, sind zugleich Tangenten einer algebraischen Kurve.**

Die bisher bekannten transzendenten Kurven, die nicht panalgebraisch sind, sind noch so wenig zahlreich, daß es als verfrüht und unklug erscheinen muß, schon jetzt ein Kriterium für ihre Klassifikation aufzustellen. Dennoch scheint es uns nützlich zu sein, bevor wir schließen, auf einen Begriff hinzuweisen, auf den man zurückgreifen könnte, um wenigstens einige von diesen unterzubringen. Sowie man alle die transzendenten Kurven, bei denen die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte der Ebene gezogenen Tangenten auf einer algebraischen Kurve liegen, in eine erste Klasse zusammen-

faßt, so könnte man eine **zweite Klasse** bilden von solchen, bei denen jene Punkte auf einer panalgebraischen Kurve liegen; dann eine **dritte** Klasse, bei denen jene Punkte auf einer Kurve der zweiten Klasse liegen usw. Diese neuen Kurven genügen einer Differentialgleichung von höherer als der ersten Ordnung, deren Koeffizienten ganze, rationale Funktionen von x, y sind.

175. Einige der Begriffe, die wir schon zur Gewinnung neuer algebraischer Kurven in Anwendung sahen, wurden auch, und zwar mit gutem Erfolge angewendet, um neue transzendente Kurven zu erhalten. Vor allem war der Gedanke, die Eigenschaften der Kegelschnitte zu verallgemeinern, auch für den Zweig der Geometrie, den wir jetzt behandeln, ergiebig an Resultaten; folgendes Beispiel möge dies zeigen.

Bekanntlich bilden die Tangenten in einem beliebigen Punkte eines (zentrischen) Kegelschnittes mit den zu den Brennpunkten gezogenen Vektoren gleiche Winkel; daß diese Eigenschaft für die Kurven zweiter Ordnung charakteristisch ist, wurde von Euler bewiesen.[1]) Dies führte G. Bellavitis zu folgender Aufgabe: Eine Kurve zu finden derart, daß die Tangente in einem beliebigen ihrer Punkte mit den Verbindungslinien dieses Punktes mit zwei festen Punkten Winkel bilden, deren Differenz konstant ist. Wenn diese Konstante von Null verschieden ist, so sind die entsprechenden Kurven transzendent; sie wurden von Bellavitis durch die Methode der Äquipollenzen[2]), und von S. R. Minich durch das gewöhnliche, durch die Integralrechnung vorgeschriebene Verfahren bestimmt.[3]) Übrigens, wenn A und B die festen Punkte und δ die konstante Differenz ist, so ist leicht einzusehen, daß die gesuchten Kurven nichts anderes sind, als die Trajektorien des Winkels δ in dem Systeme der Kegelschnitte, die A und B zu Brennpunkten haben; von diesem Gesichtspunkte aus ist die Aufgabe des Bellavitis von G. Mainardi gelöst worden[4]), und da seine elegante Lösung in einem sehr bekannten Werke von Boole[5]) zu finden ist, so dürfen wir uns auf die Anführung desselben beschränken.

Eine andere Quelle transzendenter Kurven entspringt der geometrischen Darstellung der trigonometrischen und ihnen verwandter

---

1) *Solutio trium problematum difficiliorum ad methodum tangentium inversam pertinentium* (Mém. Acad. St. Pétersbourg, X, 1821—1822).

2) *Saggio d'applicazione del calcolo delle equipollenze* (Ann. Scienze Regno Lombardo-Veneto, V, 1835). Vgl. auch *Sposizione del metodo delle equipollenze* (Mem. Soc. Ital. Scienze, XXV, 2a Parte, 1854).

3) *Soluzione d'un problema di geometria relativo al metodo inverso delle tangenti* (Ann. Scienze Regno Lombardo-Veneto, VII, 1837).

4) *Sulla integrazione delle equazioni differenziali* (Annali Sc. matem. fis. I, 1850).

5) *A treatise on differential equations* (IV. Aufl., London 1877) S. 234—251.

Funktionen (Kap. 2). Eine noch reichere Quelle bietet sich bei der Untersuchung der Quadratur des Kreises dar; wir werden daher den Quadratrixkurven das dann folgende Kapitel (3) widmen. Eine berühmte von Archimedes entdeckte Kurve sowie alle, die durch Verallgemeinerung ihrer Definition erdacht wurden, werden uns einen ziemlichen Teil dieses Abschnittes hindurch (Kap. 4—7) beschäftigen. Einen noch größeren Teil (Kap. 8—13) nehmen die Untersuchungen ein über die Eigenschaften derjenigen Kurven, die (ähnlich wie die vorher betrachteten) durch geeignete Kombinationen spezieller Bewegungen erzeugt werden. Darauf werden wir die hauptsächlichsten Kurven behandeln, zu denen man bei der Auflösung von Aufgaben gelangt ist, die demjenigen Gebiete angehören, das die ersten Analytiker „methodus tangentium inversa“ nannten (Kap. 14—16). Die geometrische Darstellung einiger wichtiger Funktionen, welche die Analysis bietet, wird uns in Kap. 17, 18 beschäftigen; einige der so entstehenden Kurven sind beachtenswert durch ganz außergewöhnliche Singularitäten, an die man früher keineswegs gedacht hatte. Zwei andere Gruppen von Kurven wurden bei der Untersuchung gewisser geometrischer Transformationen gefunden (Kap. 19, 20). Recht zahlreich sind solche, zu denen die mathematische Untersuchung gewisser Naturerscheinungen führt (Kap. 21—25); wir werden so die wichtigsten physikalisch-mathematischen Kurven kennen lernen und sehen, daß sie auch beachtenswerte geometrische Eigenschaften besitzen.

Zweites Kapitel.

Die trigonometrischen und hypertrigonometrischen Kurven.

176. Wir bezeichnen mit trigonometrischen Kurven die durch folgende Gleichungen dargestellten

$$y = b \cdot \sin\frac{x}{a} \quad \dots (1) \qquad y = b \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{a} \quad \dots (2) \qquad y = b \cdot \sec\frac{x}{a} \quad \dots (3)$$

$$y = b \cdot \cos\frac{x}{a} \quad \dots (4) \qquad y = b \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{a} \quad \dots (5) \qquad y = b \cdot \operatorname{cosec}\frac{x}{a} \quad \dots (6)$$

wo a und b Konstanten sind, die immer als positiv angenommen werden können.[1]) Da, wenn man $x = \frac{\pi a}{2} - x'$ setzt, man von den

1) Ihnen analog sind die durch

$$y = b \cdot sn\frac{x}{a}, \qquad y = b \cdot cn\frac{x}{a}, \qquad y = b \cdot dn\frac{x}{a} \text{ (vgl. Kap. 12)}$$

wiedergegebenen Kurven, welche die Jacobischen elliptischen Funktionen geometrisch darstellen; die erste könnte man elliptische Sinusoide nennen. Für analytische Zwecke wurde durch J. Gomes Teixeira (Mem. Acad. Madrid XVIII, 1897, S. 96; Journ. f. Math. CXVI, 1897, S. 16; Obras V, 36) auch die Kurve $|\sin(x+iy)| = c$ untersucht.

drei ersten der Reihe nach zu den drei letzten gelangt, so genügt es, jene drei ersten zu untersuchen. Im Falle $a = b = 1$ dienen sie dazu, die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen geometrisch darzustellen und können trigonometrische Kurven im engeren Sinne genannt werden (s. Taf. I, Fig. 1, wo die ersten drei Kurven stark, die letzteren schwach ausgezogen, gestrichelt bez. punktiert sind); da man sie aber auch in folgender Weise schreiben kann

$$x = a \operatorname{arc} \sin \frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \sec \frac{y}{b},$$

$$x = a \operatorname{arc} \cos \frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{y}{b}, \qquad x = a \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \frac{y}{b},$$

so können sie auch dazu dienen, die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen, die zyklometrischen Funktionen darzustellen, wenn wieder $a = b = 1$. Variiert man die Konstanten a und b, so erhält man Kurven, die einander affin sind.

Diese Kurven sind wohl die einfachsten und bekanntesten transzendenten Linien. Denen vom Typus (1) werden wir alsbald begegnen, nämlich als Tschirnhausens Quadratrix und später als Begleitkurve der Zykloide; jene entspricht dem Falle $a = 2\pi b$, diese dem $a = b$. Die sehr einfachen geometrischen Beziehungen, die zwischen den durch Variation der Konstanten a und b entstehenden ∞^2 verschiedenen Kurven (1) bestehen, erlauben uns, diese als im wesentlichen identische Kurven anzusehen; somit erklärt es sich, wie Wallis behaupten konnte: „Et Gallorum socia Cycloidis est ea Curva, quae (mihi) terminat Sinuum rectorum"[1]), jede ist dieselbe Linie, die Leibniz die linea sinuum[2]) und die man heute, etwa nach Bélidor[3]), die Sinuskurve, Sinuslinie, oder Sinusoide nennt, wogegen die Kurve (4) die Kosinusoide heißt. Man kann dieselbe auch erhalten, wenn man einen Kreiszylinder mit einer beliebigen Ebene schneidet und die Oberfläche auf eine Ebene abrollt[4]), auch als Orthogonal-Projektion einer Schraubenlinie auf eine zur Zylinderachse parallele Ebene. Sie tritt ferner auf in der mathematischen Theorie der Schwingungen speziell in der Akustik, wo sie die harmonische Kurve genannt wird[5]); zu Unrecht wurde sie dagegen mit der Gestalt, die eine schwingende Saite annimmt, identifiziert[6]); von Ästhetikern wurde sie auch als die Schönheitslinie bezeichnet.[7])

1) Brief an Leibniz vom 6. April 1697 (*Leibniz*, ed Gerhardt, IV, S. 18).

2) Brief an Huygens vom 4./14. September 1694 (a. a. O. II, S. 195).

3) *La science des ingénieurs* (Paris, 1729).

4) G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia*, Lib. I n. 67 Note (Modena, 1893).

5) Lord Raleigh, *The Theory of Sound* I. (2. Aufl., London 1894) S. 21.

6) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Math.* III. (2. Aufl., Leipzig 1901) S. 232.

7) M. s. *The analysis of beauty* (1753) von dem englischen Maler W. Hogarth.

Die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Kurve (1) ist

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{a};$$

macht man diese Gleichung rational, so sieht man: **Die Berührungspunkte der von einem Punkte ihrer Ebene an die Sinuskurve gezogenen Tangenten gehören einer Kurve vierter Ordnung an, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist;** daraus folgt dann: **Jede Sinuskurve gehört einem System an mit den Charakteristiken $\mu=2$, $\nu=2$.** Eine leichte Rechnung beweist, daß $2ab$ die Fläche ist, die von der x-Achse und dem durch zwei aufeinanderfolgende Schnitte der Kurve mit der Achse begrenzten Bogen umschlossen wird. Die Rektifikation der Sinuslinie hängt von elliptischen Funktionen ab.[1])

Schließlich sei bemerkt, daß die Punkte

$$x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad y=\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}-1)$$

Brennpunkte (vgl. S. 1) der Sinuslinie sind.

Die durch Gleichung (2) dargestellte Kurve heißt die Tangenskurve oder Tangentoide[2]), (5) hingegen die Kotangentoide. Sie besteht aus unendlich vielen gleichen Zügen, die im Unendlichen zusammenhängen; die Schnitte mit der x-Achse sind Wendepunkte, wie bei der Sinuskurve. Die Tangente im Punkte (x, y) hat die Gleichung

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{b^2+y^2}{ab},$$

woraus sich mit Leichtigkeit ein einfacher Ausdruck für die Subtangente und somit eine Konstruktion der Tangente herleiten läßt[3]). Die Gleichung selbst beweist: **Die von einem Punkte an die Tangenskurve gezogenen Tangenten haben ihre Berührungspunkte auf einer Kurve dritter Ordnung liegen, die durch jenen Punkt geht; jede Tangenskurve gehört daher einem System mit den Charakteristiken $\mu=1$, $\nu=2$ an.** Die Fläche, die zwischen der Kurve, der Abszissenachse und der zur Abszisse x gehörenden Ordinate liegt, wird ausgedrückt durch $F=ab\log\sec\frac{x}{a}$; dagegen das durch Rotation dieser Fläche um Ox erzeugte Volumen durch $V=\pi b^2\left(a\operatorname{tg}\frac{x}{a}-x\right)$; diese Sätze, von Côtes aufgestellt, sind leicht zu beweisen[4]).

Schließlich heißen die durch die Gleichungen (3) und (6) dargestellten Kurven bzw. Secantoide[5]) und Cosecantoide. Die Tangente an die erstere im Punkte (x, y) hat die Gleichung

1) Vgl. J. Gomes Teixeira, *Nota sull' applicazione del teorema di Fagnano agli archi della lumaca di Pascal e della sinusoide* (Period. matem. XIX, 1903).

2) „Figure des tangentes" wird sie genannt in Stone, *Analyse des infiniment petits* trad. Rondet (Paris, 1735) S. 56.

3) J. Barrow, *Lectiones mathematicae* (Londini, 1670); s. *The mathematical Works of Is. Barrow,* ed. Whewell (Cambridge, 1860) S. 250.

4) *Harmonia mensurarum* (Cambridge, 1722) S. 78 und 81.

5) „Figure des secantes" nach Stone-Rondet.

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{y\sqrt{y^2-b^2}}{ab};$$

daraus folgt: **Die von einem Punkte ihrer Ebene an die Secantoide gezogenen Tangenten haben ihre Berührungspunkte auf einer Kurve sechster Ordnung liegen, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist; jede Secantoide gehört daher einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$ an.**

Die von der Secantoide, den Koordinatachsen und der zur Abszisse x gehörenden Ordinate begrenzte Fläche wird gegeben durch

$$F = ab \log\left(\sec\frac{x}{a} + \operatorname{tg}\frac{x}{a}\right) = ab \log \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right);$$

dies fand Côtes[1]), und es kann durch eine Integration leicht nachgewiesen werden.

Es folgen nun die trigonometrischen Kurven mit einer Gleichung von der Form

$$y = a_1 \sin m_1 x + a_2 \sin m_2 x + a_3 \sin m_3 x + \cdots \quad \text{. . . (7)}$$

wo die a und m beliebige Konstanten sind.

Während die Lissajousschen Kurven (Nr. 173) zwei zueinander senkrechte Schwingungen zusammensetzen, so stellen diese Kurven die Zusammensetzung zweier oder mehrerer Schwingungen von derselben Richtung dar. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Akustik[2]), und sie lösen u. a. das Rätsel, wie es möglich ist, daß der Phonograph eine große Menge von Tönen nebst ihrer Klangfarbe zugleich aufnehmen und wiedergeben kann; ebenso werden sie in der Theorie der Mehrphasenströme verwendet.[3]) Auch in der Mathematik sind sie von Wichtigkeit, da man (bei geeigneter Wahl der a und m) **durch sie jede eindeutige periodische Funktion darstellen kann** (Fouriersche Reihen!). Die Fig. 2, 3, 4 auf Taf. I geben einige Beispiele; die dünneren Linien sind die Komponenten.

177. Unterwirft man die trigonometrischen Funktionen wiederum anderen algebraischen oder transzendenten Funktionen, so entsteht eine neue Kurvenfamilie, die hypertrigonometrischen Kurven.

Die älteste derselben hat die Gleichung

$$y = b\sqrt{\cos\frac{x}{a}};$$

Fermat lehrte die Tangente an sie zu finden[4]). Es folgt dann jene mit der Gleichung[5])

$$\cos my = k \cos mx,$$

1) *Harmonia mensurarum*, S. 78.

2) A. Wüllner, *Experimentalphysik* (Leipzig, 1895) § 134, und viele andere.

3) S. P. Thompson, *Mehrphasige Ströme und Wechselstrommotoren* (Halle, 1904); N. Tesla, *Untersuchungen über Mehrphasenströme* (Halle, 1895) u. a.

4) Brief an P. Mersenne v. 22. Oktober 1638 (*Oeuvres de Fermat* II, S. 172).

5) Hülsen, *Über die Kurve*: $\cos my = k \cdot \cos mx$ (Programm Naumburg, 1859).

alsdann die durch folgende Gleichung dargestellte[1])

$$a \sin y \cdot \sin my = b \sin x \cdot \sin nx + c;$$

ferner die, welche als Gleichung hat

$$y = a \cdot \sin \sin x,$$

welche die Doppelsinuskurve heißt[2]).

Einfacher sind die Kurven

$$y = a \cdot \sin^n x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

welche P. Mansion gerade oder ungerade Sinusoide nennt, je nachdem n gerade oder ungerade ist[3]). Wie sich diese beiden Fälle zueinander verhalten, kann der Leser leicht aus der Betrachtung der Fig. 5 auf Taf. I ersehen, wo die stark ausgezogene Linie den Fall $y = a \sin^3 x$[4]), die andere $y = a \sin^6 x$ darstellt. Es lassen sich unzählige andere ausdenken[5]); jedoch nicht alle bieten Interesse oder besitzen eine tatsächliche Wichtigkeit.

Wir erwähnen schließlich von ihnen noch die Lemniskatrix von Oekinghaus[6]), die durch folgende Gleichung definiert ist

$$\sin iy = i \cos x; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

daß in ihr das Imaginäre nur scheinbar eintritt, erkennt man, wenn man sie folgendermaßen schreibt:

$$y = \log\left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right) \quad \ldots \ldots \quad (9')$$

Aus dieser folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}; \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \cos x}{\sqrt{(1 + \cos^2 x)^3}}; \quad \ldots \quad (10)$$

---

1) A. Newton and A. W. Philipps, *On the transcendental curves whose equation is* $\sin y \cdot \sin my = a \sin x \cdot \sin nx + b$ (Trans. of the Connecticut Academy III, 1875).

2) E. Sang, *On the curve of second sines and its variations* (Proc. R. Soc. Edinburgh, VIII, 1874).

3) *Aires des sinusoïdes et formule de Wallis* (Mathésis, 2. Sér., X, 1900).

4) Läßt sich auch darstellen als $y = \frac{3a}{4} \sin x - \frac{a}{4} \sin 3x$, also (wie alle die Kurven (8)) in der Form der Gleichung (7).

5) Z. B. hat F. Franklin (*On some applications of circular coordinates*, Amer. Journ. Mathem. XII, 1890) die Integralkurven der Differentialgleichung $\sin x \cdot dx = \sin y \cdot dy$ untersucht; während man, unter dem Namen Baum, die folgende Kurve untersucht hat

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{r}{a} \sin \frac{\pi x}{2a} + 1$$

(vgl. J. de Vargas y Aguirre, *Catalogo general de curvas*. Mem. Acad. Madrid. XXVI, 1908. S. 73).

6) S. die Abh. *Die Lemniskate* (Arch. Math. Phys., Ser. 2. VII u. VIII, 1889).

demnach sind alle Punkte mit den Koordinaten $x = k\pi$, $y = \log(\sqrt{2} \pm 1)$ Kulminationspunkte, während die Punkte

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \qquad y = 0$$

Wendepunkte sind. — Bezeichnen wir, wie gewöhnlich, den Bogen mit s, den Krümmungsradius mit R, so folgt aus der Gleichung (10)

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \qquad R = \frac{\sqrt{2}}{\cos x};$$

folglich nach Elimination von x

$$s = 2\int \frac{dR}{\sqrt{R^4 - 4}}, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

welches die natürliche Gleichung der Lemniskatrix ist. Wenden wir eine Formel an, welche im Kap. 15 bewiesen werden wird, so schließen wir: **Die Lemniskatrix ist die Evolvente einer Kurve, bei welcher die Abszisse proportional einer Potenz des Bogens ist.**

Drittes Kapitel.

Die Quadratrixkurven.

178. Im 12. Kapitel des vorigen Abschnittes (Bd. I, S. 388 ff.) haben wir Notiz genommen von vielen algebraischen Kurven, die dazu dienen können, geometrisch das Problem der Teilung eines Winkels in gleiche Teile zu lösen. Dies Problem kann aber auch — ebenso wie die allgemeinere Aufgabe, einen Winkel in zwei Teile von gegebenem Verhältnisse zu teilen — mittels einer nicht-algebraischen Kurve gelöst werden, deren charakteristische Eigenschaft (*τὸ σύμπτωμα*[1]) nach der Aussage des Proklus der berühmte Sophist Hippias aus Elea angegeben hatte. Dieselbe Kurve wurde aber auch von einem anderen Geometer — Dinostratus — angewendet, um ein anderes nicht weniger berühmtes Problem zu lösen, nämlich das der Quadratur des Kreises: daher der Name Quadratrix (*τετραγωνίζουσα*), mit welchem sie nach dem Vorgange des Pappus bezeichnet wird[2]). Dieser berühmte Kommentator gibt die Erzeugung der Kurve mit folgenden Worten an[3]): „Gegeben ist ein Quadrat (Taf. I, Fig. 6*a*)

---

1) Mit diesem Namen bezeichneten die Alten bekanntlich dasjenige bei ihrer Methode, was den Dienst der Gleichung in der modernen analytischen Geometrie versieht.

2) Heilbronner (*Historia matheseos*, Lipsiae 1742) gibt der Kurve den heute vergessenen Namen „Voluta delumbata".

3) *Pappus*, herausgeg. v. Hultsch, S. 250—52.

$ABCD$, man beschreibe um A als Mittelpunkt den Kreis BED und lasse die Gerade AB sich so bewegen, daß der Punkt A fest bleibt, und B den Kreis BED beschreibt. Die Gerade BC bleibe immer parallel zu AD, während ihr Punkt B die Gerade BA gleichförmig durchläuft; währenddem durchlaufe die Gerade AB gleichförmig den Winkel BAD (d. h. der Punkt B den Kreis BED). Es möge dabei eintreffen, daß AB und BC zu gleicher Zeit auf der Geraden AD zusammenfallen. Unter der Voraussetzung dieser so geregelten Bewegung werden die Geraden AB und BC sich in jeder ihrer Lagen in einem variabeln Punkte F schneiden, der dann innerhalb des von der Geraden BA und AD und dem Kreise BED begrenzten Raumes eine gewisse Linie beschreibt, die immer nach derselben Seite konkav ist, und die sich als geeignet erweist zur Aufsuchung eines Quadrates, das einem gegebenen Kreise inhaltsgleich ist."

Aus diesem Passus geht hervor, daß die Quadratrix sich leicht punktweise konstruieren läßt (die bequemste Art ist, sowohl die Gerade AB als auch den Quadranten BD in 2^n gleiche Teile zu teilen); ferner geht daraus hervor, daß sie auch dazu dienen kann, die Aufgabe, einen Winkel in Teile zu teilen, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen, zurückzuführen auf die analoge Aufgabe, eine Strecke in dieser Weise zu teilen, welche Zurückführung sogleich auf die Lösung der Aufgabe selbst führt.

Um eine geeignete analytische Darstellung der Quadratrix des Dinostratus zu erhalten, nehmen wir die Geraden AB und AD als x- und y-Achsen, nennen r die Seite des Quadrates, ω den variabeln Winkel FAB und μ einen Zahlen-Koffizienten, dann bestehen die Beziehungen:

$$x = (1-\mu)r, \qquad \omega = \mu\frac{\pi}{2},$$

folglich nach Elimination von μ

$$\frac{r-x}{r} = \frac{2\omega}{\pi}.$$

Ist aber $AF = \varrho$, so hat man $x = \varrho\cdot\cos\omega$, und folglich

$$\varrho = \frac{r}{\cos\omega}\left(1-\frac{2\omega}{\pi}\right). \qquad (1)$$

Dies ist die Polargleichung der Kurve; setzen wir $\omega = \frac{\pi}{2} - \varphi$, so ergibt sich hieraus

$$\varrho = \frac{2r}{\pi}\,\frac{\varphi}{\sin\varphi} \qquad (1')$$

als zweite Form der Polargleichung, der wir schon früher (Bd. I, S. 349) begegnet sind. Da $x = \varrho\cos\omega$, $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, so wird (1) zu

$$\frac{x}{r} = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

oder auch

$$y = x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2r}; \qquad (2)$$

dies ist die kartesiche Gleichung der Quadratrix. Aus dieser ergibt sich sogleich eine wichtige Folgerung; es sei y_0 die Ordinate des Punktes I, in welchem die Quadratrix die Gerade AD (x-Achse) schneidet, so haben wir

$$y_0 = \lim_{x=0} y = \lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2r}} = \lim_{x=0} \left(\frac{2r}{\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{2r}\right) = \frac{2r}{\pi};$$

und daher ist $\pi = \frac{2r}{y_0}$; ist nun der Punkt I geometrisch bestimmt, so ist damit auch π bestimmt, und somit jeder Kreisumfang rektifiziert, und jeder Kreis quadriert; damit ist die Anwendbarkeit der Kurve des Hippias und Dinostratus auf das Problem der Quadratur des Kreises erhärtet.

Die Gleichung (2) führt noch zu einem anderen Schlusse; sie zeigt nämlich, daß die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) die Gleichung hat

$$Y - y = (X - x) \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r} - \frac{\frac{\pi x}{2r}}{\sin^2 \frac{\pi x}{2r}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo X, Y die laufenden Koordinaten sind; oder wegen Gleichung (2)

$$Y - y = (X - x) \left\{ \frac{y}{x} - \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2rx} \right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Betrachten wir in dieser Gleichung X und Y als gegeben, x, y als unbekannt, so kann sie mit (2) kombiniert zur Bestimmung des Berührungspunktes der vom Punkte $P(X, Y)$ aus an die Quadratix gezogenen Tangente dienen; da nun (3) eine kubische Gleichung in x, y ist, die durch $X = x$, $Y = y$ befriedigt wird, so folgern wir: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkte P an eine Quadratrix ziehen kann, liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, die durch diesen Punkt hindurchgeht**; die Quadratrix ist demnach eine panalgebraische Kurve, die (vgl. **174**) einem System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$ angehört. Daraus folgt: **Die Tangenten an eine Quadratrix in den Punkten, in welchen sie von einer Geraden geschnitten wird, umhüllen eine Kurve dritter Klasse, die jene Gerade als Doppeltangente hat.**

179. Wie aus dem in voriger Nummer wiedergegebenen Passus der Sammlung des Pappus hervorgeht, glaubten die Alten, daß die Quadratrix nur aus dem Zweige $B1$ innerhalb des Quadranten ABD bestehe, und diese Ansicht hat sich mindestens bis zu den Zeiten Vietas erhalten[1]); daß dies ein Irrtum ist, wird zur Evidenz bewiesen durch die Tatsache, daß die Gleichung (2) sich nicht ändert, wenn

---

1) Vgl. *Variorum de rebus mathematicis responsorum*, Cap. VIII, Prop. I (F. Vietae, *Opera mathematica* et. Schooten, Lugd. Batav. 1646, S. 365).

man das Vorzeichen von x wechselt, also ist die Quadratrix symmetrisch in bezug auf die y-Achse (AD); dieselbe Gleichung zeigt, daß, wenn $|x| > r$, $y < 0$; folglich erstreckt sich die Kurve auch nach der negativen Seite der y, ferner ergibt sich für $x = |2r|$ $y = \infty$, und man erkennt leicht mit Anwendung einer der bekannten Regeln für Kurvengleichungen, daß die beiden Geraden $x = \pm 2r$ Asymptoten der Quadratrix sind. Aber die Gleichung (2) zeigt ferner, daß die Quadratrix die x-Achse in unendlich vielen Punkten mit den Abszissen $\pm r$, $\pm 3r$, $\pm 5r$, ... schneidet; daß alle ihre Schnittpunkte mit der Geraden $y = \frac{2r}{\pi}$ Wendepunkte sind, und daß alle die Geraden $x = \pm 2r$, $x = \pm 4r, \ldots$ Asymptoten sind. Die Kurve besteht demzufolge außer dem parabolischen Zweige aus unzählig vielen Wendezügen, die symmetrisch zur y-Achse sind, wie Fig. 6b auf Taf. I zeigt.[1])

Roberval[2]) verdankt man eine bemerkenswerte Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkte F, die wir passend hier wiedergeben: „Man beschreibe um A als Mittelpunkt (Taf. I, Fig. 6a) den Kreisbogen der in F beginnt und in dem Punkte G von AD endigt. Auf der ihn in F berührenden Geraden trage man $FR = FG$ ab; die in R zu ihr errichtete Senkrechte schneide AD im Punkte T. Durch diesen Punkt geht die Tangente an die Quadratrix in F.“ Ohne uns mit dem Beweise für diese Konstruktion aufzuhalten, wollen wir vielmehr noch bemerken, daß aus der Gleichung (3'), wenn man in ihr $X = 0$ setzt, sich ergibt:

$$Y = \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2r},$$

oder auch
$$\frac{AT}{\overline{AF}^2} = \frac{2\pi r}{(2r)^2}.$$

Die rechte Seite ist nun, wenn π gefunden ist, bekannt; da man nun AF kennt, so kann man auch AT und somit auch die Tangente FT finden[3]).

---

1) Vgl. auch Haas-Kleyers *Lehrbuch der Differentialrechnung*, Bd. III (Stuttgart 1894) S. 120. Über die ältere Untersuchung in betreff der Form der Kurve s. m. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Nouv. éd. (Paris, 1799) II, S. 177.

2) *Observations sur la composition des mouvements* etc. (Mém. Acad. Sciences VI, Paris 1730) S. 51; wie bekannt, stammt diese Arbeit etwa aus dem Jahre 1636.

3) Über diese Frage der Tangentenziehung siehe ferner die *Lectiones geometricae* von Barrow (London, 1670; wieder abgedruckt in *The mathematical Works of Is. Barrow*, herausg. v. Whewell, Cambridge 1860), die *Analyse des infiniment petits* vom Marquis de l'Hôpital (Paris 1696: II. Aufl. 1705, S. 26), die *Oeuvres de Fermat* I, S. 163 und III, S. 145, sowie auch Wallis, Phil. Trans. 1672, und H. Résal, *Construction de la tangente en un point de la quadratrice* (Nouv. Ann. Mathém., 2e Sér. XV, 1876).

Um die Quadratrix zu quadrieren, setzen wir $\frac{\pi x}{r} = u$ und haben dann

$$\int y \cdot dx = \int \frac{2ru}{\pi} \operatorname{ctg} u \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot du = \left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 \int u \operatorname{ctg} u \cdot du;$$

nun ist

$$u \operatorname{ctg} u = u \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots\cdots}{1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \cdots\cdots}$$

$$= 1 - \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{45} - \frac{2u^6}{945} - \cdots\cdots$$

und daher

$$\int y \cdot dx = \left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 \left\{u - \frac{u^3}{9} - \frac{u^5}{225} - \frac{u^7}{6615} - \cdots\cdots\right\}.$$

Dieser Ausdruck findet sich in einem Briefe, den Newton am 13. Juli 1676 an Oldenburg schrieb, damit er ihn Leibniz mitteile[1]); in diesem Briefe findet sich auch eine analoge Entwickelung für den Bogen der Quadratrix. Veröffentlicht wurde sie erst viel später von A. Stone[2]) in *A method of fluxions* (London, 1730) und alsbald scharf kritisiert von Joh. Bernoulli, der bemerkte: „Avec tout cela il ne donne pas la quadrature par une expression finie, comme nous en pouvons donner une, quoique les logarithmes y entrent"[3]). Auf welche Formel er hier anspielt, ist mathematisch sicher nicht bekannt. Zugegeben, daß er an einen Ausdruck für die Fläche F gedacht hat, die zwischen der Kurve und der x-Achse gelegen ist (also das Doppelte des Sektors ABI), so bekommt man die von ihm wahrscheinlich angekündigte Formel auf folgende Weise[4]): Die Gleichung (3) zeigt, daß

$$F = 2\int_0^r x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r} \cdot dx$$

ist; setzt man nun $\pi(r - x) = 2ru$, so erhält man

$$F = \frac{4r^2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2u) \operatorname{tg} u \cdot du$$

$$= \frac{4r^2}{\pi^2} \left\{ \left[(2u - \pi) \log \cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos u \cdot du \right\};$$

---

1) *Leibniz ed. Gerhard* I. S. 109. Vgl. auch den *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1736) reproduziert in *Isaaci Newtoni opuscula* I. (Lausanne et Genevae 1744) S. 198.

2) Vgl. *Analyse des infiniment petits par M. Stone,* übers. von Rondet (Paris 1735) S. 70—71.

3) *Remarque sur le livre intitulé* etc. (Joh. Bernoulli Opera IV) S. 177.

4) *Intermédiaire* IV, 1897, S. 14.

und da der integrierte Teil für diese Grenzen gleich Null wird, so ist

$$F = -\frac{8r^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos u \cdot du = \frac{8r^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2}\pi \log 2,$$

und daher ist
$$F = \frac{4r^2 \log 2}{\pi}$$
die gesuchte Formel[1]).

180. Pappus hat eine beachtenswerte stereometrische Erzeugung der Quadratrix entdeckt; sie wird ausgedrückt durch folgenden

Satz: Schneidet man eine flachgängige Schraube[2]) mit einer durch eine Erzeugende gelegten Ebene und projiziert die Schnittkurve auf die Basisebene, so erhält man eine Quadratrix.

Beweis: Die Gleichung der Schraubenfläche und der schneidenden Ebene seien

$$\frac{2\pi z}{p} = \text{arc tg}\frac{y}{x}, \qquad z - \frac{p\alpha}{2\pi} + \lambda\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right) = 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Durch Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen erhält man die der im Satze betrachteten Projektionskurve; diese neue Gleichung lautet:

$$\frac{p}{2\pi}\text{arc tg}\frac{y}{x} - \frac{p\alpha}{2\pi} + \lambda\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right) = 0.$$

Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so wird sie:

$$\varrho = \frac{p\sin 2\alpha}{4\pi\lambda}\,\frac{\alpha - \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)};$$

da sie nun von der Form (1′) ist, so ist der Satz bewiesen.

Es möge noch bemerkt werden, daß, wenn man dieselbe Schraubenfläche (4) durch die Ebene

$$z = x\sin\alpha + y\cos\alpha - k$$

schneidet, man als Projektion die Kurve

$$\varrho = \frac{p}{2\pi}\,\frac{\varphi + \frac{2k\pi}{p}}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

erhält, die offenbar allgemeiner als die Quadratrix ist, da sie mit dieser nur übereinstimmt, wenn $\alpha = \frac{2k\pi}{p}$ und $\lambda = \frac{\sin 2\alpha}{2}$ ist. Die durch sie dargestellten Kurven wurden von M. Chasles[3]) betrachtet,

---

1) Vgl. auch Cesàro-Kowalewski, *Algebr. Analysis und Infinitesimalrechnung* (Leipzig, 1904) S. 793.

2) Benennung nach W. Fiedler, *Darstellende Geometrie,* III. Aufl., II. Bd. (Leipzig, 1885) S. 404.

3) *Aperçu historique* (II. Aufl., Paris 1875) S. 32, Note; vgl. Fouret, *Sur une généralisation de la quadratrice* (Nouv. Ann. Mathém., 3e Sér. V, 1886).

der ihnen den Namen verlängerte oder verkürzte Quadratrix gab. Man kann sie auch erhalten, ohne aus der Ebene herauszugehen, in ähnlicher Weise, wie im Anfange für die gewöhnliche Quadratrix angegeben wurde[1]); wenn man nämlich in der (auf S. 19) angegebenen Erzeugungsweise die Bedingung aufhebt, daß die beiden bewegten Geraden zu Anfang der Bewegung zusammenfallen, so erhält man Kurven, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden können

$$\varrho = a \frac{\omega \pm \alpha}{\sin \omega},$$

die eben verlängerte oder verkürzte Quadratrices sind.

Zum Schlusse sei bemerkt: Wenn man die Gleichung (1) wie folgt schreibt

$$\varrho \frac{\cos \omega}{r} = 1 - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right),$$

so sieht man, daß die Quadratrix zur Familie derjenigen Kurven gehört, deren allgemeine Gleichung

$$\varrho \frac{\cos \omega}{r} = 1 - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{m}{n}}$$

ist; mit ihnen hat sich Pater Caraccioli[2]) beschäftigt.

181. Die mathematische Literatur des 17. Jahrhunderts liefert auch drei geometrische Beiträge zur Quadratur des Kreises in Form von drei neuen Quadratrixkurven. Die ältere und bekanntere ist die Tschirnhausensche Quadratrix[3]), eine Kurve, die durch die Gleichung

$$y = r \sin \frac{\pi x}{2r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

dargestellt wird; setzt man $\frac{y}{r} = Y$, $\frac{\pi x}{2r} = X$, so wird diese Gleichung zu

$$Y = \sin X,$$

die, wie wir (Nr. **176**) gesehen haben, die Sinuskurve ist; **demnach ist die Tschirnhausensche Quadratrix eine der Sinuslinie in engerem Sinne affine Kurve.** Denken wir uns diese Kurve vollständig gezeichnet, so leuchtet ein, daß, wenn für $y = r$, $x = \xi$ wird, $\pi = \frac{2r}{\xi}$ ist; somit ist klar, daß sie eine Quadratrix ist. Dies ist die bemerkenswerteste Eigenschaft der Kurve. Man kann beachten, daß die Fläche zwischen der x-Achse und dem ersten Kurvenbogen, der seine Endpunkte auf dieser Achse hat, gleich ist

1) H. Brocard, *Question de licence* (Mathésis, VI, 1886).

2) *De lineis curvis liber* (Pisis, 1740) S. 181 — 189.

3) *Medicina mentis* (Amstel., 1686) S. 115.

$$\int_0^r r \sin^2 \frac{\pi x}{2r} \cdot dx = \frac{2r^2}{\pi},$$

woraus man dann π ableiten könnte, wenn dieser Wert nicht auf andere Weise bekannt wäre; ähnlich ist das durch Rotation dieser Fläche um Ox erzeugte Volumen gleich

$$\pi \int_0^r r^2 \sin \frac{\pi x}{2r} \cdot dx = \frac{1}{2} \pi r^3;$$

daher würde, nachdem dieses direkt bestimmt ist, in gleicher Weise der Wert π sich daraus ergeben.

Die Tschirnhausensche Quadratrix kann folgendermaßen konstruiert werden: „Gegeben (Taf. I, Figur 7) ein Kreis mit dem Zentrum O, dem Radius r und zwei zueinander senkrechte Radien desselben AO und BO; man nehme an, daß ein Radius OM gleichförmig sich um O drehe, während eine zu OB parallel bleibende Gerade sich ebenfalls gleichförmig von OB aus beginnend verschiebe; man nehme außerdem an, daß beide Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen und zugleich aufhören, so daß, wenn M in B angelangt ist, auch die Gerade mit der Tangente in A an den Kreis zusammenfalle; der Ort des Punktes P, in welchem die bewegte Gerade die durch M zu OA parallel gezogene schneidet, ist eine Tschirnhausensche Quadratrix." Ist nämlich φ der Winkel AOM, OA die x-Achse, so ist

$$y = r \cdot \sin \varphi, \qquad r\varphi : r\frac{\pi}{2} = x : r;$$

daraus folgt

$$y = r \sin \frac{\pi x}{2r},$$

was zu beweisen war.[1])

Ähnlich der Tschirnhausenschen Quadratrix, sowohl durch ihre Gestalt als auch durch ihre Gleichung, ist eine Kurve, die man zu Ehren dessen, der sie zuerst betrachtet hat, die Ozanamsche Kurve nennen könnte.[2]) Ihre Definition ist folgende: „AB sei ein fester Durchmesser eines Kreises, dessen Zentrum O, dessen Radius a sei (Taf. I, Fig. 8); von einem beliebigen Punkte P desselben fälle man das Lot auf AB und trage auf diesem vom Fußpunkte H aus die Strecke HM gleich dem Bogen AP des gegebenen Kreises ab; der Ort des Punktes M ist die Ozanamsche Kurve." Nehmen wir A als Anfang, AB als x-Achse, bezeichnen mit φ den Winkel POB, so

---

1) Diese Erzeugung bietet eine auffallende Ähnlichkeit mit derjenigen der Quadratrix des Dinostratus, von der wir in Nr. 178 ausgegangen sind.

2) Ozanam, *Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques* (Amsterdam 1691) S. 98—99, woselbst als Quelle der *Traité d'algèbre* desselben Verfassers angegeben ist. Vgl. auch Cramer, *Introduction* etc. S. 7.

können wir zur analytischen Darstellung der Kurve die beiden Gleichungen nehmen

$$x = a + a \cos \varphi, \qquad y = a(\pi - \varphi),$$

oder folgende, die sich durch Elimination von φ hieraus ergibt

$$\frac{x}{2a} = \sin^2 \frac{y}{2a};$$

wird zur Abkürzung $2a = b$ gesetzt, und macht man

$$\frac{x'}{b} = \sin \frac{y}{b}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

so erhält man aus der Gleichung der Ozanamschen Kurve

$$\frac{x}{b} = \sin^2 \frac{y}{b},$$

die folgende $$bx = x'^2;$$

man erhält daher unsere Kurve aus der durch die Gleichung (α) dargestellten Sinuskurve (s. Nr. **176**) durch eine einfache geometrische Transformation, die eine Punktkonstruktion der Ozanamschen Kurve liefert, wenn die Sinuskurve gezeichnet vorliegt.

182. Mit einer anderen Quadratrix macht uns die Nr. 260 der *Philosophical Transactions* (vom J. 1700) bekannt, welche eine anonyme Schrift[1]) enthält mit dem Titel *The construction of a Quadratrix to the circle being the curve described by its equable evolution.* Die Kurve, um die es sich handelt, wird in Polarkoordinaten ϱ, ω durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{4\pi r \cos \omega}{\pi - 2\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

dargestellt. Daß sie zur Quadrierung des Kreises dienen kann, ersieht man, wenn man beachtet, daß die Gleichung für $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = 2\pi r$ ergibt; ist daher die Kurve zum wenigsten für die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Werte von ω gezeichnet, so kennt man die Länge des Kreisumfanges mit dem Radius r, und also π. Da für $\omega = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(k \neq 0)$ $\varrho = 0$ wird, so ist klar, daß die Kurve unzählige Male durch

1) Die Herausgeber (C. Hutton, G. Shaw und R. Pearson) des Neudruckes der *Philos. Trans. of the R. Soc. of London* bemerken bei dieser Gelegenheit (IV, London 1809, S. 462): „This paper, which is anonymous, has much of the manner, style and peculiarities of William Jones, Esq., who soon afterwards made so conspicuous figure in the Royal Society and in the mathematical world." Dagegen hat E. Wölffing (*Bibliografia della cocleoide,* Boll. di bibl. e storia III, 1900) unabhängig vom Verfasser nachgewiesen, daß J. Perks der Verfasser der betreffenden Abhandlung ist (vgl. S. 34, Note 1).

den Pol hindurch geht; der Radiusvektor wächst unzählige Male zu einem endlichen Maximum an, usw. Die Kurve steht zur Quadratrix des Nikomedes in sehr einfacher geometrischer Beziehung, was ja erklärlich ist, da sie in gleicher Weise wie jene der Quadratur des Kreises dient. Führen wir nämlich auf die Gleichung (6) die Transformation durch reziproke Radienvektoren aus, welche ihr Zentrum im Pole und als Potenz k^2 hat, so bekommen wir eine Kurve von der Gleichung

$$\varrho = \frac{k^2}{4r} \frac{1 - \frac{2\omega}{\pi}}{\cos \omega};$$

indem nun diese im wesentlichen mit Gleichung (1) identisch ist, so ist bewiesen: **Diese neue Quadratrix ist die Inverse der älteren.**

Setzen wir $\pi - 2\omega = \varphi$ und $2\pi r = a$, so wird Gleichung (6)

$$\varrho = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}, \qquad \qquad (6')$$

und in dieser eleganteren Form wurde sie von mehreren aufgefunden, die die Kurve, mit der wir uns hier befassen, wieder entdeckten, und mit diesen müssen wir uns jetzt beschäftigen.

Vor allem ist von Gregor Fontana folgende Aufgabe gestellt worden[1]): „Auf einer unbegrenzten Geraden MQ ist ein Punkt A gegeben (Taf. I, Fig. 9) und außerhalb derselben ein beliebiger Punkt B; die Gerade AB und der Winkel BAQ sind somit bekannt. Man ziehe BC senkrecht zu AB, sowie die Halbierungslinie AC des Winkels BAQ; in gleicher Weise ziehe man CD senkrecht zu AC und die Halbierungslinie AD des Winkels CAQ; sodann ziehe man DE senkrecht zu AD und wieder die Halbierungslinie AE des Winkels DAQ; in dieser Weise bis ins Unendliche fortfahrend erhält man unzählig viele Punkte, deren letzter Punkt — wir wollen ihn H nennen — auf der Geraden MQ zu liegen kommt. Nachdem dies vorausgeschickt, fragen wir: 1. Wo liegt der Punkt H? 2. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf welcher die Punkte B, C, D, E, $F \ldots\ldots H$ liegen?“ Zur Lösung dieser Aufgabe verfährt Fontana der Hauptsache nach in folgender Weise: Man nehme A als Pol und AQ als Polarachse, bezeichne mit ϱ, φ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve und mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n \ldots$ die den Winkeln $\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2^2}, \frac{\varphi}{2^3}, \ldots \frac{\varphi}{2^n} \ldots$ entsprechenden Radienvektoren. Die angegebene Konstruktion führt dann ersichtlich zu folgenden Beziehungen:

---

1) Siehe den ersten Teil der Abhandlung *Sopra l'equazione d'una curva, sopra la falsità di due famosi teoremi e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccoli* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze II, 1784). Die Polargleichung der Kurve findet man auch in einem Briefe von Malfatti an Lorgna, der das Datum 27. April 1783 trägt (Bullettino bibl. e storia, IX, 1876, S. 438).

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\frac{\varphi}{2}}, \quad \varrho_2 = \frac{\varrho_1}{\cos\frac{\varphi}{2^2}}, \dots \varrho_n = \frac{\varrho_{n-1}}{\cos\frac{\varphi}{2^n}}, \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

aus denen man durch Multiplikation ableitet

$$\varrho_n = \frac{\varrho}{\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\dots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}};$$

aber infolge der bekannten Relationen

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}, \dots$$

$$\sin\frac{\varphi}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{\varphi}{2^n}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2},$$

ergibt sich

$$\sin\varphi = 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\dots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n};$$

daher

$$\varrho_n\sin\varphi = \varrho\varphi\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}.$$

Durch Übergang zum Grenzwerte ergibt sich dann für $n=\infty$

$$\varrho_\infty\sin\varphi = \varrho\varphi.$$

Nennen wir nun die Polarkoordinaten des Punktes B, von welchem die Kurve ausgeht, a und α, so haben wir im besonderen

$$\varrho_\infty\sin\alpha = a\cdot\alpha;$$

dividieren wir die vorige Gleichung durch diese, so bekommen wir

$$\varrho = \frac{a\cdot\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

welche Gleichung die Gestalt von (6′) hat; folglich liegen die Punkte $B, C, D, E \dots H$ auf einer Quadratrix der obigen Art.[1])

1) Die obigen Gleichungen (β) $\varrho_k = \frac{\varrho_{k-1}}{\cos\frac{\varphi}{2^k}}$ können auch in folgende zusammengefaßt werden:

$$\varrho\left(\frac{\varphi}{2^{k-1}}\right) = \varrho\left(\frac{\varphi}{2^k}\right)\cdot\cos\frac{\varphi}{2^k},$$

oder, wenn man $\frac{\varphi}{2^k} = \omega$ setzt,

$$\varrho(2\omega) = \varrho(\omega)\cdot\cos\omega;$$

diese Relation läßt alsbald vermuten, daß die Untersuchung der Gleichung der Kurve, auf welcher die Punkte $B, C, D, \dots$ liegen, vollständig gleichbedeutend ist mit der Bestimmung derjenigen Funktion $\varrho = \varrho(\omega)$, welche der vorigen Funktionsgleichung genügt; aber es ist auch leicht einzusehen, daß in Wirk-

Auf dieselbe Kurve war früher schon Fontana[1]) gestoßen, als er den Ort der Schwerpunkte der Bogen eines gegebenen Kreises, die einen gegebenen Anfangspunkt haben, suchte. Sei O der Mittelpunkt, r der Radius jenes Kreises und A der Anfangspunkt der Bogen; man nehme O als Pol, OA als Polarachse und betrachte einen beliebigen dieser Bogen $AA' = 2r\varphi$ (Taf. I, Fig. 10); dann hat sein Schwerpunkt bekanntlich als Polarkoordinaten bzw. φ und $r\frac{\sin\varphi}{\varphi}$; die Gleichung des fraglichen Ortes ist dann $\varrho = \frac{r\cdot\sin\varphi}{\varphi}$ [2]).

Eine dritte Aufgabe, die durch dieselbe Kurve gelöst wird, wurde privatim von D. Bernoulli und Goldbach[3]) behandelt und öffentlich vorgelegt von Bossut[4]) und darauf von E. Catalan[5]); sie lautet

---

lichkeit so die Frage verallgemeinert worden ist. Ist nämlich eine Funktion $\varrho_0(\omega)$ gefunden, die der Aufgabe genügt, derart also, daß

$$\varrho_0(2\omega) = \varrho_0(\omega)\cdot\cos\omega,$$

so hat man auch

$$\frac{\varrho(2\omega)}{\varrho_0(2\omega)} = \frac{\varrho(\omega)}{\varrho_0(\omega)},$$

daher ist $\frac{\varrho(\omega)}{\varrho_0(\omega)} = f(\omega)$ eine Funktion von ω, die sich nicht ändert, wenn man ω in 2ω verwandelt. Einem Satze von Laplace zufolge ist sie demnach von der Form $\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\ \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right)$ wobei Θ eine beliebige Funktion bedeutet. **Wenn daher $\varrho_0(\omega)$ eine spezielle Lösung der obigen Funktionsgleichung ist, so ist $\varrho_0(\omega)\cdot\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2},\ \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right)$ die allgemeine Lösung derselben.** Die (verschiedentlich bewiesene) Nicht-Äquivalenz der Untersuchung der Gleichung der fraglichen Kurve mit der jener Funktionsgleichung wurde in der Hauptsache von E. Beltrami bemerkt (*Remarques au sujet de la Question* 654, Nouv. Ann. 2e Sér. II, 1863; *Opere matem. di E. B.* I. Bd., Milano, 1907, S. 100).

1) Siehe das zweite Problem in der IX der *Disquisitiones physico-mathematicae nunc primum editae* (Pavia, 1780), ein Problem welches ein besonderer Fall einer Aufgabe ist, womit sich Leibniz beschäftigt hat (s. a. die Abh. *Constructio problematis ducendi rectam quae tangent lineas centrorum gravitatis*; Miscellanea Berolinensia, I, 1710.

2) Diese Erzeugungsweise der Kurve findet sich auch in einer Note von E. Egger im VI. B. der Ann. di Matem. 1864, S. 21—27 und in einer neueren Arbeit von V. Stoeckly, *Bedeutung und Eigenschaften der aus $r = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ entspringenden Kurve* (Arch. Math. Phys. XLVIII, 1868).

3) S. den Brief v. 30. u. 31. Oktober 1726, veröffentlicht von P. H. Fuß in *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle*, II (St. Pétersbourg, 1843) S. 242 und 244.

4) *Calcul intégral* (Paris, An. IX); eine Lösung derselben von Gergonne findet sich im III. B. der *Annales de Matém.*

5) *Manuel des canditats à l'Ecole polytechnique* I. (Paris, 1857) S. 331. Vgl. Azzarelli, *Alcune proprietà di una curva transcendente* (Ann. di Matem. V, 1863), und Rankine, *On the approximate drawing of arcs of given length* (Rep. of Brit. ss.A XXXVII, 1867).

folgendermaßen: „Eine unendliche Zahl von Kreisen berühre eine Gerade in demselben Punkte; man nehme auf jedem derselben, von diesem Punkte ausgehend, einen Bogen von gegebener Länge an; welches ist der Ort der Endpunkte aller dieser Bogen?“ Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir ein Polarkoordinatensystem, das diesen festen Punkt O als Pol hat (Taf. II, Fig. 11) und als Polarachse die gegebene Gerade. Es sei C der Mittelpunkt, r der Radius eines beliebigen von jenen Kreisen, l die gegebene Länge, ϱ, φ die Koordinaten des Endpunktes des Bogens OM, so ist offenbar $l = 2r\varphi$, $\varrho = 2r \sin\varphi$; durch Elimination von r erhält man wiederum $\varrho = l\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ als Gleichung des Ortes der Punkte M.

Später gelangten zu derselben Kurve G. Jung[1]), J. Neuberg[2]) und C. Falkenburg[3]), indem sie von gewissen Betrachtungen der angewandten Mathematik ausgingen[4]); der letztere gab ihr auch, mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit mit einer Schnecke, den Namen Kochleoide, der sich zu halten scheint; daß sie dieselbe Kurve sei, welche die Alten mit diesem selben Namen[5]) bezeichnet haben, ist eine Vermutung von P. Mansion[6]), die man wohl nicht als wahrscheinlich ansehen kann[7]).

Die Gleichung (6′) läßt deutlich zwei ausgezeichnete Punkte erkennen: läßt man nämlich φ ins Unendliche wachsen, so geht ϱ in Null über, folglich ist der Pol ein asymptotischer Punkt; geht hingegen φ in Null über, so erreicht ϱ den Wert a, folglich ist A der vom Pole am weitesten entfernte Punkt und zugleich derjenige kleinster Krümmung.

Um die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkte $M(\varrho, \varphi)$ zu erhalten, benutzen wir die zweite von den oben angegebenen Erzeugungsweisen, sowie die zugehörige Fig. 10; den Winkel, den sie mit dem Radiusvektor bildet, nennen wir ϑ, dann gibt uns (6′)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \varrho : \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varphi \cdot \sin\varphi}{\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Zeichnen wir nun die Schnittpunkte H, N des Radius OM mit der

---

1) *Nuovi teoremi a complemento della regola di Guldin e proprietà della spirale* $r = a\frac{\sin\Theta}{\Theta}$ (Rend. Acc. Lincei 3. Ser. VII, 1883).

2) *Mathésis* V, 1885, Question 257.

3) *Die Cochleoïde* (Arch. Math. Phys. LXX, 1883), nach Mitteilungen von J. Neuberg.

4) S. auch Cesàro-Kowalewski, *Alg. Analysis und Infinitesimalrechnung* S. 807.

5) κοχλοειδὴς γραμμή; s. Pappus.

6) *Mathésis* V, 1885, S. 92.

7) Vgl. F. Rudio, Mathésis, III. Reihe, VII, 1907, S. 261.

Geraden AA' und mit der Peripherie des gegebenen Kreises und bezeichnen den Winkel HMA' mit λ, so haben wir

$$OH = r\cos\varphi, \quad AH = HA' = r\sin\varphi,$$

$$MH = OH - OM = r\cos\varphi - r\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{A'H}{MH} = \frac{\varphi\cdot\sin\varphi}{\varphi\cdot\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Dies zeigt uns, daß $\lambda = \vartheta$, und daß also die Gerade $A'M$ die Tangente in M an die Kochleoide ist; um also die Tangente in irgend einem Punkte M zu konstruieren, genügt es, M mit A', dem zu A in bezug auf OM symmetrischen Punkte, zu verbinden. Da nun die Lage des Punktes A' nur von dem Punkte A und der Geraden OM abhängt, so kann man mit E. Cesàro[1]) folgern: **Jede vom Pole O einer Kochleoide ausgehende Gerade schneidet die Kurve in unzählig vielen Punkten, die entsprechenden Tangenten konvergieren in einen Punkt A', dessen Ort der Kreis um O mit dem Radius OA ist**; umgekehrt: **Zieht man von einem beliebigen Punkte A' dieses Kreises die Tangenten an die Kochleoide, so liegen deren Berührungspunkte auf der Halbierungslinie des Winkels AOA'.** Diese Punkte sind die Schwerpunkte der unzählig vielen Bogen dieses Kreises, die zu Endpunkten A und A' haben.

Diese Schlüsse können in folgender Weise bestätigt und erweitert werden. In kartesischen Koordinaten wird die Kochleoide durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - ay = 0,$$

folglich lautet die Gleichung der sie im Punkte (x, y) berührenden Geraden

$$[2axy - y(x^2+y^2)]X + [a(y^2-x^2)] + x(x^2+y^2)]Y = ay(x^2+y^2).$$

Sind nun X, Y gegeben, so stellt diese Gleichung eine Kurve dritter Ordnung dar, die durch den Punkt mit diesen Koordinaten hindurchgeht; folglich: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene an die Kochleoide gezogenen Tangenten liegen auf einer zirkularen Kurve dritter Ordnung, die durch diesen Punkt hindurchgeht und den Pol als Doppelpunkt hat.** Die Kochleoide gehört also (vgl. Nr. **174**) einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$. Führen wir Polarkoordinaten ein und nehmen an, daß der Punkt P in der Entfernung a vom Pole liegt, setzen also

---

1) *Quelques propriétés de la courbe représentée par* $u = R\frac{\sin\omega}{\omega}$ (Nouv. Corr. math. IV, 1878).

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega, \qquad X = a \cos \alpha, \quad Y = a \sin \alpha,$$

so wird die vorige Gleichung zu

$$a \sin (2\omega - \alpha) = \varrho [\sin \omega + \sin (\omega - \alpha)]$$

oder

$$\sin \left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right) \left\{a \cos \left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right) - \varrho \cos \frac{\alpha}{2}\right\} = 0;$$

die Kurve dritter Ordnung des allgemeinen Falles zerfällt alsdann in die Gerade $\omega = \frac{\alpha}{2}$ und den Kreis $\varrho \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos \left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)$, der durch die beiden ausgezeichneten Punkte der Kochleoide geht und seinen Mittelpunkt auf der Halbierungslinie des Winkels POA hat.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß man die Kochleoide auch als Projektion einer Raumkurve erhalten kann[1]); es besteht nämlich folgender

Satz: **Die Projektion einer gewöhnlichen Zylinderschraubenlinie von einem ihrer Punkte auf eine zur Achse senkrechte Ebene ist eine Kochleoide.**

Beweis. Betrachtet man die durch

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = h\varphi$$

dargestellte Kurve und projiziert sie von dem Punkte (φ_0) auf die Ebene $z = z_0$, so ist auch die Orthogonalprojektion der so entstandenen Kurve auf die xy-Ebene gleich der fraglichen Kurve und wird dargestellt durch

$$\frac{x - R \cos \varphi_0}{R(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} = \frac{y - R \sin \varphi_0}{R(\sin \varphi - \sin \varphi_0)} = \frac{z_0 - h\varphi_0}{h(\varphi - \varphi_0)}.$$

Nun folgt hieraus

$$\frac{y - R \sin \varphi_0}{x - R \cos \varphi_0} = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi + \varphi_0}{2},$$

$$(x - R \cos \varphi_0)^2 + (y - R \sin \varphi_0)^2 = \left\{ R \frac{z_0 - h\varphi_0}{h} \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{\frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right\}^2.$$

Verlegen wir nun den Anfang nach dem Punkte $(R \cos \varphi_0, R \sin \varphi_0)$ und nennen $\bar{x}, \bar{y}$ die neuen Koordinaten des Punktes (x, y) so haben wir

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \qquad \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = R \frac{z_0 - h\varphi_0}{h} \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{\frac{\varphi - \varphi_0}{2}},$$

oder wenn wir die üblichen Polarkoordinaten einführen

$$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \qquad \varrho = \frac{z_0 - h\varphi_0}{h} \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{\frac{\varphi - \varphi_0}{2}}.$$

---

1) Vgl. *Mathésis,* 3. Reihe I, 1901, S. 109 Question 1273 (H. Brocard).

Aus der 1. Gleichung folgt

$$\omega = \frac{\varphi + \varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2}, \text{ oder } \omega + \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \frac{\varphi - \varphi_0}{2}.$$

Lassen wir nun die Polarachse um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi_0$ sich drehen und bezeichnen die neue Anomalie mit $\tilde{\omega}$, so ist

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \omega,$$

und daher

$$\varrho = R\,\frac{z_0 - h\varphi_0}{h}\,\frac{\sin\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}},$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Schließlich wollen wir noch zeigen, wie eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie zu einer Kurvengattung führt, der auch die Kochleoide angehört. Betrachten wir nämlich die Schraubenfläche $y = x \cdot \operatorname{tg}\frac{z}{h}$, so wird ihre Berührungskurve mit der Tangentialebene im Punkte $O(X, Y, Z)$ dargestellt durch ein System von Gleichungen, gebildet aus der vorigen und der folgenden

$$-(X - x)\frac{y}{x} + (Y - y) - \frac{x^2 + y^2}{hx}(Z - z) = 0.$$

Durch Elimination von z erhält man die Gleichung der Projektion jener Berührungskurve auf die xy-Ebene, nämlich

$$Yx - Xy = \frac{x^2 + y^2}{h}\left(Z - h \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right),$$

oder beim Übergang zu Polarkoordinaten und Einsetzung von $X = a\cos\alpha$, $Y = a\sin\alpha$

$$\varrho = \frac{ah\sin(\alpha - \omega)}{Z - h\omega}.$$

Ist nun insbesondere $Z = h\alpha$, mit anderen Worten, liegt der Punkt O auf der Schraubenfläche selbst, so wird diese Gleichung zu

$$\varrho = \frac{h\sin(\alpha - \omega)}{\alpha - \omega}$$

und stellt dann eine Kochleoide dar. Folglich: **Wird eine flachgängige Schraube von einem ihrer Punkte aus beleuchtet und projiziert man die Schattengrenze auf eine zur Achse senkrechte Ebene, so erhält man eine Kochleoide**[1], und diese bleibt zu sich kongruent, wenn der Punkt sich auf der Fläche bewegt.

183. Die Hyperbel ist nicht, in gleicher Weise wie der Kreis, algebraisch quadrierbar; will man also ihre Fläche berechnen, so muß man zu transzendenten Funktionen seine Zuflucht nehmen; nun ist

1) G. Fouret, *Sur les faisceaux ponctuels planes de caractéristique v, ayant un point principal multiple d'ordre v.* (Bull. Soc. Math. France, VII, 1878/79.)

wohl klar, daß, während eine Kreisquadratrix wenigstens einen Punkt enthalten muß, von dem eine kartesische Koordinate oder der Radiusvektor ein Vielfaches (ganzes oder gebrochenes) von π ist, für eine Hyperbelquadratrix, eine der Koordinaten eine logarithmische Funktion der anderen sein muß. Von dieser Art ist die Kurve, für welche die Summe der Tangente und der Subtangente konstant ist. Deren Differentialgleichung ist nämlich

$$\sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} + y\frac{dx}{dy} = a,$$

oder

$$dx = \frac{a^2 - y^2}{2ay}dy;$$

durch Integrieren findet man alsbald

$$x = -\frac{y^2}{4a} + \frac{a}{2}\log\frac{y}{b}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wo b eine beliebige Konstante ist. Es ist klar, daß, wenn diese Kurve gezeichnet ist, man $\log\frac{y}{b}$ in rationalen Funktionen von y und dem zugehörigen x hat. Nun hat Perks 1706 ein geistreiches Instrument erdacht[1]), um in kontinuierlichem Zuge die Kurve (7) zu zeichnen; wir wollen uns mit der Beschreibung desselben nicht aufhalten, ebenso wollen wir uns hier nicht über die Sätze verbreiten, welche Colson[2]), der bekannte Professor an der Universität zu Cambridge, über diese Hyperbelquadratrix aufgestellt hat[3]). Bemerken wollen wir jedoch, daß viel später Paul Fuß[4]) auf diese Kurve gestoßen ist,

1) *The construction and properties of a new Quadratrix to the hyperbola* (Phil. trans. No. 306, 1706; Bd. V, S. 302 des Neudrucks). — Folgender Umstand möge hier bemerkt werden: In der Einleitung seiner Schrift erwähnt Perks "the old quadratrix of Dinostratus by which the circle and the ellipse are squared" und setzt hinzu „another sort for the same purpose, I inserted in the Transactions for the same year." Nun ist die einzige Abhandlung, auf die man jenen Hinweis beziehen kann, die anonyme, die wir anfangs von Nr. 182 (S. 26) zitiert haben; somit scheint (eine gleichzeitige Bemerkung von E. Wölffing und vom Verf.) die von den Herausgebern des Neudrucks der Phil. trans. (s. Note 1 auf S. 26) gemachte Zuweisung an Jones unrechtmäßig zu sein.

2) S. die eben zitierte Abhandlung v. Perks.

3) Wir beschränken uns darauf, nur das folgende Beispiel anzuführen: Ist R der Krümmungsradius, T die Länge der Tangente, so findet man leicht:

$$R = \frac{(a^2+y^2)^2}{4a^2y}, \quad T^2 = \frac{(a^2+y^2)^2}{4a^2},$$

daher erfreut sich die Kurve der eleganten Eigenschaft, die durch die Beziehung $R : T = T : y$ wiedergegeben wird. Ferner: Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an die Kurve gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve 3ter Ordnung, die durch jenen Punkt geht; dagegen sind die Berührungspunkte der Tangenten einer bestimmten Richtung α auf die beiden Geraden $y = a(1 \pm \operatorname{tg}\alpha)$ verteilt; die Kurve ist daher panalgebraisch.

4) S. die vierte von den in der Abh. *Quantum differat longitudo arcus ab asymptota utraque in infinitum extensa* behandelten Problemen (Mém. Acad. St. Pétersbourg IX, 1824).

und eine sehr schöne Eigenschaft derselben entdeckt hat, deren Beweis wir nun darlegen wollen.

Zu dem Zwecke beachten wir zunächst, daß, weil die Konstante b keinen Einfluß auf die Lage der Kurve zur y-Achse hat, man bei geeigneter Wahl derselben, die Gleichung (7) durch folgende ersetzen kann

$$x = \frac{a}{2}\log\frac{y}{a} + \frac{a^2 - y^2}{4a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Wenn wir nun den Anfang und den positiven Sinn des Bogens s der Kurve passend wählen, so finden wir leicht

$$s = \frac{a}{2}\log\frac{y}{a} - \frac{a^2 - y^2}{4a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Gleichungen (8) und (9) liefern dann

$$x - s = \frac{a^2 - y^2}{2a};$$

da (8) erkennen läßt, daß $\lim\limits_{x=\infty} y = 0,$

so schließen wir $\lim\limits_{x=\infty}(x - s) = \frac{a}{2}.$

Die Differenz zwischen dem unbegrenzten Kurvenbogen der Hyperbelquadratrix und der Asymptote ist eine endliche Größe.

Zum Schlusse soll bewiesen werden, daß die Hyperbelquadratrix ein Spezialfall derjenigen Kurven ist, die folgendes Problem lösen[1]): „Gegeben eine Gerade und ein Punkt A auf ihr; man soll durch diesen eine Kurve ziehen derart, daß, wenn man in einem beliebigen Punkte M derselben eine Tangente zieht, der Schnitt T derselben mit der Geraden so bestimmt sei, daß $AT = n \cdot \operatorname{arc} AM$, wo n ein gegebenes Verhältnis ist." Nehmen wir die Gerade als x-Achse, nennen a die Ordinate des Punktes A, s den Bogen und p das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$, so führt das Problem zu folgender Relation

$$ns = x - \frac{y}{p} - a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Differenzieren wir diese, so bekommen wir

$$n \cdot ds = \frac{y \cdot dp}{p^2};$$

und da nun $ds = \frac{dy\sqrt{1+p^2}}{p}$, so können wir auch schreiben

$$n\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}},$$

daher ist, wenn wir integrieren

1) F. Fuß, *De curva quadam transcendente ejusque proprietatibus* (Mém. Acad. St. Pétersbourg VIII, 1822).

$$\left(\frac{y}{a}\right)^n = \frac{p}{1+\sqrt{1+p^2}},$$

wo a die Integrationskonstante ist. Aus dieser leiten wir den Wert von $p = \frac{dy}{dx}$ ab und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a^n y^n}{a^{2n} - y^{2n}},$$

oder auch
$$2a^n \cdot dx = a^{2n}\frac{dy}{y^n} - y^n \cdot dy \quad \text{. . . . . . . (11)}$$

Nehmen wir vor allem an, daß $n \neq 1$, so finden wir durch Integrieren

$$2a^n x = -\frac{a^{2n}}{(n-1)y^{n-1}} - \frac{y^{n+1}}{n+1} + \text{Const.},$$

und da die Kurve durch den Punkt A hindurchgehen soll, so ist die Konstante bestimmt, und die vorige Gleichung wird

$$x = \frac{a(y^{n-1} - a^{n-1})}{2(n-1)y^{n-1}} + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{2(n+1)a^n}, \quad \text{. . . . (12)}$$

die eine algebraische oder interszendente Kurve darstellt, je nachdem n rational ist oder nicht. — In dem ausgeschlossenen Falle $n = 1$ gibt (11)

$$x = \frac{a}{2}\log y - \frac{y^2}{4a} + \text{Const.};$$

bestimmen wir die Konstante in der Weise, daß die Kurve durch den Punkt A geht, so finden wir

$$x = \frac{a}{2}\log\frac{y}{a} + \frac{a^2 - y^2}{4a}$$

als Gleichung der gesuchten Kurve; da diese mit Gleichung (8) übereinstimmt, so ist die obige Behauptung bewiesen.

Viertes Kapitel.

Die Archimedische Spirale.

184. Wenn eine Gerade sich um einen festen Punkt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit dreht, und ein beweglicher Punkt diese Gerade vom festen Punkte ausgehend ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, so beschreibt der bewegte Punkt eine Kurve, die durch den Anfangspunkt der Bewegung geht und unzählige Umgänge um den festen Punkt macht. Sie heißt die Archimedische Spirale, weil man die Entdeckung derselben, sowie die ihrer wichtigsten Eigenschaften, jenem berühmten Geometer von Syrakus ver-

dankt[1]). Es ist einleuchtend, daß, wenn man den festen Punkt als Pol und die Anfangslage der beweglichen Geraden als Polarachse nimmt, die Polargleichung der Kurve lautet

$$\varrho = a\omega, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo a eine Konstante ist, die wir als positiv annehmen können. Lassen wir ω die Werte von 0 bis $+\infty$ durchlaufen, so geht auch ϱ von 0 bis $+\infty$; wir erhalten so einen Zweig der Kurve, den man gewöhnlich als die ganze Archimedische Spirale bildend ansieht; aber, wenn wir unserer Anschauungsweise entsprechend (s. I. Bd., S. 137, Fußnote 2) dem ω und ϱ auch negative Werte erteilen, so erhalten wir den zweiten Zweig, der symmetrisch zu dem ersten in bezug auf die sekundäre Polarachse ist; auf dieser schneiden sich die beiden Zweige, wodurch auf dieser unzählig viel Doppelpunkte der Kurve bestimmt werden (Taf. II, Fig. 12)[2]). — Wechseln wir das Vorzeichen von a in Gl. (1), so erhalten wir eine rechtsgewundene Spirale, die zu der vorigen in bezug auf die Polarachse symmetrisch ist.

---

1) S. das Werk *Περὶ ἑλίκων*. — In dem Einleitungsbriefe erzählt Archimedes, daß er früher dem Konon den Wortlaut mehrerer Sätze über die Spirale mitgeteilt habe; dies veranlaßte Pappus, die Erfindung dieser Kurve dem Konon zuzuschreiben (*Pappus*, herausg. v. Hultsch, S. 234), und dieser Irrtum ist von vielen wiederholt worden (vgl. G. Loria, *Le scienze esatte* etc. Lib. II, Nr. 40). Was den Versuch Sédillots angeht (*De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon*, Bull. di Bibl. e Storia VI, 1873, oder C. R. LXXV, 1872), die Erfindung dieser Spirale auf Plato zurückzuführen, so scheint uns dieser verfehlt, weil die Spirale, auf die im Timaeus hingewiesen wird, nicht geometrisch definiert ist.

2) Von diesen beiden die Spirale bildenden Zweigen kannten die Alten nur den einen. Die älteste Erwähnung des anderen Zweiges [ich drücke mich so aus, weil auch in dem Werke von S. Angelis, *De infinitorum spiralium spatiorum mensura* (Venetiis, 1660) und in *De lineis curvis liber* (Pisis 1740) von P. Caraccioli von der Spirale nur ein einziger Zweig gezeichnet ist] findet sich in der *Introductio in analysin infinitorum* (II, Lausannae 1748, S. 301—302) von Euler. Später begegnen wir ihm in den *Elementi di algebra* von Pietro Paoli (Pisa 1798, I, S. 312), in der *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen* von Magnus (Berlin 1833, S. 313—14), in dem *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (Paris, 1841) von Cournot, in den *Leçons de géométrie analytique* von Briot und Bouquet (9. Aufl. Paris 1878, S. 349), in der *Analytischen Geometrie* von R. Baltzer (Leipzig, 1882) S. 153 und in der *Analytischen Geometrie* von M. Simon (Leipzig, 1900, S. 23 u. 24). Richtig sind die Verhältnisse auch dargelegt in der hübschen Monographie von A. Michalitschke, *Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale*, 2. Aufl. (Prag, 1891) S. 6. In vielen anderen sehr verbreiteten Büchern jedoch ist die Archim. Spirale immer noch als halbe Kurve gezeichnet: s. *Encyclopédie méthodique*, Planche IV der *Géométrie* Fig. 39; Montferrier, *Dictionnaire des sciences math.* Planche LVII, Fig. 12; Serret, *Calcul différentiel* (2. Aufl. Paris 1879) S. 359; Haas, *Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung*, III. Teil (Stuttgart, 1894) S. 22 u. 180, usw.

Die Archimedische Spirale unterscheidet sich nicht von der spiralis quadrantis von Bartolomäus Souvey (lat. Soverus)[1]; diese wird nämlich von einem Punkte erzeugt, der gleichförmig den Durchmesser eines Kreises durchläuft, während dieser eine Rotation von 90^0 ausführt. Die Kurve ist also durch eine Gleichung vom Typus (1) darstellbar; ist R der Radius des gegebenen Kreises, so muß für $\omega = \frac{\pi}{2}$ $\varrho = R$ werden, also gleich $\frac{2R}{\pi}$, und Gleichung (1) wird dann

$$\varrho = \frac{2R\omega}{\pi},$$

welche Gleichung im wesentlichen mit (1) identisch ist.

Die Gleichung (1) lehrt uns beliebig viele Punkte der Archimedischen Spirale bestimmen, wenn nur der Kreis mit dem Radius a rektifiziert ist; umgekehrt also, wenn wir die Spirale in kontinuierlichem Zuge zeichnen könnten, würde man jeden beliebigen Kreis rektifizieren können; da dies nun tatsächlich sich mit Hilfe eines sehr einfachen Instrumentes ausführen läßt[2], so ist klar, daß die Archimedische Spirale eine Quadratrix ist; einer Bestätigung dessen werden wir alsbald begegnen. — Indessen wollen wir bemerken, daß, wenn wir zu kartesischen Koordinaten übergehen, die Gleichung (1) wird

$$\sqrt{x^2+y^2} - a \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = 0; \qquad (2)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Kurve lautet demnach

$$(X-x)\left\{x\sqrt{x^2+y^2} + ay\right\} + (Y-y)\left\{y\sqrt{x^2+y^2} - ax\right\} = 0;$$

machen wir diese rational, so erhalten wir

$$(x^2+y^2)\left\{Xx + Yy - (x^2+y^2)\right\}^2 = a^2(Yx - Xy)^2.$$

Da nun diese Gleichung, wenn X, Y gegeben sind, eine Kurve sechster Ordnung darstellt, die den Punkt mit den Koordinaten X, Y zum Doppelpunkt hat, so **gehören die Berührungspunkte der von einem Punkte an eine Archimedische Spirale gezogenen Tangenten einer Kurve sechster Ordnung an, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist.** Dies genügt zum Nachweise (vgl. Nr. **174**), daß jede Archimedische Spirale einem Systeme angehört mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$. Die Tangenten von einer bestimmten Neigung α gegen die Polarachse hingegen haben ihre Berührungspunkte mit der Spirale auf einer Kurve liegen, die die Polargleichung $\varrho = a \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \omega)$ hat, also auf einer Kappa-Kurve (I. Bd. S. 196) und diese verändert bei Variation von α wohl ihre Lage, aber nicht ihre Größe.

1) Vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II. 2. Aufl., Leipzig, 1900) S. 832.

2) Clifford, *Il senso comune nelle scienze esatte* (Milano, 1886) S. 197—99.

185. Hat die bewegliche, die Spirale erzeugende Gerade n Umläufe vollendet, so ist der bewegliche Punkt vom Pole um eine Länge $ON = 2n\pi a$ entfernt; der Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius ON wird von Archimedes, der n^{te} Kreis, genannt; die Länge seiner Peripherie beträgt $4n\pi^2 a$. Nennen wir anderseits den Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet μ, so liefert uns die bekannte Formel

$$\operatorname{tg} \mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}$$

im vorliegenden Falle $\operatorname{tg} \mu = a\omega : a = \omega.$

Demnach ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den der Radiusvektor ON mit der Tangente in seinem Endpunkte bildet $= 2n\pi$. Dies beweist, daß die im Pole zur Polarachse errichtete Senkrechte die genannte Tangente in einem Punkte trifft, dessen Abstand vom Pole $= 2n\pi a \cdot 2n\pi = 4n^2\pi^2 a$, d. i. gleich dem n-fachen der Peripherie des ‚n^{ten} Kreises'. Daraus ergibt sich dann, daß, wenn man die Tangente in N an die Spirale ziehen kann, man auch den Kreis rektifizieren kann und umgekehrt; damit haben wir eine neue — von Archimedes angegebene — Art, die besprochene Spirale als Quadratrix zu betrachten.

Ist S_t die Polarsubtangente, so hat man $S_t = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{\varrho^2}{a}$; wenn man nun den Kreis um O beschreibt, der durch den Punkt $M(\varrho, \omega)$ der Spirale geht, so ist die Länge seines zwischen der Polarachse und der Geraden OM gelegenen Bogens $= \varrho\omega = \frac{\varrho^2}{a} = S_t$; daraus ergibt sich ein Verfahren, den Endpunkt der Subtangente zu finden und somit die Tangente zu konstruieren. Es ist dies das älteste Beispiel der Konstruktion einer Tangente mit Benutzung der Subtangente und sollte deswegen hier bemerkt werden. Dieser Konstruktion der Tangente ist jedoch eine andere vorzuziehen, die sich aus der Bemerkung ergibt, daß bei der Archimedischen Spirale $\varrho = a\omega$ die Subnormale $\left(S_n = \frac{d\varrho}{d\omega}\right)$ konstant, und zwar gleich a ist.

Es sei E_n die vom Radiusvektor beschriebene Fläche, wenn ω zwischen $2(n-1)\pi$ und $2n\pi$ variiert, und C_n die Fläche des ‚n^{ten} Kreises', dann hat man

$$E_n = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega=2(n-1)\pi}^{\omega=2n\pi} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{a^2}{2}\int\limits_{\omega=2(n-1)\pi}^{\omega=2n\pi} \omega^2 \cdot d\omega = \frac{a^2}{6}[8n^3\pi^3 - 8(n-1)^3\pi^3]$$

$$= \frac{4\pi^3 a^2}{3}(3n^2 - 3n + 1),$$

und

$$C_n = 4n^2\pi^3 a^2;$$

daher ist $$\frac{E_n}{C_n} = \frac{2\pi n a \cdot 2(n-1)\pi a + \frac{1}{3}(2\pi a)^2}{(2 n \pi a)^2},$$

welche Formel besagt: **Die zwischen der n^{ten} Windung der Archimedischen Spirale und der Anfangslage der bewegten Geraden gelegenen Fläche verhält sich zur Fläche des ‚n^{ten} Kreises' wie das Produkt der Peripherien des $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Kreises, vermehrt um ein Drittel des Quadrates der Peripherie des ersten Kreises zum Quadrate der Peripherie des n^{ten} Kreises.** Aus dem vorigen Werte von E_n leitet man ab

$$E_n - E_{n-1} = 8(n-1)\pi^3 a^2;$$

im speziellen $$E_2 - E_1 = 8\pi^3 a^2,$$

daher ist $$\frac{E_n - E_{n-1}}{E_2 - E_1} = n - 1,$$

eine Beziehung, die leicht in Worte zu kleiden ist.

Betrachten wir nun die Fläche S des gemischtlinigen Dreiecks, das als Seiten einen Bogen der Spirale und die beiden Radienvektoren ϱ_1 und $\varrho_2 > \varrho_1$ hat, deren Endpunkte bzw. M_1 und M_2 seien. Man findet leicht

$$S = \frac{(\varrho_2{}^2 + \varrho_2 \varrho_1 + \varrho_1{}^2)(\varrho_2 - \varrho_1)}{6a};$$

sind dann S_1 und S_2 die Flächen der von denselben Radienvektoren und den durch M_1 bzw. M_2 gehenden Bögen begrenzten Kreissektoren, so ist

$$S_1 = \frac{\varrho_1{}^2(\varrho_2 - \varrho_1)}{2a}, \qquad S_2 = \frac{\varrho_2{}^2(\varrho_2 - \varrho_1)}{2a}$$

und daher

$$A' = S - S_1 = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)^2(2\varrho_1 + \varrho_2)}{6a}, \qquad A'' = S_2 - S = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)^2(\varrho_1 + 2\varrho_2)}{6a};$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\varrho_1 + \frac{2}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_1 + \frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)}, \qquad \frac{S}{S_2} = \frac{\frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)^2 + \varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2{}^2};$$

diese Gleichungen drücken algebraisch einige von Archimedes entdeckte Sätze aus.

Überblicken wir das hier Dargestellte, so sehen wir, daß Archimedes zwei von den eine jede Kurve betreffenden drei Fundamentalproblemen für seine Spirale gelöst hat, nämlich die Tangente zu ziehen und die Quadratur, dagegen das Problem der Rektifikation unberührt gelassen hat. Diese wichtige Aufgabe wurde nicht nur von keinem der Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger des Archimedes gelöst, sondern erst nach neunzehn Jahrhunderten in Angriff genommen und überwunden, als Bonaventura Cavalieri[1]), Gregor von St. Vincen-

1) *Geometria indivisibilis* (Bononiae, 1635) Lib. VI.

tius[1]), Roberval, B. Pascal[2]) und Fermat[3]) unabhängig voneinander entdeckten, daß das Problem der Rektifikation einer Archimedischen Spirale identisch sei mit dem analogen für eine Parabel. Um diese Behauptung exakt nachzuweisen, betrachten wir die beiden Kurven

$$y^2 = 2px \quad . \quad . \quad (3), \qquad \varrho = \frac{a\omega}{2\pi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

nennen deren Bogen bzw. s_p und s_s und haben dann

$$ds_p = \frac{1}{p} dy \sqrt{p^2 + y^2}, \qquad ds_s = \frac{2\pi}{a} d\varrho \sqrt{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + \varrho^2}; \quad . \quad . \quad (5)$$

daraus geht hervor, wenn man

$$p = \frac{a}{2\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzt, daß der Bogen der Parabel (3), vom Scheitel bis zum Punkte mit der Ordinate $y = k$ gerechnet, gleich dem Bogen der Spirale (4) ist, gerechnet vom Pol bis zum Punkte mit dem Radiusvektor $\varrho = k$. Die Beziehung (6) zwischen den Konstanten a, p kann man in der Weise ausdrücken, daß man sagt: Bei der betreffenden Parabel muß der Punkt, welcher als Ordinate den Radius des ersten Kreises der Spirale hat, den halben Umfang dieses Kreises als Abszisse haben. — Integrieren wir die erste der Gleichungen (4) unter der Bedingung, daß der Scheitel der Parabel der Bogenanfang sei, so finden wir

$$s_p = \frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

diese Formel erklärt, was schon einer der Gründer der Akademie der Wissenschaften in Paris, Adrian Azout, beweisen konnte, daß „estant donnée une droite égale à une parabole ou à une spirale, la quadrature de l'hyperbole est donnée et contra“[4]). Wir fügen noch hinzu, 1. daß, wenn man hyperbolische Funktionen einführt, indem man

---

1) *Opus geometricum* (Antwerpiae, 1647).

2) S. die Abhandl. *Egalité des lignes spirales et paraboliques* (Oeuvres de B. Pascal V, La Haye 1779, S. 441), die nach der Behauptung C. Henrys (Bull. Bibliogr. e Storia etc. XVII, 1885) auf das Jahr 1659 zurückgeht. In dem *Lettre de B. Detonville,* der dieser Schrift vorausgeht, wird gesagt, daß Roberval zu demselben Schlusse gelangt sei, „mais sans en donner de démonstration autrement que par les mouvements dont on voit quelque chose dans de Livre des Hydrauliques du R. P. Mersenne.“

3) S. einen an Carcavi mutmaßlich 1659 geschriebenen Brief (*Oeuvres de Fermat* II, S. 438—440).

4) Vgl. einen Brief von C. Mylon an Huygens vom 31. Januar 1659 (*Oeuvres de Huygens* II, S. 334).

$$y = p.\ \mathfrak{Sin}\,\varphi$$

setzt, die Gleichung (7) folgende einfache und elegante Form annimmt[1])

$$s_p = \frac{p}{4}(\mathfrak{Sin}\,2\varphi + 2\varphi). \quad \ldots\ldots \quad (7')$$

und 2. daß zwei Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes in einem beliebigen Punkte der Archimedischen Spirale von L. Burmester[2]) und H. Wiener[3]) angegeben wurden.

186. Pappus hat bemerkt[4]), daß die Archimedische Spirale auf eine ähnliche Weise wie die Quadratrix des Dinostratus (s. S. 23) sich konstruieren ließe; er sagt: **Die Orthogonalprojektion der Schnittlinie einer flachgängigen Schraube mit einem Rotationskegel, dessen Scheitel auf der Achse liegt, auf die Grundfläche des Kegels selbst besteht aus zwei gleichen Archimedischen Spiralen.** Um dies zu beweisen, beachten wir, daß die beiden Flächen, von denen Pappus spricht, durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden können:

$$\frac{2\pi z}{p} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z - c)^2.$$

Durch Elimination von z erhält man folgende Gleichung für die Projektionskurve:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{p\,\omega}{2\pi} - c\right)^2;$$

gehen wir zu Polarkoordinaten über, so wird diese

$$\pm\varrho = \frac{ap}{2\pi c}\left(\frac{2\pi c}{p} - \omega\right),$$

die tatsächlich zwei Archimedische Spiralen darstellt.

Während diese stereometrische Erzeugung der Kurve ein ausschließlich theoretisches Interesse bietet, gibt es eine andere, von Clairaut entdeckte[5]), die sich für die Praxis als sehr nützlich erweist, indem sie die Idee für ein neues Instrument, um die Kurve in kontinuierlichem Zuge zu zeichnen, liefert[6]). Zu dieser neuen

---

1) J. Hoüel, *Cours de Calcul infinitésimal* II. (Paris, 1879) S. 33; S. Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S., 1881) S. 241.

2) *Lehrbuch der Kinematik* (Leipzig, 1884) S. 157.

3) Arch. Math. Phys., III. Reihe, XV. Bd., 1909, S. 107.

4) *Pappus,* herausg. v. Hultsch, S. 262.

5) S. die Abh., betitelt: *De la spirale d'Archimède décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la cycloïde, et de quelques autres courbes du même genre* (Mém. Acad. Sciences, Année MDCCXL, Paris 1742).

6) Über dieses Instrument sehe man Michelotti, *Recherches sur les moyens les plus convenables pour la division et la subdivision pratique des arcs circulaires* (Mém. Acad. Turin VI, 1792—1800) gedruckt 1801. Es sei bemerkt, daß sich ein Apparat, um die Archimedische Spirale mechanisch zu zeichnen, in einer Jugendarbeit von Ch. Huygens beschrieben findet (*Oeuvres de Huygens,* XI, La Haye, 1908, S. 216).

Erzeugung gelangte der französische Geometer, indem er aufsuchte die Spurlinie eines mit einem festen Kreise unveränderlich verbundenen Griffels, wenn die Ebene des Kreises sich so bewegt, daß sie fortwährend mit einer festen Geraden r auf dem Kreise rollt. Um die Gleichung dieses Ortes zu finden, betrachten wir den Kreis $BMEI$ (Taf. II, Fig. 13) und zeichnen ihn auch in der bewegten Ebene in derjenigen Lage, bei welcher er die Gerade r im Fußpunkte A des von dem Spurpunkt S des Griffels auf die Gerade r gefällten Lotes berührt. Sei BE die Lage, welche der Durchmesser AS in der Lage $BMEI$ annimmt. Wir nehmen diesen Durchmesser als Polarachse und seinen Mittelpunkt C als Pol; um nun die Gleichung des gesuchten Ortes zu bekommen, wird es genügen, eine Beziehung zwischen dem Radiusvektor $CS = \varrho$ und dem Winkel $SCE = \omega$ aufzustellen. Wir nennen daher den Radius des festen Kreises a, ziehen durch C die Gerade IM senkrecht zu r und durch S zu r die Parallele SH; CH, die Differenz zwischen SA und a, ist dann eine gegebene Größe, die wir mit b bezeichnen wollen. CS möge den festen Kreis in F schneiden. Alsdann haben wir

$$\text{arc } BM = AM = SH = \sqrt{\overline{CS}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{\varrho^2 - b^2} = \text{arc } IE.$$

$$\sphericalangle SCH = \sphericalangle \operatorname{tg} \frac{SH}{CH} = \sphericalangle \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b};$$

$$\text{arc } FI = a \text{ arc tg} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{\varrho}; \qquad \text{arc } FE = a\omega.$$

Und da
$$\text{arc } FE = \text{arc } FI + \text{arc } IE,$$

so ergibt sich
$$a\omega = a \text{ arc tg} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b} + \sqrt{\varrho^2 - b^2} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Wenn im speziellen $b = 0$, d. h. der Griffel im Mittelpunkte des bewegten Kreises steht, so vereinfacht sich diese Gleichung und wird zu

$$\varrho = a\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right),$$

welches eine Archimedische Spirale darstellt. Diese Betrachtungen lassen die Archimedische Spirale als Individuum einer ganzen Klasse von Kurven, den sog. allgemeinen Kreisevolventen[1]), erscheinen.

Zu einer anderen ähnlichen neuen Klasse von Kurven glaubte A. von Burg gelangt zu sein[2]), indem er die Betrachtung von Kurven mit der allgemeinen Polargleichung

$$\varrho = a\omega + b \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

---

1) Über diese Kurven, deren Gleichung (8) ist, und andere von Clairaut in der zitierten Abh. betrachtete, s. die Beantwortung von V. Retali einer im IV. B. (1897) S. 252 des *Intermédiaire des mathématiciens* vorgelegten Frage.

2) *Ausführliches Lehrbuch der höheren Mathematik*, III. (Wien, 1833) S. 241.

einführte. Eine derartige Kurve erhält man offenbar durch Verlängerung aller Vektoren der Spirale (1) um die Länge b, mit anderen Worten, sie ist eine Konchoide (vgl. Bd. I, S. 144) der Archimedischen Spirale; sie wurde Neoide genannt[1]). Beachtet man jedoch[2]), daß, wenn man $\omega_1 = \omega + \frac{b}{a}$ setzt, die Gleichung (9) zu $\varrho = a\omega_1$ wird, so sieht man ein, daß die Neoide von der Archimedischen Spirale nicht verschieden ist[3]). Somit sehen wir: **Die Konchoiden einer Archimedischen Spirale sind der ursprünglichen gleiche Spiralen.** Es ist hervorzuheben, daß diese Eigenschaft für die Archimedische Spirale charakteristisch ist. In der Tat, wenn $\varrho = f(\omega)$ die Polargleichung einer Kurve von dieser Eigenschaft ist, so muß es einen Winkel α geben derart, daß für jeden beliebigen Wert von ω besteht

$$f(\omega) + b = f(\omega + \alpha),$$

oder auch
$$b = \alpha f'(\omega) + \frac{\alpha^2}{2!} f''(\omega) + \cdots\cdots;$$

und damit dies eintrete, muß sein $f'(\omega) = \frac{b}{\alpha}$, $f''(\omega) = 0$, $\ldots\ldots$, folglich ist die Gleichung der fraglichen Kurven

$$\varrho = \frac{b}{\alpha}\omega + c,$$

w. z. b. w.[4])

1) Vgl. Hoffmann, *Mathematisches Wörterbuch*, IV. (Berlin 1864) S. 194, wo auch die Anwendung der Neoide bei den Spinnmaschinen erwähnt wird.

2) Stegmann, *Verschiedene mathematische Bemerkungen* (Arch. Math. Phys. VIII, 1846).

3) Somit bezieht sich die Note von W. Rulf, *Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Neoide mittels eines Kegelschnittes* (Das., 2. Ser. XI, 1892) auf die Archimedische Spirale. — Die Identität der Neoide mit der Archimed. Spirale könnte den Namen Neoide im Katalog der speziellen Kurven verschwinden lassen, wenn er nicht noch in anderem Sinne angewandt wäre; nämlich in der Abh. von W. J. Macquorn Rankine, *On the mathematical theory of stream lines especially those of four foci and upwards* (Phil. Trans. R. Soc. CLXI, London, 1871) ist S. 268 die Rede von „Neoïds, that is ship-shape lines". Daselbst finden sich dann noch andere Kurven, die (nach dem griechischen κυκνοειδής) „Cycnoïdes, or swan-like lines" genannt sind; da die einen sowohl wie die anderen nur Bezug auf die angewandte Mathematik haben, so tun wir hier ihrer nur flüchtige Erwähnung.

4) Eine Minimumseigenschaft der Archimedischen Spirale wurde in neuerer Zeit von Ed. Janisch (Arch. Math. Phys., II. Reihe, IX, 1890. S. 445) bemerkt.

Fünftes Kapitel.

Die Spiralen höheren Grades.

187. „Als unmittelbare Verallgemeinerung der Archimedischen Spirale sind diejenigen Kurven zu betrachten, die in Polarkoordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho^k = a^k \frac{\omega}{2\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dargestellt werden, wo k eine ganze positive Zahl ist; wir bezeichnen sie mit dem Namen Spiralen höheren Grades. Von ihnen spricht Fermat in einem an P. Mersenne unterm 3. Juni 1636 gerichteten Briefe[1]) und verspricht nicht nur eine vollständige Behandlung derselben, sondern führt auch Sätze an über diejenige, welche dem Falle $k = 2$ entspricht, und von der er annimmt, daß sie die wunderbare Kurve (παράδοξος γραμμή) sei, die, nach der Aussage des Pappus[2]), von dem Geometer Menelaus von Alexandrien erfunden wurde[3]). Die Entdeckungen Fermats wurden durch Mersenne bekannt gemacht, der von ihnen im zweiten Teile seiner *Harmonie universelle* (Paris 1637) spricht, und ferner in den *Cogitata physico-mathematica* (Lutetiae Paris., 1644); ebenderselbe erwähnt ihrer in einem Briefe an C. Huygens vom 22. Mai 1648[4]), wo die Aufgabe gestellt wird, das Verhältnis der vom Radiusvektor beschriebenen Fläche A, wenn der Winkel ω von 0 bis 2π variiert, zum Inhalte C des Kreises mit dem Radius a und dem Zentrum O (den wir auch hier den ersten Kreis nennen) zu bestimmen. Diese Aufgabe läßt sich mit unseren Methoden leicht lösen; da nämlich

$$A = \frac{1}{2}\int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{k\pi}{a^k}\int_{\varrho=0}^{\varrho=a} \varrho^{k+1} \cdot d\varrho = \frac{k\pi a^2}{k+1}, \quad \text{und} \quad C = \pi a^2,$$

so hat man sofort $\qquad A : C = k : (k+2);$

für $k = 1$ haben wir einen Satz des Archimedes (s. Nr. **185**) wieder, während wir für $k > 1$ einen Satz erhalten, der mit anderen von Stephano de Angelis[5]) und John Wallis übereinstimmt, und

1) *Oeuvres de Fermat* II, S. 12 - 14, und III, S. 277—278.

2) *Pappus,* herausg. v. Hultsch, S. 270.

3) Diese Ansicht des berühmten Senators von Toulouse fand wenige Anhänger, weil man allgemein annimmt, daß die „wunderbare" Kurve doppelter Krümmung sei; s. G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia,* Lib. III n. 35 (Mem. Acc. Modena, II. Ser. XII, 1900).

4) *Oeuvres de Huygens* I, S. 95.

5) *De infinitorum spiralium spatiorum mensura* (Venetiis, 1660), wo die Kurve (1) für $k = 1$ spiralis linearis, für $k = 2$ spiralis secunda seu quadratica, für $k = 3$ spiralis tertia seu cubica usw. genannt wird.

der von R. de Sluse in einem Briefe an Huygens vom August 1663 mitgeteilt wird[1]).

Ist μ der Winkel, den die Tangente an die Spirale mit dem zum Berührungspunkt gehenden Radiusvektor bildet, so liefert Gl. (1) $\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega} = k\omega$, woraus man eine Methode ableiten kann, die Tangente zu konstruieren; andere erhält man, wenn man beachtet, daß die Polar-Subtangente und Subnormale ausgedrückt werden durch

$$2k\pi\frac{\varrho^{k+1}}{a^k} \text{ bzw. } \frac{1}{2k\pi}\frac{a^k}{\varrho^{k-1}}.$$

Die in Nr. **184** (S. 38) für die Archimedische Spirale ausgeführte Rechnung läßt sich mit leichten Modifikationen der durch Gleichung (1) dargestellten Kurve anpassen und zeigt, daß auch diese Kurve panalgebraisch ist und einem Systeme angehört, dessen Charakteristiken jedoch einen verschiedenen Ausdruck haben, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Dieses verschiedene Verhalten in diesen beiden Fällen zeigt sich auch, wenn wir die Gestalt unserer Kurve untersuchen; nämlich, wenn k gerade ist, muß man, um reelle Punkte der Kurve zu erhalten, dem ω positive Werte erteilen, und hat dann für jedes ω zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von ϱ, daher ist die Kurve symmetrisch in bezug auf den Pol (der ein Punkt der Kurve ist); wenn hingegen k ungerade ist, so entsprechen zwei gleichen und entgegengesetzten Werten von ω gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ, daher ist jetzt die Kurve symmetrisch in bezug auf die sekundäre Polarachse.

Die Rektifikation der Spiralen höheren Grades liefert einen von Fermat gefundenen Satz, der eine Verallgemeinerung des Cavalierischen ist, den wir in Nr. **185** bewiesen haben. Um zu erkennen, worin dieser Satz besteht, beachten wir, daß wenn s_s der Bogen der Spirale (1) ist

$$ds_s = \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2} = \frac{2k\pi}{a^k}\,d\omega\sqrt{\left(\frac{a^k}{2k\pi}\right)^2 + \varrho^{2k}};$$

bezeichnen wir anderseits mit s_p den Bogen der Parabel $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch die Gleichung

$$y^{k+1} = (k+1)p^k x$$

dargestellt wird, so haben wir

$$ds_p = \frac{1}{p^k}\,dy\sqrt{p^{2k} + y^{2k}}.$$

Damit ist gezeigt, daß der Spiralenbogen vom Pol bis zum Punkte $\varrho = c$ gleich dem Parabelbogen vom Scheitel bis zum Punkte $y = c$

1) *Oeuvres de Huygens* IV, S. 399.

ist, vorausgesetzt, daß zwischen den Konstanten a und p die Beziehung besteht
$$a = \sqrt[k]{2k\pi} \cdot p.$$
Für $k = 1$ erhalten wir den Cavalierischen Satz wieder; für ein beliebiges k erhalten wir einen Satz, den E. Torricelli an Michelangelo Ricci am 24. Aug. 1644 mitteilte[1]), und den Fermat dem Carcavy in einem Briefe bekannt gab, der am 13. Sept. 1659 dem Huygens übermittelt wurde[2]). Es ist merkwürdig, daß Huygens in der Antwort an Carcavy vom 26. Februar 1660 bemerkt hat: „La comparaison des autres sortes de spirales avec des lignes paraboloides que donne M. de Fermat est veritable, mais non pas fort difficile à trouuer apres que la premiere est connüe. Et je m'estonne qu'il prend plaisir à inventer des lignes nouuelles, qui n'ont pas autrement des proprietez dignes de consideration“[3]). Hierdurch getroffen, antwortete Fermat dem Huygens durch Vermittelung von Carcavy[4]), daß für $k = \frac{1}{2}$ seine Spirale ebenso wie die entsprechende Parabel (s. Nr. **118**) sich der bemerkenswerten Eigenschaft erfreuten, rektifizierbar zu sein, eine wichtige Bemerkung, da sie zeigt, daß Fermat seine Betrachtungen nicht auf den Fall, daß bei den durch Gleichung (1) dargestellten Spiralen k eine ganze Zahl sei, beschränkt hat. Wir wollen noch hinzufügen, daß man eben diese Spirale $\left(k = \frac{1}{2}\right)$ erhält, wenn man den Ort der Endpunkte der Polar-Subtangenten einer Archimedischen Spirale aufsucht.

188. Der Briefwechsel Fermats enthält auch Mitteilungen über eine andere Kurve, deren Erfindung man dem Galilei zuschreibt[5]); nachdem sie unrechtmäßigerweise Helix Baliani genannt worden war[6]), bezeichnet man sie heute mit dem Namen Galileische Spirale. Sie ist unter die physikalisch-mathematischen Kurven zu rechnen, da sie definiert wird als „die Linie, die ein materieller, schwerer frei fallender Punkt in bezug auf die mit ihrer täglichen Bewegung begabte Erde beschreibt“. In Polarkoordinaten wird sie durch eine Gleichung von folgender Form wiedergegeben
$$\varrho = a - b\omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

---

1) S. G. Ghinassi, *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli* (Faenza, 1864) S. 17—19.

2) *Oeuvres de Huygens* II, S. 538; *Oeuvres de Fermat* II, S. 441. S. auch die an Laloubère gesandten und von diesem 1660 in dem Anhange zu dem Werke *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* veröffentlichten Sätze; neugedruckt in *Oeuvres de Fermat* I, S. 206, und III, S. 178.

3) *Oeuvres de Huygens* III, S. 27.

4) S. Fermats Brief vom 25. Juni 1660, veröffentlicht in *Oeuvres de Huygens* III, S. 89, und *Oeuvres de Fermat* II, S. 448.

5) *Oeuvres de Fermat* II, S. 12.

6) Vgl. die Bemerkungen P. Tannerys im *Intermédiaire* III, 1896, S. 78 u. 213.

Da diese Gleichung sich nicht ändert, wenn man das Vorzeichen von ω wechselt, so ist die Galileische Spirale symmetrisch in bezug auf die Polarachse; der Pol ist ein Doppelpunkt und die bezüglichen Tangenten bilden mit der Polarachse einen Winkel gleich $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$, die Kurve hat ferner auf der Achse selbst unzählig viele Doppelpunkte, nämlich diejenigen, für welche $\varrho = a - bk^2\pi^2$, wo k eine ganze positive oder negative Zahl ist; für $k = 0$ aber erhält man einen einfachen Punkt mit einer zur Polarachse senkrechten Tangente. Da die Subnormale ausgedrückt wird durch $S_n = -2b\omega$, so sieht man, daß **die Archimedische Spirale der Ort der Endpunkte der Polar-Subnormalen einer Galileischen Spirale ist.** Die Kurve ist ebenfalls panalgebraisch. Andere Eigenschaften sind bis jetzt an dieser Spirale nicht aufgefunden worden; sie scheint also mehr ein historisches Interesse zu besitzen.

Die Galileische Spirale kann als ein Spezialfall einer anderen physikalisch-mathematischen Kurve aufgefaßt werden, zu der Varignon[1]) gelangte, als er jene Frage verallgemeinerte, die, wie wir im I. Bd. S. 312 gesehen haben, Leibniz im Verlaufe seines berühmten Streites mit den Cartesianern vorgelegt hat. Es ist die Isochrone unter der Annahme, daß der Mittelpunkt der Erde sich nicht mehr in unendlicher, sondern in endlicher Entfernung befinde. Durch Betrachtungen, die hier wiederzugeben keinen Wert hat, erhielt der genannte französische Geometer als Differentialgleichung der fraglichen Kurve in Polarkoordinaten folgende

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\cdot d\omega = \frac{\sqrt{\varrho - a}\cdot d\varrho}{c-\varrho}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo a, c, l gegebene positive Konstanten sind. Die Integration dieser Gleichung ist ausführbar; Varignon hat sie jedoch nicht ausgeführt, und somit entging ihm eine wichtige Einteilung, nämlich die der drei Fälle $c > a$, $c = a$ und $c < a$.

I. Ist $c > a$, so setze man $\varrho = a + u^2$, $c = a + k^2$, dann wird Gleichung (1)

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\cdot d\omega = du\left\{k\left(\frac{1}{u+k} - \frac{1}{u-k}\right) - 1\right\};$$

diese läßt sich leicht integrieren und gibt (bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten)

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\,\omega = k\log\frac{u+k}{u-k} - u.$$

Setzen wir aber für u und k ihre Werte wieder ein, so erhalten wir die Gleichung:

---

1) Siehe *Méthode pour trouver des courbes le long desquelles un corps tombant, s'approche ou s'éloigne de l'horizon en telle raison de temps qu'on voudra, et dans quelque hypothèse de vitesses que ce soit* etc. (Mém. Acad. Sciences Paris, 1699).

$$\frac{l\sqrt{a}}{c}\,\omega = \sqrt{c-a}\log\frac{\sqrt{\varrho-a}+\sqrt{c-a}}{\sqrt{\varrho-a}-\sqrt{c-a}} - \sqrt{\varrho-a}, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welche in anderer Form zuerst von L. Mascheroni[1]) aufgestellt wurde. Da, wenn man $\varrho = c$ setzt, sie $\omega = \infty$ liefert, so wird die Kurve offenbar unendlich viele Windungen um den Pol machen. Schreiben wir Gleichung (2) folgendermaßen

$$\frac{l\sqrt{a}}{c\sqrt{c-a}}\,\omega = \log\frac{\sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}}+1}{\sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}}-1} - \sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}},$$

setzen alsdann $\sqrt{\frac{\varrho-a}{c-a}} = \vartheta$, so können wir erkennen, daß man an Stelle von (2) zur analytischen Darstellung der Kurve auch folgendes Gleichungspaar benutzen kann:

$$\varrho = a + (c-a)\,\vartheta^2, \qquad \omega = \frac{c\sqrt{c-a}}{l\sqrt{a}}\left(\log\frac{\vartheta+1}{\vartheta-1} - \vartheta\right).$$

II. Wenn $c = a$, so wird Gleichung (1)

$$\frac{l}{\sqrt{a}}\cdot d\omega + \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho-a}} = 0;$$

durch Integration ergibt sich

$$\varrho = a + \frac{l^2}{4a}\,\omega^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welche Gleichung eine Galileische Spirale (mit isoliertem Punkte) darstellt.

III. Wenn endlich $c < a$, so setzen wir $a = c + k^2$, $\varrho = a + u^2$; Gleichung (1) wird dann

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c}\cdot d\omega + du - k^2\frac{du}{u^2+k^2} = 0,$$

und dann bei günstiger Wahl der Integrationskonstanten

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c}\,\omega + u - k\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{u}{k} = 0.$$

Setzen wir für u, k ihre Werte wieder ein, so erhalten wir

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c}\,\omega + \sqrt{\varrho-a} - \sqrt{a-c}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{\varrho-a}}{\sqrt{a-c}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dieser Gleichung wird genüge getan durch $\varrho = a$, $\omega = 0$, daher beginnt die Kurve in einem Punkte der Polarachse. Schreiben wir Gleichung (5) folgendermaßen:

---

1) Siehe einen gedruckten Brief, gerichtet *Al Nobile Signor Achille Alessandri*, datiert von Bergamo d. 19. Sept. 1782 und wieder abgedruckt im Aufsatze von G. Loria *Mascheroni contro Varignon* in *Contributi alla biografia di L. Mascheroni* (Bergamo, 1904).

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c\sqrt{a-c}}\,\omega = \text{arc tg}\sqrt{\frac{\varrho-a}{a-c}} - \sqrt{\frac{\varrho-a}{a-c}},$$

und setzen $\sqrt{\frac{\varrho-a}{a-c}} = \vartheta$, so erkennen wir, daß die fragliche Kurve in diesem Falle auch durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden kann

$$\varrho = a + (a-c)\vartheta^2, \qquad \omega = \frac{2c\sqrt{a-c}}{l\sqrt{a}}(\text{arc tg}\,\vartheta - \vartheta). \quad . \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (3), (4), (6) geht hervor, daß die Varignonsche Isochrone eine panalgebraische, in bezug auf die Polarachse symmetrische Kurve ist; die eingehendere Diskussion derselben überlassen wir dem Leser.

189. Ebenfalls ein mehr historisches Interesse bieten die ∞^2 Kurven, die mit Variation der Konstanten a und p, durch die Gleichung

$$(\varrho - a)^2 = 2ap\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dargestellt werden; da man diese Gleichung folgendermaßen schreiben kann:

$$\varrho = \sqrt{2ap\omega} + a,$$

so ist **eine Kurve (3) die Konchoide einer Fermatschen Spirale.** Wenn im speziellen a gegen 0, p gegen ∞ konvergiert in der Weise, daß $\lim 2ap = \frac{b^2}{2\pi}$, wo b eine neue endliche Konstante ist, so wird Gleichung (3) zu

$$\varrho^2 = b^2\frac{\omega}{2\pi},$$

und stellt dann eine Fermatsche Spirale dar (vgl. Nr. **187**). Die durch Gleichung (3) dargestellten Kurven wurden von Jakob Bernoulli betrachtet[1]), der wegen der Analogie der Gleichung (3) mit der einer Parabel jede solche Kurve als „parabola helicoides, vel, si mavis, spiralis parabolica“ bezeichnete; die Späteren gaben dem Namen „parabolische Spirale“ den Vorzug, den auch wir anwenden wollen. Die betreffenden Kurven zeigen sehr verschiedene Gestalt, je nach dem Werte des Verhältnisses $\frac{a}{p}$ (Bernoulli hat insbesondere den Fall $\frac{a}{p} = 4\pi$ betrachtet); man kann aber jene Konstanten immer als positiv annehmen, dann entsprechen die reellen Punkte der Kurve positiven Werten von ω; zu jedem gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ, somit haben alle parabolischen Spiralen ein Zentrum.

Auf die parabolischen Spiralen hat Bernoulli, von 1691 an, die Methoden angewandt, die Leibniz 1684 der mathematischen Welt

---

1) *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis* etc. (Acta erudit. Jan. 1681 oder auch *Jacobi Bernoulli opera* I, S. 431; vgl. *Joh. Bernoulli opera* I, S. 46—47).

mitgeteilt hat. So bestimmte er die Tangente, indem er bemerkte, daß die Polarsubnormale durch $\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{ap}{\varrho - a}$ gegeben wird, welcher Ausdruck leicht zu konstruieren ist, und zeigt, daß $\varrho^2\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{ap}{2}$ die Gleichung des Ortes der Endpunkte der Subnormalen ist, somit ist dieser Ort ein Lituus (s. Nr. **192**). Ähnlich bestimmte Bernoulli die Maxima und Minima von ϱ und ω; ersteres führte er auf die Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwischen ω und $\operatorname{tg}\omega$ zurück; wenn nun ω und $\operatorname{tg}\omega$ durch eine algebraische Relation verknüpft wären, so könnte man die vorige Gleichung umgestalten, so daß sie algebraisch in ω wäre; ihre Wurzeln wären demnach der Zahl nach begrenzt, und die Grenzwerte von ϱ wären demnach in endlicher Zahl vorhanden. Nun zeigt aber die Gestalt der parabolischen Spirale, daß ϱ im Gegenteil unzählig viele Maxima erhalten kann; somit ist die Annahme, daß zwischen ω und $\operatorname{tg}\omega$ eine algebraische Relation bestehe, eine absurde; insbesondere: macht man $\omega = \frac{\pi}{4}$, so sieht man, daß π nicht die Wurzel einer algebraischen Gleichung sein kann[1]). Es ist dies vielleicht der älteste Versuch, die Unmöglichkeit einer algebraischen Lösung des Problems der Quadratur des Kreises nachzuweisen.

Die Wendepunkte der Spirale (3) erhält man, indem man die Gleichung (3) mit folgender kombiniert

$$\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = 0,$$

wir erhalten also

$$(a-\varrho)^5 - 2a(a-\varrho)^4 + a^2(a-\varrho)^3 + 3p^2a^2(a-\varrho) - p^3a^3 = 0;$$

die ähnliche Aufsuchung der Doppelpunkte wurde von Bernoulli nicht in Angriff genommen, kann aber ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. Hingegen hat er sich mit der Quadratur der Kurve beschäftigt; es ist leicht, seine Schlüsse zu kontrollieren, wenn man beachtet, daß

$$\frac{1}{2}\int\varrho^2\cdot d\omega = \frac{1}{2ap}\int\varrho^2(\varrho - a)\cdot d\varrho = \frac{\varrho^3}{2p}\left(\frac{\varrho}{4a} - \frac{1}{3}\right) + Const.$$

Folglich erhält man, wenn man $2p = \frac{a}{2\pi}$ setzt und das Integral zwischen $\varrho = 0$ und $\varrho = a$ nimmt, $\frac{1}{6}\pi a^2$, wie auch Bernoulli gefunden hat.

Viel schwieriger und interessanter ist das Problem der Rektifikation der parabolischen Spirale; Jakob Bernoulli entdeckte, als er sich mit diesem beschäftigte, eine äußerst bemerkenswerte — auch bei

---

1) Bernoulli fügt hinzu, daß man ähnlich die Unmöglichkeit der algebraischen Quadratur „ullius curvae geometricae in se redeuntis" beweisen könne, welche Behauptung man wohl bezweifeln dürfte.

anderen Kurven auftretende[1]) — Tatsache, die wir hier mitteilen wollen.

Es sei s der Spiralbogen, so liefert uns Gleichung (3)

$$s = \int d\varrho \sqrt{1 + \left(\varrho \frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2} = \int d\varrho \sqrt{1 + \varrho^2 \left(\frac{\varrho - a}{pa}\right)^2},$$

folglich hängt die Berechnung des s von elliptischen Integralen ab. Wenn wir nun die Betrachtung einer Kurve einführen, die durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$y^2 = 1 + \frac{x^2 (x - a)^2}{a^2 p^2},$$

so sieht man, daß die Rektifikation der parabolischen Spirale, mit der Quadratur dieser Kurve äquivalent ist. Diese Kurve, oder besser die zu ihr affine und durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{x^2 (x - a)^2}{4 p^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

dargestellte, läßt sich nun auf folgende Weise konstruieren: „Es sei C der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Durchmesser a, der im Anfangspunkte O die y-Achse berührt (Taf. II, Fig. 14). Wir nehmen nun auf Ox beliebig die beiden Strecken $CW = CZ$, ziehen in dem Kreise die zugehörigen Ordinaten WT und ZX und bestimmen den Schnittpunkt S von TX mit der y-Achse. Es sei nun A ein Punkt der x-Achse, derart, daß $OA = 2p$. Man trage nun auf derselben Achse $OK = OS$ ab, ziehe AS und durch K die Parallele zu dieser Geraden; ist R der Schnittpunkt mit Oy, und trägt man die Strecke CR von W und Z aus auf den Geraden WT und ZX ab, so erhält man vier Punkte P der Kurve (4)." Wir überlassen den Beweis dem Leser und bemerken, daß aus der Konstruktion hervorgeht, daß die Kurve (4) zur Geraden $x = \frac{a}{2}$ symmetrisch ist; demnach enthält sie unendlich viele Paare gleichgroßer Flächenstücke, und damit ist gezeigt: **Die parabolische Spirale enthält, trotz der Unregelmäßigkeit ihrer Gestalt, unendlich viele Paare gleichlanger Bogen**; es ist dieses ihre hervorragendste geometrische Eigenschaft.[2])

---

1) Enneper, *Elliptische Funktionen*, II. Aufl. (Halle a. S., 1890) S. 526 ff.

2) Weitere, die obige Kurve und die bezüglichen Arbeiten betreffende Verhältnisse finden sich in der sorgfältigen Monographie von G. D. E. Weyer angegeben, *Über die parabolische Spirale* (Kiel und Leipzig, 1894); vgl. auch Wolfram, *Die apollonisch-parabolische Spirale* (Progr. Hof, ohne Jahreszahl).

Sechstes Kapitel.

Andere algebraische Spiralen.

190. Das Wort „Spirale", welches wir auf den vorhergehenden Seiten gebrauchten, geht in das entfernteste Altertum zurück, indem es dort eine Bahnlinie im astronomischen System Platos bedeutete[1]), jedoch der entsprechende allgemeine Begriff hat noch nicht jenen Grad der Präzision erlangt, den ein mathematischer Begriff erfordert[2]); vorläufig wollen wir als Spiralen[3]) alle Kurven bezeichnen, deren einfachste und geeignetste analytische Darstellung man bei der Anwendung von Polarkoordinaten erhält. Solcher Art sind die Kurven, welche die Polargleichung

$$\varrho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$$

haben, wo f und φ rationale Funktionen der trigonometrischen Linien des Winkels ω selbst, oder eines Vielfachen oder aliquoten Teiles desselben sind[4]); solcher Art sind diejenigen Kurven, die durch eine algebraische Gleichung zwischen ϱ und ω dargestellt werden, und die man passend als algebraische Spiralen bezeichnen kann.[5]) Sei nun

1) A. Sédillot, *De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon* (Bull. bibliogr. stor. VI, 1873, und C. R. XXVII, 1872) und Th. H. Martin, *Hypothèse astronomique de Platon* (Mém. Acad. Inscriptions Belles Lettres, XXX, 1. Teil, 1881) S. 46—48. — Es möge angeführt werden, daß im XXI. Kap. der *Astronomie* des Theon von Smyrna (s. *Théon de Smyrne, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon,* éd. Dupuis, Paris 1892, S. 328) von einer anderen astronomischen Spirale die Rede ist; sie ist von ähnlicher Gestalt wie die Sinuslinie und wird beschrieben von einer Welle, die gezwungen wird zwischen zwei Schranken zu bleiben; s. auch Martin a. a. O. S. 49.

2) S. die Artikel *Spirale* in der *Encyclopédie méthodique,* im *Mathematischen Wörterbuch* von Hoffmann und im *Dictionnaire des sciences math.* von Montferrier. Vgl. ferner H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géometriques,* Partie complémentaire (Bar Le-Duc, 1899) S. 166.

3) Andere (s. Montferrier a. a. O. II, S. 410) nennen sie Radial-Kurven.

4) G. Fouret, *Sur la construction de la tangente à la courbe* $\varrho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$, $f(\omega)$ *et* $\varphi(\omega)$ *désignant des fonctions rationelles des lignes trigonométriques de l'angle* ω, *de ses multiples ou de ses parties aliquotes* (Nouv. Ann. Mathém. 2e. Sér. XIX, 1880).

5) Dieser Name wird in dem angegebenen Sinne gebraucht von W. Rulf in der Abh. *Geometrische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der algebraischen Spiralen* (Monatshefte Math. Phys. III, 1892). Sylvester dagegen (Phil. Magazine, 4. Ser. XXXVI, 1868) gebraucht ihn, um eine Kurve zu bezeichnen, bei welcher die Länge des vom Pole auf die Tangente gefällten Lotes eine algebraische Funktion des Kontingenzwinkels ist; insbesondere kann man die sog. „ganzen Spiralen" betrachten, welche sukzessive Evolventen des Kreises sind, von denen wir in Nr. 252 sprechen werden. — Algebraische Spiralen in unserem Sinne sind insbesondere die parabolischen und hyperbolischen Spiralen höherer Gattungen, womit J. Sobotka sich eingehend beschäftigt hat (*Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plancurven,* Prager Ber. 1898); ihre allgemeine Gleichung ist $\varrho^n = a^n \omega^p$, wo n, p ganze Zahlen sind, und $p \neq n$.

$$f(\varrho, \omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung einer solchen Spirale; f sei vom Grade p in ω, und überhaupt vom Grade n. Da nun $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, so sieht man, daß

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\varrho x \frac{\partial f}{\partial \varrho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\varrho y \frac{\partial f}{\partial \varrho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\},$$

und demnach

$$(X - x)\left\{\varrho x \frac{\partial f}{\partial \varrho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\} + (Y - y)\left\{\varrho y \frac{\partial f}{\partial \varrho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\} = 0 \quad . \quad (2)$$

die Gleichung der Tangente an die Spirale im Punkte (x, y) ist.

Der Leser kann leicht nachweisen: „daß für eine solche Spirale der Ort der Endpunkte der Polarsubtangenten oder -subnormalen eine andere analoge Spirale ist, jedoch mit von n und p verschiedenen Exponenten.“ Spezialfälle dieses Satzes sind uns ja schon mehrere begegnet; andere werden sich auf den folgenden Seiten finden.

Eliminieren wir ω aus Gleichung (2) mit Berücksichtigung von Gleichung (1) und setzen für ϱ seinen Wert $\sqrt{x^2 + y^2}$, so erhalten wir die Gleichung des Ortes der Berührungspunkte der vom Punkte (X, Y) an die Kurve gezogenen Tangenten. Man gelangt so immer zu einer algebraischen Gleichung, und **daher sind alle algebraischen Spiralen panalgebraische Kurven**; die Charakteristiken desselben haben jedoch verschiedene Werte, je nach den Fällen:

I. Wenn in Gleichung (2) ω nicht auftritt, so stellt sie ohne weiteres den genannten Ort dar. Dieser Umstand tritt ein, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\varrho x \frac{\partial f}{\partial \varrho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\varrho y \frac{\partial f}{\partial \varrho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) = 0,$$

d. h. $\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho \partial \omega} = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 0$, d. h. wenn $f = a\omega + \varphi(\varrho)$ ist (das einfachste Beispiel einer solchen Kurve bietet uns die Archimedische Spirale). Wenn bei diesem Falle in (2) nur gerade Potenzen von ϱ auftreten, so ist sie rational in x und y, stellt daher eine Kurve dar, deren Ordnung gleich dem Grade m der Gleichung (2) in x, y, die einfach durch den Punkt (X, Y) geht. Daher gehört die Kurve einem Systeme an, dessen Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = m - 1$ sind. Wenn jedoch in (2) auch ungerade Potenzen von ϱ vorkommen, so ist eine Erhebung ins Quadrat notwendig, und ist diese ausgeführt, so sieht man, daß dann die Charakteristiken des Systems $\mu = 2$ und $\nu = 2(m - 1)$ sind.

II. Wenn hingegen in Gleichung (2) ω im Grade q auftritt, so führt die vermittelst der dialytischen Methode von Sylvester ausgeführte Elimination von ω aus den Gleichungen (1) und (2) zu einer Gleichung, deren linke Seite eine Determinante von der Ordnung

$p+q$ ist, in welcher die Elemente der ersten q-Horizontalreihen mit einem der beiden Faktoren $(X-x)$ oder $(Y-y)$ behaftet sind; wenn nun diese linke Seite nur gerade Potenzen von ϱ enthält, so geht der betrachtete Ort q-mal durch den Punkt (X, Y), anderenfalls $2q$-mal durch den Punkt hindurch. Die Spirale gehört also einem System an, für welches $\mu = q$ oder $= 2q$ ist; die andere Charakteristik, ν, ergibt sich aus der Betrachtung der genannten resultierenden Gleichung, die, wenn nötig, rational gemacht ist.

Die algebraischen Spiralen können auch in ähnlicher Weise, wie wir es für die Archimedische Spirale gezeigt haben, auf stereometrische Weise erzeugt werden. Betrachten wir nämlich eine flachgängige gerade Schraube, die durch die Gleichung

$$\frac{2\pi z}{p} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

dargestellt wird und schneiden sie mit einer koaxialen Rotationsfläche

$$f(z, \sqrt{x^2+y^2}) = 0,$$

so projiziert sich die Schnittkurve auf die xy-Ebene in die Linie

$$f\left(\frac{p}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Führen wir nun Polarkoordinaten ein, so wird diese zu

$$f\left(\frac{p\omega}{2\pi}, \varrho\right) = 0.$$

Ist nun f eine algebraische Funktion, so wird auch die so dargestellte Spirale eine algebraische sein.

191. Zu der großen Kategorie der algebraischen Spiralen gehören nicht nur diejenigen, die wir in den vorigen Kapiteln behandelt haben, sondern auch eine andere nicht weniger beachtenswerte, zu deren Untersuchung wir uns jetzt wenden.

Wenn man eine Archimedische Spirale einer Transformation durch reziproke Radienvektoren unterwirft, deren Zentrum im Auge der Spirale liegt, so bekommt man eine andere Kurve, die in Polarkoordinaten durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt wird

$$\varrho\,\omega = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sie findet sich — unter anderen allgemeineren — in einer Abhandlung von Varignon, die der Pariser Akademie im Jahre 1704 vorgelegt, aber erst 1722 veröffentlicht wurde[1]); sie wurde ferner auch von Joh. Bernoulli entdeckt, der in einem französisch geschriebenen Briefe an Hermann vom 7. Oktober 1710 sie Spirale hyperbolique[2]) nannte, und ungefähr drei Jahre später, als er die Analogien

1) Weiteres über diese Arbeit von Varignon s. Kap. I des folgenden Abschnittes.
2) Mém. Acad. Sciences, Paris, 1710; *Joh. Bernoulli Opera omnia* I, S. 480.

sowohl, als auch die Verschiedenheiten zwischen ihr und der Archimedischen erkannt hatte, schrieb: „ita ut non incongrue haec spiralis vocari possit hyperbolica, vel etiam Archimedea inversa; utpote quae cum Archimedea ordinaria hoc commune habet, quod in utraque distantiae punctorum ab umbilico sint proportionales circulationibus emensis, in Archimedea vulgari directe, in nostra vere inverse".[1]) Der Name hyperbolische Spirale ist nun allgemein angenommen worden in Hinsicht auf die Analogie der Gleichung (3) mit der einer auf die Asymptoten als Achsen bezogenen Hyperbel.

Die Gleichung (3) zeigt uns, daß gleichen und entgegengesetzten Werten von ω auch gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ entsprechen; folglich ist die hyperbolische Spirale eine in bezug auf die sekundäre Polarachse symmetrische Kurve, auf dieser befinden sich unendlich viele Doppelpunkte (Taf. II, Fig. 15). Lassen wir ω bis $\pm\infty$ gehen, so geht ϱ in 0 über; **demnach ist der Pol ein asymptotischer Punkt der Kurve**; machen wir hingegen $\omega = 0$, so erhalten wir $\varrho = \infty$, folglich geht die Kurve durch den unendlich fernen Punkt der Polarachse, und da Gleichung (1) uns sagt, daß

$$\lim_{\omega=0}(\varrho \sin\omega) = \lim_{\omega=0}\left(a\frac{\sin\omega}{\omega}\right) = a,$$

so **ist die zur Polarachse im Abstande a gezogene Parallele eine Asypmtote der Kurve.**

Die Polar-Subtangente wird gegeben durch $S_t = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega} = -a$; folglich: **Der Ort der Endpunkte der Polar-Subtangente der hyperbolischen Spirale (3) ist der mit dem Radius a um den Pol beschriebene Kreis.** Daraus folgt eine höchst einfache Konstruktion der Tangente. Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch vermerken, daß die Kurve in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - a = 0$$

dargestellt wird, und daher die Tangente durch

$$(X-x)\left\{ax - y\sqrt{x^2+y^2}\right\} + (Y-y)\left\{ay + x\sqrt{x^2+y^2}\right\} = 0;$$

nehmen wir nun an, daß der Punkt P mit den Koordinaten X, Y gegeben sei, so ergibt sich hieraus leicht: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte P der Ebene an eine hyperbolische Spirale ziehen kann, gehören einer Kurve vierter Ordnung an, die P zum Doppelpunkte hat**; infolgedessen gehört jede hyperbolische Spirale einem System an, mit den Charakte-

---

1) *De motu corporum gravium, pendolorum et projectilium* (Acta erud. Februar 1713); oder *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 552.

ristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$. Ist P unendlich fern, so ist der Ort eine Kappa-Kurve.

Die Fläche F des Sektors, zwischen einem Spiralenbogen und den Radienvektoren der Endpunkte gelegen wird, gegeben durch

$$F = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho^2 \cdot d\omega - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\Omega}\right);$$

wenn also Ω nach ∞ übergeht, so nähert sich F immer mehr dem Wert $\frac{a^2}{2\omega_0}$, solange $\omega_0 \neq 0$. Für das Bogendifferential hingegen erhält man

$$ds = d\omega\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} = -\frac{a\sqrt{a^2+\varrho^2}}{\varrho}\,d\varrho;$$

daher ist

$$s = \frac{a}{2}\cdot\log\frac{\sqrt{a^2+\varrho^2}+a}{\sqrt{a^2-\varrho^2}-a} - \sqrt{a^2+\varrho^2} + Const.,$$

welches zeigt, **daß die Rektifikation der hyperbolischen Spirale von Logarithmen abhängt**, eine Bemerkung von Côtes.[1])

Es sei μ der Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet und R der Krümmungsradius. Man findet dann leicht

$$\sin\mu = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad R = \frac{a}{\omega}\left\{\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}\right\}^3,$$

und daraus durch Elimination von ω

$$\frac{\varrho}{R} = \sin^3\mu; \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

man könnte nachweisen, daß dieses eine charakteristische Eigenschaft der hyperbolischen Spirale ist.[2])

Zwischen unserer Spirale und der Kochleoide (Nr. **180**) besteht eine höchst einfache Beziehung, die hier hervorgehoben werden soll: **Zieht man durch einen beliebigen Punkt M (ϱ, ω) der Spirale (3) die Parallele zur Polarachse und macht auf dieser $MM_1 = MO$, so ist der Ort der Punkte M_1 (ϱ_1, ω_1) eine Kochleoide.**

Beweis: Es ist nämlich

$$\omega_1 = \frac{\pi+\omega}{2}, \qquad \varrho_1 = 2\varrho\sin\frac{\omega}{2},$$

oder

$$\omega = 2\omega_1 - \pi, \quad \varrho = \frac{\varrho_1}{2\sin\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)};$$

setzen wir dies in (3) ein, so finden wir

$$\varrho_1\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right),$$

1) Phil. Trans. R. Soc. Nr. 29, London 1741.

2) Tisserand, *Recueil complémentaire d'exercises sur le calcul infinitésimal*, II. Aufl. (Paris, 1895) S. 310.

welche Gleichung (vgl. Nr. 182) eine Kochleoide darstellt, wie behauptet war.

Es gibt aber auch eine sehr bekannte Raumkurve, zu welcher die hyperbolische Spirale eine intime Beziehung hat. Betrachten wir nämlich die Schraubenlinie mit den Gleichungen

$$x = a\cos\omega, \quad y = a\sin\omega, \quad z = ka\omega,$$

und projizieren sie von irgendeinem beliebigen Punkte der Achse — z. B. dem mit der Ordinate ζ —, so erhalten wir eine Kegelfläche, die durch die Gleichungen

$$x = \frac{a\cos\omega}{1+\lambda}, \quad y = \frac{a\sin\omega}{1+\lambda}, \quad z = \frac{ka\omega + \lambda\zeta}{1+\lambda},$$

dargestellt werden kann, wobei λ ein neuer Parameter ist. Die Schnittlinie dieser Kegelfläche mit der xy-Ebene erhält man, wenn man $z = 0$ macht, d. h. $\lambda = -\frac{ka\omega}{\zeta}$; sie wird daher durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = \frac{a\cos\omega}{1 - \frac{ka\omega}{\zeta}}, \quad y = \frac{a\sin\omega}{1 - \frac{ka\omega}{\zeta}}.$$

Nun läßt sich hieraus ableiten, daß

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{1 - \frac{ka\omega}{\zeta}},$$

oder, wenn man $\sqrt{x^2+y^2} = \varrho$, $1 - \frac{ka\omega}{\zeta} = \varphi$ setzt: $\varrho\varphi = a$; folglich: **Die Projektion einer Schraubenlinie von einem Punkte der Achse des Rotationszylinders, auf welchen sie aufgezeichnet ist, auf eine zu dieser Achse senkrechte Ebene ist eine hyperbolische Spirale.**[1])

190. Die Gleichungen

$$\varrho_1 = \frac{a}{\omega - 1}, \qquad \varrho_2 = \frac{a}{\omega + 1}$$

stellen ersichtlich zwei hyperbolische Spiralen mit demselben Pole dar. Wir suchen ihre Konchoidale (s. Bd. I S. 144), indem wir $\varrho = \varrho_1 - \varrho_2$ setzen und erhalten die Kurve

$$\varrho = \frac{2a}{\omega^2 - 1}, \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

man findet sie als Lösung folgender Aufgabe: Eine ebene Kurve von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man sie auf einer Geraden abrollt, einer ihrer Punkte einen Kreis mit dem Radius a beschreibt.[2]) Es ist bemerkenswert, daß diese Kurve elementar rektifizierbar ist; nämlich aus (5) ergibt sich

1) Th. Olivier, Journ. Ec. pol. XXII cah., 1833, S. 108.

2) R. Fabri, *Sulle curve cicloidali* (Atti Acc. Pont. Nuovi Lincei, X, 1856), und E. Catalan, *Note sur la théorie des roulettes* (Nouv. Ann. Math. XV, 1856).

$$\frac{ds}{d\varrho} = \frac{\varrho + a}{\sqrt{\varrho^2 + 2a\varrho}},$$

und also durch Integration

$$s = \sqrt{\varrho^2 + 2a\varrho} = \frac{2a\omega}{\omega^2 - 1} = \varrho\omega;^{1)}$$

bezeichnet man nun mit R den Krümmungsradius, so findet man[2])

$$R = \varrho\left(\frac{a+\varrho}{a}\right)^2;$$

daraus ergibt sich die natürliche Gleichung der Kurve als

$$R = \frac{\left(\sqrt{a^2 + s^2} - a\right)(a^2 + s^2)}{a^2}.$$

Zu einer anderen algebraischen Spirale gelangt man, wenn man eine Kurve von der Beschaffenheit sucht, daß die Fläche zwischen ihrem Bogen und den Radienvektoren in den Endpunkten proportional dem Logarithmus des Verhältnisses der beiden Vektoren selbst ist. Es ist dies eine Aufgabe, die R. Côtes sich stellte und in folgender Weise gelöst hat[3]): Die Bedingungen des Problems übersetzen sich alsbald in die Gleichung

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2 \cdot d\omega = a^2 \log\frac{\varrho_1}{\varrho_0}.$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$d\omega = 2a^2\frac{d\varrho}{\varrho^3}$$

und durch Integrieren $\qquad \omega - \alpha = -\dfrac{a^2}{\varrho^2}.$

Setzt man hierin $\alpha - \omega = \varphi$, so findet man

$$\varrho^2\varphi = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

als Gleichung der gesuchten Kurve. Diese ist symmetrisch in bezug auf den Pol, der ein asymptotischer Punkt der Kurve ist; die reellen Punkte der Kurve erhält man, wenn man dem φ positive Werte erteilt (s. Taf. II, Fig. 16).

Transformieren wir (6) durch reziproke Radienvektoren, so erhalten wir, wenn das Zentrum der Transformation mit dem Pole zusammenfällt,

$$\varrho^2 = b^2\omega, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

---

1) Vgl. den II. Tl. der *Mathematisch-physikalischen Kleinigkeiten* von V. Nachreiner (Progr. Neustadt, 1909).

2) Es ist ratsam, hier die u. a. von Serret Harnack-Scheffers, *Differentialrechnung* (Leipzig, 1905) S. 351 angegebene Formel zu benutzen:

$$R = \frac{\left\{\frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d}{d\omega}\frac{1}{\varrho}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\varrho^3}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d\omega^2}\frac{1}{\varrho}\right)}$$

3) *Harmonia mensurarum* (Cambridge, 1722) S. 85.

welches eine Fermatsche parabolische Spirale zweiten Grades darstellt (s. Nr. **187**); infolgedessen wird die durch (6) dargestellte die reziproke parabolische Spirale genannt[1]); mehr verbreitet ist jedoch der von Côtes angewandte Name Lituus (Krummstab), welcher durch Sacchi in Tromba[2]) übersetzt wurde. Da Gleichung (6) für $\varphi = \infty$ ergibt, $\varrho = 0$, so ist der Pol ein asymptotischer Punkt der Kurve; der Punkt mit den Koordinaten $\varphi = \frac{1}{2}$, $\varrho = a\sqrt{2}$, ist ebenso wie sein symmetrischer ein Wendepunkt, usw. — Spezialisieren wir das in Nr. **190** angegebene Verfahren, so sehen wir: **Der Lituus gehört einem System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$ an.** Schließlich ergibt sich als unmittelbare Folgerung der Gleichung (6) folgender Satz: „Ist eine Schar konzentrischer Kreise gegeben und eine durch ihren gemeinsamen Mittelpunkt O gehende Gerade OX, und man bestimmt auf der Peripherie eines Kreises, dessen auf OX liegender Radius OA sein möge, einen Punkt M derart, daß der Sektor $AOM = \frac{1}{2}a^2$ wird, so ist der Ort der Punkte M ein Lituus, wie er durch Gleichung (6) dargestellt wird".[3])

Siebentes Kapitel.

Die logarithmische Spirale, sowie einige davon abgeleitete Kurven.

193. In einem an P. Mersenne gerichteten Briefe vom 12. September 1638 teilt Descartes seinem Korrespondenten, der ihn ersucht hatte „plus particulierement expliquer la nature de la spirale qui represente le plan egalement incliné" als Antwort folgende Eigenschaft jener Kurve mit: „Si A est le centre de la terre et que $ANBCD$ soit la spirale, ayant tiré les droites AB, AC, AD et semblables, il y a même proportion entre la courbe ANB et la droite AB, qu'entre la courbe $ANBC$ et la droite AC ou $ANBC$ et AD, et ainsi des autres. Et si on tire les tangentes DE, CF, BG etc., les angles ADE, ACF, ABG etc. seront egaux".[4])

---

1) Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I. Th., III. Aufl. (Leipzig, 1878) S. 106, V. Aufl. (Leipzig, 1904) S. 122.

2) *Sulla geometria analitica delle curve piane* (Pavia, 1854) S. 9. Die Begründung dieser Bezeichnungen ergibt sich offenbar daraus, daß man gewöhnlich von der hier behandelten Kurve nur den einen, positiven Werten von ϱ entsprechenden, Zweig betrachtet, der die Gestalt eines Krummstabes oder einer am unteren Ende eingerollten ehernen Trompete hat.

3) C. A. Laisant, *Nouv. Corr. Mathém.* Question 251, 1877, S. 87—88, wo die Kurve mit dem wenig bedeutsamen Namen Spirale polaire bezeichnet wird.

4) *Oeuvres de Descartes*, éd. Adam et Tannery II. (Paris, 1898) S. 360.

Die Eigenschaft, durch welche Descartes die neue Spirale charakterisiert, übersetzt sich leicht in die Gleichung

$$\frac{s}{\varrho} = a,$$

wo ϱ der vom Punkte A ausgehende Radiusvektor, s der Kurvenbogen und a eine Konstante ist. Differenzieren wir die vorige Gleichung und setzen für ds seinen Wert $\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}$, so erhalten wir

$$d\omega = \sqrt{a^2 - 1}\,\frac{d\varrho}{\varrho},$$

und daher durch Integrieren

$$\varrho = c e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo c eine beliebige Konstante ist. Dies ist die Polargleichung der fraglichen Spirale; wegen ihrer Form wurde die Kurve selbst von Varignon[1]) die logarithmische Spirale genannt, und dieser Name ist ihr geblieben.[2]) Nennen wir μ den Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor, so erhalten wir, indem allgemein $\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}$, in diesem Falle

$$\operatorname{tg}\mu = \sqrt{a^2 - 1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

μ ist also konstant, wie auch Descartes in der oben angeführten Stelle bemerkt hat. **Die logarithmische Spirale ist also die schräge (gleichwinklige) Traktorie eines Strahlenbüschels**; daher wird sie auch mit dem Namen gleichwinklige Spirale belegt[3]), und deswegen behauptet Joh. Bernoulli: „ipsamet etiam esset vera loxodromia[4]), si terra plana foret“. Diese Eigenschaft der logarithmischen Spirale zeigt uns auch, daß, um von einem beliebigen Punkte P der Ebene an sie die Tangente zu ziehen, es genügt (wenn O der Pol ist), über OP einen Kreis zu beschreiben, der den Winkel μ als Peripheriewinkel faßt; dieser schneidet die Kurve in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten. Hieraus folgt: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte der Ebene an eine logarithmische**

---

1) Vgl. die auf S. 55 genannte Abhandlung, von der wir ausführlicher im Kap. 1 des folgenden Abschnittes reden werden.

2) Weniger angewendet ist der Name Proportionale Spirale (Hoffmann, *Math. Wörterbuch*, IV, S. 319).

3) Withworth, *La spirale équiangle. Ses propriétés prouvées geométriquement* (Nouv. Ann. Math. 2. Ser. VIII, 1869 und IX, 1870); französische Übersetzung einer Abh. in *Messenger math.* I, 1862.

4) Bekanntlich nennt man Loxodrome eine sphärische Kurve, die alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet. Daher ist die stereographische Projektion einer Loxodrome eine logarithmische Spirale.

Spirale gezogenen Tangenten liegen auf einem Kreise, der durch den Punkt und den Pol geht. Jede logarithmische Spirale ist also panalgebraisch und gehört einem System an, dessen beide Charakteristiken gleich eins sind.

Aus der Gleichung (1) ergeben sich alsbald einige Folgerungen, die hervorgehoben zu werden verdienen. Zunächst, wenn ω in $-\infty$ übergeht, wird ϱ zu 0, und somit ist der Pol O oder **das Auge der Spirale ein asymptotischer Punkt.** — Betrachten wir vier Punkte A, B, C, D der Kurve, die den Werten α, β, γ, δ von ω entsprechen derart, daß $\beta - \alpha = \delta - \gamma$. Infolge der Gleichung (1) ist dann

$$\frac{OB}{OA} = e^{\frac{\beta - \alpha}{\sqrt{a^2 - 1}}}, \qquad \frac{OD}{OC} = e^{\frac{\delta - \gamma}{\sqrt{a^2 - 1}}},$$

und daher wegen der gemachten Voraussetzung

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC};$$

hieraus folgt, daß die beiden Dreiecke AOB und COD einander ähnlich sind. Wenn man also zwei Punkte M, N der Spirale kennt und konstruiert über ON das dem Dreiecke OMN ähnliche Dreieck ONP, so ist P ein dritter Punkt der Kurve; daraus kann man einen vierten, dann einen fünften usw. ableiten (s. Taf. II, Fig. 17). Diese Konstruktion beruht im Grunde darauf, daß die in gleichen Winkelabständen liegenden Vektoren eine geometrische Proportion bilden; ist insbesondere der Winkelabstand gleich 2π, so haben wir: **Die auf jedem vom Auge der Spirale ausgehenden Strahle liegenden Vektoren der logarithmischen Spirale bilden eine geometrische Progression.**[1]) Auch hieraus ergibt sich, namentlich wenn der Quotient q dieser letzteren Progression gegeben ist, eine Methode, die Spirale punktweise zu zeichnen. Für q besteht die Beziehung

$$q = e^{2\pi \operatorname{ctg} \mu};$$

da diese Größe zur Zeichnung der Spirale ausreicht, so sieht man, daß die Konstante c nur den Maßstab, bzw. eine bestimmte der unendlich vielen einander ähnlichen Windungen bezeichnet, jedoch auf die Gestalt keinen Einfluß hat.[2]) Auch auf andere Weise läßt sich erkennen, **daß mit Variation der Konstanten c die Gleichung (1) unendlich viele unter sich identische Kurven darstellt.** Betrachtet man nämlich die Kurve

---

1) Bei der archimedischen Spirale bilden sie eine arithmetische Progression.

2) Eben dieser Quotient ist bei den in der Natur an Konchylien vorkommenden Spiralen (nach Beobachtungen des Übersetzers) eine ganze oder einfache rationale Zahl.

$$\varrho = c_1 e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}},$$

und setzt nun

$$c_1 = c e^{\frac{\alpha}{\sqrt{a^2-1}}},$$

so ist dadurch der Winkel α vollständig bestimmt, und man hat alsdann

$$\varrho = c e^{\frac{\omega+\alpha}{\sqrt{a^2-1}}};$$

setzt man dann $\omega + \alpha = \tilde{\omega}$, so erhält man die Gleichung

$$\varrho = c e^{\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{a^2-1}}},$$

welche mit (1) verglichen die Richtigkeit unserer Behauptung dartut.

Aus dieser folgt unmittelbar: **Die logarithmische Spirale wird durch jede Inversion, deren Zentrum das Auge der Spirale ist, in eine gleiche Kurve verwandelt.** Setzen wir nämlich $\varrho \cdot \varrho_1 = k^2$, so wird Gleichung (1) zu

$$k^2 = e \varrho_1 c^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}},$$

und wenn wir $\omega_1 = -\omega$ setzen

$$\varrho_1 = \frac{k^2}{c} e^{\frac{\omega_1}{\sqrt{a^2-1}}},$$

welche eine der (1) gleiche Kurve darstellt.

Durch eine ganz ähnliche Methode kann man beweisen, daß auch **die Fußpunktkurve einer logarithmischen Spirale in bezug auf das Auge als Pol eine gleiche Kurve ist.**

194. Zu der logarithmischen Spirale gelangte Evangelista Torricelli seinerseits, indem er von anderen Betrachtungen ausging. In welchem Jahre er seine Entdeckung gemacht hat, ist mit Sicherheit nicht bekannt; da er jedoch im Jahre 1647 in der Blüte seines Alters starb (er war erst 39 Jahre alt), so ist wahrscheinlich, daß es ungefähr zur selben Zeit wie bei Descartes gewesen sei.[1]) Der berühmte Schüler Galileis gab nicht nur zwei Erzeugungsweisen für

---

1) Über diese Untersuchungen Torricellis liefert Mitteilungen der *Racconto d'alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente fra matematici di Francia e me dall' anno 1640 in quà,* veröffentlicht von Fabroni im I. B. (Pisis, 1788, *S.* 345—72) von *Vitae Italorum doctrina excellentium qui Saeculis XVII et XVIII floruerunt.*

die neue Kurve an, eine geometrische[1]) und eine mechanische[2]), sondern entdeckte auch die Rektifikation und Quadratur, so daß, wenn Fermat, Neil und Heuraët den Ruhm genießen, als erste eine algebraische Kurve rektifiziert zu haben (s. Bd. I S. 311), Torricelli das Verdienst hat, zuerst eine geometrisch definierte Kurve rektifiziert zu haben[3]); es ist ja wahr, daß die Rektifizierung der logarithmischen Spirale eine unmittelbare Folgerung der Gleichung $s = a\varrho$ ist, durch welche Descartes sie definierte, jedoch ist sie dies nicht, wenn man von einer der Torricellischen Definitionen ausgeht. Immerhin ist der Beweis der Sätze über die Rektifikation, die man Torricelli verdankt, hier nicht unwichtig. Wir beachten zu dem Zwecke, daß, weil $s = a\varrho$, und wegen (2)

$$\cos\mu = \frac{1}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

ist, wir haben

$$s = \frac{\varrho}{\cos\mu}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

folglich: **Zieht man in einem Punkte M der logarithmischen Spirale die Tangente und ist T ihr Schnittpunkt mit der im Pole O zum Vektor OM errichteten Senkrechten, so ist MT gleich der Länge des ganzen Spiralenbogens vom Pole bis zum Punkte M.**[4]) (S. die Fig. 17, Taf. II.) Dies ist der eine der Torricellischen Sätze, der um so mehr beachtenswert ist, weil die Spirale in unendlich vielen

1) Folgendes ist der Wortlaut, wie er in dem zitierten *Racconto* sich findet: „Eine Gerade AC werde durch B in irgendeiner Weise geteilt; man errichte die Senkrechte BD als mittlere Proportionale zwischen AB und BC; außerdem teile man den Winkel DBC durch BE, so daß dieses die mittlere Proportionale zwischen DB und BC wird. Von neuem teile man den Winkel DBC durch BF, so daß dies die mittlere Proportionale zwischen DB und BE wird, und so fahre man fort, die Winkel zu teilen durch Linien, die immer die mittlere Proportionale sind. So erhält man viele Punkte wie A, D, F, E, C usw. durch welche eine Linie hindurchgeht, welche die geometrische Spirale genannt wird und welche unter anderen die Eigenschaft hat, daß sie, bevor sie das Zentrum B erreicht, unzählig viele Windungen um dasselbe macht."

2) Angegeben im *Index* der Werke Torricellis, der den nach seinem Tode herausgegebenen *Lezioni accademiche di Evangelista Torricelli* (Firenze, 1715) vorausgeht, mit folgenden Worten: „In spiralibus vero quarum radii, temporibus aequalibus in geometrica ratione procedunt, ostendetur ipsam spiralium lineam, licet ex infinitis numero revolutionibus constet antequam ad suum centrum perveniat, suae tangenti aequalam esse" (a. a. O. S. 41).

3) Vgl. G. Loria, *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* (Rend. Acad. Lincei, 5. Serie, VI, 2°. Sem. 1897).

4) Halten wir die Gerade TM fest und rollen die Spirale weiter, so bleibt, da der Winkel $OTM = \frac{\pi}{2} - \mu$ sich nicht ändert, O auf der Geraden TO (s. die Fig. 17); folglich: **Wenn eine logarithmische Spirale auf einer Geraden ohne zu gleiten rollt, so beschreibt ihr Auge eine gerade Linie** (E. Catalan, Nouv. Ann. Math. XV. 1856, S. 106).

Windungen den Pol umkreist. — Um den zweiten Satz darzustellen, bemerken wir, daß aus (1) sich ergibt

$$\int_{\omega=-\infty}^{\omega} \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot d\omega = \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{\omega} e^{\frac{2\omega}{\sqrt{a^2-1}}} \cdot d\omega = \frac{\sqrt{a^2-1}}{4}\varrho = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varrho^2 \cdot \varrho \operatorname{tg}\mu;$$

folglich: **Die Fläche des (bei der Konstruktion im vorigen Satze entstehenden) Dreiecks *OMT* ist doppelt so groß, als die vom Vektor beschriebene Fläche, wenn er aus der Lage *OM* rückwärts die unendlich vielen Windungen um den Pol durchläuft.** Dies ist der zweite der angekündigten Sätze.

Zu weiteren Sätzen gelangt man durch die Bemerkung, daß die Subnormale S_n, die Subtangente S_t und der Krümmungsradius R der logarithmischen Spirale ausgedrückt werden bzw. durch

$$S_t = \varrho \operatorname{tg}\mu, \qquad S_n = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\mu}, \qquad R = \frac{\varrho}{\sin\mu}. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Werden diese Gleichungen in geeigneter Weise miteinander und mit (3) kombiniert, so erhält man weiter

$$R = s \operatorname{ctg}\mu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\varrho^2 + S_t^2 = s^2, \qquad \varrho^2 + S_n^2 = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

(5) ist die natürliche Gleichung der log. Spirale; diese sagt, in geeigneter Weise interpretiert, aus: **Wenn eine logarithmische Spirale auf einer Geraden rollt, so ist der Ort der Krümmungszentren für die einzelnen Berührungspunkte eine gerade Linie.**[1]) Von den Gleichungen (6) drückt die erste wiederum den Torricellischen Satz über die Rektifikation aus, während die zweite besagt, **daß bei der log. Spirale das Krümmungszentrum für irgendeinen Punkt im Endpunkte der betreffenden Subnormale liegt.** Bezeichnen wir nun mit ϱ_1, ω_1 die Koordinaten des Krümmungszentrums für den Punkt mit den den Koordinaten ϱ, ω, so erhalten wir

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\sin\mu}, \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega;$$

eliminieren wir ϱ und ω aus diesen Gleichungen und aus

$$\varrho = c\,e^{\omega \operatorname{ctg}\mu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

welches die gegebene Spirale darstellt, so bekommen wir

$$\varrho_1 = \frac{c}{\sin\mu \cdot e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\mu}} e^{\omega_1 \operatorname{ctg}\mu},$$

welche Gleichung, wegen der auf S. 62 gemachten allgemeinen Be-

1) A. Mannheim, *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouvilles Journ. 2e Ser. IV, 1859, S. 95); *Principes et développement de géom. cinėm.* (Paris, 1874) S. 500 ff.

merkung, eine andere der gegebenen gleiche log. Spirale darstellt. Wir sind daher zu dem Schlusse berechtigt: **Die logarithmische Spirale ist eine Kurve, die ihren sämtlichen sukzessiven Evoluten gleich ist.**[1])

Ist C der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M (ϱ, ω) einer Kurve und C' (ϱ', ω') der zu C in bezug auf M symmetrische Punkt, so heißt der Ort der Punkte C' die Antevolute der gegebenen Kurve. Da nun hier OM die Mittellinie des Dreiecks COC' ist, so haben wir

$$2R^2 + 2\varrho^2 = S_n^2 + \varrho'^2,$$

daher wegen (4)

$$\varrho' = \varrho\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\mu} = c\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\mu}\; e^{\omega \operatorname{ctg}\mu}.$$

Es ist ferner

$$MC' = MC = \frac{\varrho}{\sin\mu}, \qquad \frac{MC'}{\sin(\omega - \omega')} = \frac{\varrho}{\cos(\omega - \omega' + \mu)},$$

daher
$$\sin\mu \cdot \sin(\omega - \omega') = \cos(\mu + \omega - \omega'),$$

oder
$$2 \operatorname{tg}\mu \cdot \operatorname{tg}(\omega - \omega') = 1.$$

Daraus folgt
$$\omega = \omega' + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\mu}{2}\right),$$

und daher erhält man schließlich als Gleichung des Ortes der Punkte C'

$$\varrho' = c\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\mu} \cdot e^{\operatorname{ctg}\mu \cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\mu}{2}\right)} e^{\omega' \operatorname{ctg}\mu},$$

welche wieder eine log. Spirale darstellt; folglich: **Die logarithmische Spirale ist eine Kurve, die ihrer Antevolute gleich ist.**

Diesen Satz verdanken wir ebenso wie die vorigen Jak. Bernoulli[2]); er bemerkte ferner, daß, wenn man ein Licht in das Auge der Spirale

---

1) Unter den reellen log. Spiralen $\varrho = ae^{k\omega}$ gibt es solche, die ihre eigenen Evoluten sind; solche Kurven heißen logarithmische Selbstevoluten; für dieselben genügt keine Gleichung der Form

$$e^{k\lambda\pi} - k = 0, \quad \text{wo} \quad \lambda = -\frac{2n+1}{2} \text{ und } n = 1, 3, 5, \ldots$$

m. s. G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Curven* II. Aufl. (Leipzig 1910) S. 103. M. Allé hat ferner bewiesen (*Ein Beitrag zur Theorie der Evoluten*; Wiener Ber., CXIII, 1904), daß sie die einzigen Kurven sind, die jene Eigenschaft besitzen.

2) S. den Aufsatz *Lineae cycloidales, evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, pericausticae. Earum usus et simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis* (Acta erud. Mai 1692). Die von Bernoulli angegebenen Reproduktionen der log. Spirale sind nicht die einzig existierenden; von denen, die ihm entgangen sind, erwähnen wir folgende von Hâton de la Goupillière entdeckte (*De la courbe qui est elle même sa propre podaire,* Liouvilles Journ. 2e Sér. XI, 1866, oder *Mémoires divers*, II éd., Paris 1909): „Wenn man eine Kurve sucht, deren Fußpunktkurve eine ihr selbst ähnliche ist, nur um einen gewissen Winkel gedreht, so gelangt man zu einer log. Spirale.“ Eine weitere ergibt sich aus folgendem Satze: „Die Aberrationskurve einer log. Spirale ist eine andere log. Spirale“ (F. J. van den Berg, *Over krommingskegelsnede van vlakke kromme lynen*, Amsterd. Verh. 3. Ser. IX, 1892). Vgl. endlich die Aufgabe 107, aufgestellt von Peche in Arch. Math. Phys., III. Reihe, VIII, 1904. S. 173, aufgelöst von Meißner das. IX, 1905, S. 94.

bringt, auch die Brennlinie durch Reflexion (Katakaustika), sowie die durch Refraktion (Diakaustika), sowie die sog. Antikaustika und Perikaustika wiederum ihr gleiche log. Spiralen sind.[1]) Entzückt und begeistert von dieser Eigenschaft der log. Spirale, sich immer wieder selbst zu erzeugen, schrieb der berühmte Geometer: „Cum autem ob proprietatem tam singularem tamque admirabilem mire mihi placeat spira haec mirabilis, sic ut ejus contemplatione satiari vix queam, cogitavi illam ad varias res symbolice repraesentandas non inconcinne adhiberi posse. Quoniam enim semper sibi similem et eandem spiram gignit, utcumque volvatur, evolvatur, radiet; hinc poterit esse vel sobolis parentibus per omnia similis Emblema; Simillima Filia Matri: vel (si rem aeternae veritatis Fidei mysteriis accomodare non est prohibitum) ipsius aeternae generationis Filii, qui Patris velut Imago, et ab illo ut Lumen a Lumine emanans eidem ὁμόσιος existit, qualiscumque adumbratio. Aut, si mavis, quia Curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis et numero eadem, poterit esse vel fortitudinis et constantiae in adversitatibus; vel etiam Carnis nostrae post varias alterationes, et tandem ipsam quoque mortem ejusdem numero resurecturae symbolum; adeo quidem, ut si Archimedem imitandi hodiernum consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum Epigraphe: *Eadem numero mutata resurget.*“[2])

Für die Untersuchung der log. Spirale erweisen sich die Gleichungen in Polarkoordinaten (1) oder (1′), sowie die natürliche Gleichung (5) als die geignetsten. Dennoch möge auch eine Folgerung angeführt werden, die man aus der kartesischen Gleichung ziehen kann.

Aus Gl. (1′) ergibt sich, wenn logarithmiert wird

$$\frac{1}{2}\log\left[(x+iy)(x-iy)\right] = \log c + \operatorname{ctg}\mu\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

oder
$$\frac{1}{2}\log\left[(x+iy)(x-iy)\right] = \log c + \frac{\operatorname{ctg}\mu}{2i}\log\frac{iy+x}{iy-x};$$

wenn man nun $x+iy=\xi$, $x-iy=\eta$ setzt, so erhalten wir eine Gleichung von folgender Form

$$\xi^{\frac{1-\alpha i}{2}}\cdot\eta^{\frac{1+\alpha i}{2}} = Const., \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

die uns zeigt, daß die log. Spirale eine spezielle, interszendente binomische Kurve ist (vgl. Bd. I, S. 317); wir werden in Nr. 228 sehen, wie wichtig diese Beobachtung ist, welche die log. Spirale mit anderen allgemeineren Kurven verknüpft.

---

1) Vgl. die hübsche Monographie von A. Michalitschke, *Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale,* II. Aufl. (Prag, 1891).

2) Die eigentliche Quelle, aus der diese Sätze unmittelbar fließen, haben Klein und Lie (Math. Ann. II) entdeckt: Die Spirale ist die Bahnkurve für eine kontinuierliche Schar von linearen Transformationen ihrer Ebene.

195. Mit der Beschreibung einiger von John Collins[1]) und Th. Olivier[2]) erfundenen Instrumente zur Zeichnung der logarithmischen Spirale wollen wir uns nicht aufhalten und dieses Kapitel damit beschließen, daß wir einige von ihr abgeleitete Kurven erwähnen:

I. Wir betrachten die beiden durch folgende Gleichungen dargestellten Spiralen:

$$\varrho_1 = ce^{\omega \operatorname{ctg} \mu}, \qquad \varrho_2 = ce^{-\omega \operatorname{ctg} \mu};$$

offenbar sind diese zwei gleiche zueinander in bezug auf die Polarachse symmetrische Kurven. Setzen wir nun $\varrho = \varrho_1 \pm \varrho_2$, so erhalten wir zwei neue Kurven, die wie folgt dargestellt werden

$$\varrho = c \operatorname{Cos}(\omega \operatorname{tg} \mu) \quad . \quad . \quad (8) \qquad \varrho = c \operatorname{Sin}(\omega \operatorname{tg} \mu) \quad . \quad . \quad (9)$$

H. Dittrich, der sie zuerst betrachtet hat[3]), nannte die erste Summenspirale und die zweite Differenzenspirale[4]); er bediente sich derselben, um die hyperbolischen Funktionen geometrisch darzustellen; augenscheinlich sind diese Kurven auf hyperbolischem Gebiete die Analoga zu Rhodoneen (Bd. I, S. 358); wir werden ihnen (in Nr. **213**) von einem anderen Ausgangspunkte her wieder begegnen.

II. Wenn $z = x + iy$ und $Z = X + iY$ zwei komplexe Variabelen sind und man setzt

$$Z = \frac{z+1}{z-1},$$

so wird dadurch zwischen den Punkten (x, y) und (X, Y) eine isogonale, involutorische Korrespondenz hergestellt. Da nun

$$X + iY = \frac{x+iy+1}{x+iy-1}, \qquad X - iY = \frac{x-iy+1}{x-iy-1},$$

so folgt daraus

$$X^2 + Y^2 = \frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}, \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x+1} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x-1}.$$

Nennen wir jetzt R, Ω die Polarkoordinaten des Punktes (X, Y); in der z-Ebene betrachten wir nun die Punkte $(\pm 1, 0)$ und nennen ϱ_1, ϱ_2 die Abstände derselben von dem ursprünglichen Punkte (x, y); schließlich seien ω_1 und ω_2 die Winkel, welche die x-Achse mit der Verbindungslinie jener beiden festen Punkte mit diesem beweglichen

1) *Correspondence of scientific men of the seventeenth century etc.*, (Oxford, 1841), S. 218—219; vgl. A. Favaro, *Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica* (Bibl. mathem., Neue Reihe, 5, 1891).

2) *Compléments de géométrie déscriptive* (Paris, 1845) S. 102; *Mémoires de géométrie déscriptive* (Paris, 1851) S. 284.

3) *Die logarithmische Spirale* (Progr. Breslau, 1872).

4) Aubry (*De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes*, Journ. de math. spéc. 4. Sér. V, 1896, S. 29) bezeichnet sie mit dem Namen Spirales tractrices.

bildet: die beiden letzten Gleichungen können dann folgendermaßen geschrieben werden

$$R = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \qquad \Omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Folglich erhält man, wenn man die oben definierte Transformation bei der logarithmischen Spirale

$$R = \frac{a_1}{a_2} e^{b\Omega}$$

ausführt, die neue, durch folgende Gleichung dargestellte Kurve

$$\frac{\varrho_1}{a_1 e^{b\omega_1}} = \frac{\varrho_2}{a_2 e^{b\omega_2}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

die die beiden festen Punkte $(\pm 1, 0)$ als asymptotische Punkte hat; sie heißt die logarithmische Doppelspirale.[1])

III. Wenn man die Vektoren der log. Spirale $\varrho = ae^{m\omega}$ $(m = \operatorname{ctg} \mu)$ um eine konstante Länge b verlängert, so erhält man eine neue Linie, dargestellt durch die Gleichung

$$\varrho = ae^{m\omega} + b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Sie wurde 1840 von dem Konchyliologen C. F. Naumann vorgeschlagen, um die Orthogonalprojektion des Konchylienhauses auf eine zur Spindel senkrechte Ebene darzustellen, daher der Name Konchospirale, mit welchem sie bezeichnet wird. Vom mathematischen Standpunkte aus bietet die Konchospirale ziemlich geringes Interesse; dennoch mögen zwei Umstände nicht unerwähnt bleiben. Erstens: da die Gleichung (11) ergibt

$$\lim_{\omega = -\infty} (\varrho - b) = 0,$$

so ist der Kreis mit dem Zentrum im Auge der Spirale und dem Radius b ein asymptotischer Kreis für die Kurve. Zweitens: Bei Variation der Konstanten a, b, m stellt die Gleichung (11) ∞^3 Kurven dar, unter denen sich schon bekannte Kurven finden; für $b = 0$ z. B. hat man die ∞^2 logarithmischen Spiralen und für $a = 0$ oder $m = 0$ ∞^1 Kreise. Ferner aber, wenn $a = -b = \frac{\alpha}{m}$ gesetzt wird, so wird (11)

$$\varrho = \frac{\alpha}{m} e^{m\omega} - \frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m}\left(1 + m\omega + \frac{m^2\omega^2}{2!} + \cdots\cdots - 1\right)$$
$$= \alpha\omega + \frac{m\alpha\omega^2}{2!} + \cdots\cdots;$$

---

1) G. Holzmüller, *Über die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Curvensysteme* (Zeitschr. Math. Phys. XVI, 1871) und *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1882) S. 65.

läßt man jetzt m gegen 0 konvergieren, so erhält man die Gleichung $\varrho = a\omega$, welche die Archimedische Spirale darstellt; schließlich, wenn man $b = -\lambda a$ setzt, so wird die Gleichung (11)

$$\frac{\varrho}{a} = e^{m\omega} - \lambda,$$

läßt man a unendlich groß werden, so erhalten wir

$$\omega = \frac{1}{m} \log \lambda$$

die Gleichung einer durch den Anfang gehenden Geraden.[1])

Achtes Kapitel.

Die Klothoide.

196. Die natürliche Gleichung der logarithmischen Spirale S. 65, Gl. (5) drückt algebraisch aus, daß sie eine Linie von der Art ist, daß die Krümmung in einem beliebigen Punkte umgekehrt proportional dem Bogen ist. Diese Bemerkung führt natürlich zu der Frage nach der Kurve, bei welcher die Krümmung in einem beliebigen Punkte direkt proportional dem Bogen ist. Auf diese Frage wird schon in einem hinterlassenen Aufsatze von Jak. Bernoulli hingewiesen, sie wird jedoch nicht weiter untersucht[2]); die Untersuchung läßt sich aber leicht mit Hilfe der allgemeinen Methode zur Bestimmung der gewöhnlichen Darstellung einer durch ihre natürliche Gleichung gegebenen Kurve ausführen.[3]) Da nach der Annahme

$$R \cdot s = a^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

so hat man $$f(s) = \frac{a^2}{s}, \qquad \varphi = \int \frac{ds}{f(s)} = \frac{s^2}{2a^2};$$

daher umgekehrt $s = a\sqrt{2\varphi}$, deswegen ist

$$x = \int_0^\varphi \frac{a}{\sqrt{2\varphi}} \cos\varphi \cdot d\varphi, \qquad y = \int_0^\varphi \frac{a}{\sqrt{2\varphi}} \sin\varphi \cdot d\varphi.$$

---

1) Weitere Einzelheiten über die fragliche Kurve und ihre Anwendungen s. in der Dissertation von A. H. Grabau, *Über die Naumannsche Conchospirale und ihre Bedeutung für die Conchyliometrie* (Leipzig, 1872).

2) *Invenire curvam, cujus curvedo in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est quae ab appenso pondere flectitur in rectam* (Jac. Bernoulli opera p. 1084—86).

3) Vgl. I. Bd. S. 156, Fußnote 3.

Setzt man $\varphi = \frac{\pi v^2}{2}$, so werden diese Gleichungen zu

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\cdot dv, \quad y = a\sqrt{\pi}\int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\cdot dv, \text{ und } s = a\sqrt{\pi}v. \quad (2)$$

Die hier auftretenden Integrale sind die sogenannten[1]) Fresnelschen Integrale, die in der mathematischen Theorie des Lichtes vorkommen; dann hat der französische Physiker A. Cornu[2]), um eine deutliche geometrische Darstellung der Diffraktionserscheinungen zu erhalten, zuerst die durch die Gleichungen (2) dargestellte Kurve betrachtet; jedoch viel später erst bemerkte E. Cesàro[3]), daß sich diese Kurve der durch Gleichung (1) ausgedrückten Eigenschaft erfreut.

Die Gleichungen (2) zeigen, daß für $v = 0$, $x = y = s = 0$ und daher — wegen Gl. (1) — $R = \infty$ ist; **folglich ist der Anfangspunkt ein Wendepunkt der Klothoide.** Ebenfalls zeigen die Gleichungen (2), daß gleichen und entgegengesetzten Werten von v auch gleiche und entgegengesetzte Werte von x und y entsprechen, **folglich ist die Kurve symmetrisch in bezug auf den Ursprung.** Lassen wir nun v unendlich groß werden; so sehen wir, weil

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}\cdot dv = \int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}\cdot dv = \frac{1}{2}$$

ist[4]), **daß der Punkt $A\left(\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, \frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right)$ ein asymptotischer Punkt der Kurve ist.** Ein anderer derartiger Punkt ist der zu A in bezug auf den Ursprung symmetrische Punkt A'. Die Kurve besteht demnach aus zwei sich im Ursprunge treffenden zueinander in bezug auf diesen symmetrischen Spiralen (Taf. II, Fig. 18). Diese Gestalt veranlaßte Cesàro ihr den Namen Klothoide[5]) zu geben, den die Kurve behalten dürfte.

---

1) „Sogenannten", weil G. Vacca (Revue de Mathématiques VII, 1901, S. 104) bemerkt hat, daß sie schon von Euler 1781 untersucht wurden (vgl. *Inst. Calculi Integr.* IV, 1794, S. 339—343).

2) *Etudes sur la diffraction: methode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction* (C. R. LXXVIII, 1874; Journ. physique theor. appl. III, 1874). Daher der Name Cornusche Spirale, den die Kurve durch H. Poincaré (*Savants et écrivains.* Paris, 1910, S. 106) erhielt.

3) *Les lignes barycentriques* (Nouv. Ann. Math., 3e Sér. V, 1886); *Sulla curva rappresentation dei fenomeni di diffrazione* (Nuovo Cimento, 3. Ser. XXVIII, 1890; C. R. CX, 1890).

4) S. z. B. Serret, *Calcul intégral,* II. Aufl. (Paris, 1880) S. 136.

5) Außer der in Note 3 zitierten Abhandlung siehe auch *Natürliche Geometrie* S. 15 und *Allg. Analysis und Infinitesimalrechnung* S. 808.

Ist ε der Kontingenzwinkel, so ist bekanntlich $R = \frac{ds}{d\varepsilon}$ und daher ist (1) gleichbedeutend mit

$$s \cdot ds = a^2 \cdot d\varepsilon,$$

und nach Integration $$s^2 = 2a^2\varepsilon,$$

welche von ähnlicher Form ist, wie die kanonische Gleichung der Parabel. Das zeigt uns, daß die Klothoide sich nicht unterscheidet von einer Kurve, die schon lange Zeit vorher von A. Peters[1]) und K. C. F. Krause[2]) untersucht worden ist, und von letzterem (aus leicht begreiflichem Grunde) mit dem Namen „parabola originaria longitudinaris" belegt worden war.

Die Klothoide erfreut sich vielerlei Eigenschaften, von denen die meisten durch Cesàro bemerkt worden sind, wir beschränken uns darauf folgende anzuführen:

Der Schwerpunkt eines Klothoidenbogens ist der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Schmiegungskreise in den Endpunkten des Bogens. Die Klothoide ist die einzige Kurve, bei welcher der Schwerpunkt eines beliebigen Bogens auf der Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte für die Endpunkte des Bogens liegt.[3])

Die natürliche Gleichung der logarithmischen Spirale und der Klothoide zeigt, daß diese beiden Kurven Spezialfälle der durch die Gleichung

$$R = ks^m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

charakterisierten Kurven sind[4]); wir werden in Nr. **211** sehen, daß zu derselben Kategorie noch eine andere bemerkenswerte Kurve (nämlich die Kreisevolvente) gehört. Diese Kurven — die sogenannten Pseudospiralen[5]) — haben die Eigentümlichkeit, daß ihre Evoluten Kurven sind, die derselben Gattung angehören. Wenden wir nämlich die in Kap. 3 des Abschnitts VII aufgestellten Formeln an[6]), welche die natürlichen Koordinaten der Punkte einer Kurve mit denjenigen der

1) *Neue Curvenlehre* (Dresden, 1835) S. 173.

2) *Nova theoria linearum curvarum* (München, 1835) S. 79.

3) *Die Parallelkurve der Klothoide* wurde von H. Wieleitner untersucht (Arch. Math. Phys., III. Reihe, XI, 1907).

4) H. Onnen, *Discussion d'un système de spirales d'après leurs équations essentielles* (Arch. néerlandaises X, 1875) und G. Pirondini, *Intorno a una famiglia notevole di linee piane* (Giorn. Matem. XXX, 1892). Ein halbes Jahrhundert vorher war auf diese Kurven Puiseux gestoßen (s. den II. Teil des Aufsatzes *Problèmes sur les developpées et les developpantes des courbes planes*, Liouvilles Journ. IX, 1844).

5) G. Pirondini, *Sur les pseudo-spirales* (Teixeira Journ. XV, 1905), wo die Kurve $\varrho = a^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{n+1}{n}}$ als *n-te ideelle Evolute des Punktes* bezeichnet wird.

6) Wir empfehlen dem Leser davon alsbald Kenntnis zu nehmen, da wir dieselben im Verlaufe dieses Abschnittes gelegentlich mehrfach anwenden werden.

entsprechenden Punkte ihrer Evolute verknüpften, so erkennen wir, daß die natürliche Gleichung der Evolute von (3) erhalten wird, wenn man aus den beiden folgenden Gleichungen s eliminiert

$$R_1 = mk^2 s^{2m-1}, \qquad s_1 = ks^m;$$

daher ist

$$R_1 = mk^{\frac{1}{m}} s_1^{\frac{2m-1}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und diese Gleichung ist also von der Form (3). — Die dem Falle $m = -1$ entsprechende Evolute der Klothoide (1) ist in Fig. 19 auf Taf. II beispielshalber dargestellt.

Neuntes Kapitel.

Die Zykloiden.

197. Der geometrische Begriff der Bewegung, den wir bei der Definition der Quadratrix des Dinostratus (Nr. **178**) und der Archimedischen Spirale (Nr. **184**) auftreten sahen, ist der Ursprung einer großen Reihe wichtiger Kurven, denen dieses Kapitel sowie die folgenden vier gewidmet sind.

Wenn ein Kreis ohne zu gleiten auf einer festen Geraden, der Basis, rollt, so beschreibt jeder Punkt seiner Ebene eine Linie, die man Zykloide oder Radlinie nennt, oder genauer eine gemeine Zykloide, wenn der erzeugende Punkt auf der Peripherie des bewegten Kreises liegt, eine verlängerte, wenn er außerhalb, eine verkürzte, wenn er innerhalb derselben liegt. Wer hat zuerst diese Linie betrachtet? Diese Frage ist schwer zu beantworten; denn der Begriff dieser Linie entsteht sehr leicht, z. B. wenn man die Bewegung eines Wagenrades betrachtet, und ein Ansporn zu dieser Betrachtung kann in dem Umstande gefunden werden, daß, wenn man geometrisch die gemeine Zykloide konstruieren könnte, man ohne weiteres jeden Kreis rektifizieren könnte, und die Teilung eines beliebigen Kreisbogens in Teile, die gewissen Bedingungen genügen sollen, auf die analoge Aufgabe für eine Gerade zurückgeführt hätte. Nichts also hindert uns, anzunehmen, daß die Alten die Zykloide gekannt haben. Eine Stelle bei Jamblichus[1]), wo die Rede von einer „Linie doppelter Bewegung“ ist, erfunden von Karpus von Antiochien, um den Kreis zu quadrieren, ist als sich auf unsere Kurve beziehend interpretiert worden.[2]) Jedoch genügt diese nicht, um die Zykloide unter die seit Alters her bekannten Kurven zu rechnen; wir können daher nicht umhin,

---

1) *Comment. in Aristotelis phys. libros quattuor priores,* ed. Diels, S. 60.

2) P. Tannery, *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité,* § II (Bull. Sc. math. astr. 2e Sér., VIII, 1884).

andere neuere Namen als mit der Entdeckung dieser Kurve verknüpft anzuführen.[1]) Abgesehen von dem Kardinal von Cusa, der von Wallis[2]) auf Grund von Zeugnissen ziemlich zweifelhaften Wertes unter die Entdecker der Zykloide gerechnet wird, treffen wir zunächst auf Karl von Bouvelles, der im Jahre 1501 ihr Auftreten bei dem Problem der Quadratur des Kreises bemerkte[3]) und Galileo Galilei, der ungefähr 100 Jahre später (1599) die gemeine Zykloide betrachtete, ihr den Namen gab, mit dem wir sie heute bezeichnen und vergebens versucht hat ihre Fläche zu bestimmen, indem er sich dabei der Wage bediente.[4])

Diese Gelehrten gehören der Periode an, die wir als die vorgeschichtliche Periode der Zykloide bezeichnen können; ihre eigentliche Geschichte beginnt etwa 1625 und genau genommen, als P. Mersenne im Jahre 1628, weil es ihm nicht gelang, die Eigenschaften der Zykloide aufzudecken (deren Definition er wahrscheinlich von Schülern Galileis erfahren hatte), Roberval aufforderte, sie zu untersuchen. Dieser Geometer fand nun 1634, daß die ganze Fläche der gemeinen Zykloide (von ihm Trochoide, von τρόχος Rad, genannt) gleich dem Dreifachen der Fläche des erzeugenden Kreises sei: ein höchst beachtenswerter Satz, der die Blicke der mathematischen Welt auf die Zykloide zu lenken vermochte und alsbald (1638) von Descartes und Fermat bestätigt wurde. Kurz darauf gelang Wren die Rektifikation dieser Kurve und etwa um dieselbe Zeit entdeckte Pascal an ihr — er nannte sie Roulette — so viele und so elegante Eigenschaften, daß er es für angemessen hielt, den Beweis derselben als Thema eines öffentlichen Wettbewerbes auszusetzen (1658). Welches das Resultat desselben gewesen und welches die Gründe, weshalb Wallis und P. La Loubère (die einzigen Bewerber) die ausgesetzte Prämie nicht erhielten, das hat Pascal

---

1) Vgl. S. Günther, *War die Zykloide bereits im 16. Jahrhundert bekannt?* (Bibl. math., Neue Reihe, 1887).

2) *An extract of a letter, of May 4, 1697, concerning the Cycloïd known to Cardinal Cusanus, about the year 1450; and to Carolus Bovillus about the year 1500* (Phil. Trans. R. Soc., London 1697, S. 561).

3) Bovillus, *Geometriae introductionis libri sex* (Parisiis, 1501). Die betreffende Stelle ist in Maupin, *Opinions et curiosités touchant les mathématiques* (Paris, 1898) S. 11 abgedruckt.

4) „Quella linea arcuata sono più di cinquant' anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parve da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che lo descrive ma non fu così, benchè la differenza non sia molta." Brief von G. Galilei an B. Cavalieri vom 24. Febr. 1640 abgedruckt in *Opere di G. Galilei, Edizione nazionale* (Firenze, 1906) S. 153—154. Vgl. auch Fabroni, *Vitae Italorum doctrina excellentium.* II. (Pisis, 1788) S. 12.

weitläufig erzählt[1]); wir werden uns weder damit aufhalten, noch auch wollen wir in die Klagen der Besiegten mit einstimmen; wenn wir auf diese öffentliche Herausforderung hinweisen, so geschieht das, um hervorzuheben, daß diese der Zykloide eine ungemeine Berühmtheit verlieh und wahrscheinlich nicht zuletzt die Ursache war, daß so viele hervorragende Geometer des 17. Jahrhunderts sich mit ihr beschäftigten: diese bezeichnen die erste Periode in der Geschichte unserer Kurve.[2])

Die Erfindung der Infinitesimalrechnung lieferte neue Methoden zur Untersuchung der Zykloide: die wichtigen von Huygens, Leibniz und Joh. Bernoulli entdeckten Sätze über die Quadratur zeigten, wie viel noch zu tun übrig blieb, ehe man die Untersuchung ihrer Eigenschaften erschöpft hatte; dann waren es Fragen der Naturphilosophie, bei denen die gemeine Zykloide auftrat, und die von Huygens und anderen angegeben wurden[3]), welche diese zweite Periode der Geschichte der Zykloide verlängerten und bewirkten, daß sie nicht weniger wichtig erscheint als die erste.

In den obigen Zeilen, in denen die allmähliche Entwickelung der Theorie der Zykloide in großen Zügen wiedergegeben wurde, ist zu gleicher Zeit das in diesem Kapitel zu entwickelnde Programm vorgezeichnet, nämlich die Darlegung der hervorragendsten Eigenschaften der Zykloiden mit Angabe ihrer Entdecker, so daß der obige historische Überblick durch bestimmte mathematische Angaben beleuchtet wird.

198. Wir beginnen mit der Aufsuchung der Gleichung der Zykloide, sowohl der gemeinen (Galilei'schen) als auch der anderen (Roberval'schen oder Descartes'schen?). Es sei C der Mittelpunkt, r der Radius des bewegten Kreises und d der Abstand des erzeugenden Punktes P von C, wir nehmen ferner die Basis als x-Achse und das von der Anfangslage des Punktes P auf diese gefällte Lot als y-Achse. Ist nun (s. Taf. II, Fig. 20, 21, 22) P' eine beliebige Lage des erzeugenden Punktes, C' die entsprechende des Mittelpunktes, K' der Berührungspunkt der entsprechenden Lage des bewegten Kreises mit der x-Achse, und schließlich O' die augenblickliche Lage desjenigen Punktes der Peripherie des rollenden Kreises, der ursprünglich sich in dem Koordinatenanfange O befand, so ist offenbar $O'K' = OK'$.

1) *Histoire de la Roulette, appellée autrement Trochoïde ou Cycloïde, ou l'on rapporte, par quels degrés on est arrivé à la connaissance de cette ligne* (Oeuvres de B. Pascal, V, La Haye 1779, S. 135—214).

2) In diese Periode gehört ein lebhafter Prioritätsstreit zwischen Torricelli und Roberval; der Leser findet die Einzelheiten im II. B. der *Vorlesungen* von M. Cantor, sowie in der *Histoire des mathématiques* von Montucla (2. Aufl., II, Paris 1799, S. 52—73).

3) Vgl. Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendungen aller krummen Linien usw.* (Nürnberg, 1802) S. 122—124.

Jetzt ziehen wir den Durchmesser $K'C'$ und projizieren auf ihn den Punkt P' in N'; dann ist ersichtlich

$$x = OK' - N'P', \quad y = C'K' - C'N';$$

bezeichnen wir nun den Winkel $O'C'K'$ mit φ, so ist klar, daß

$$\text{arc } O'K' = r\varphi, \quad N'P' = d \sin\varphi, \quad C'N' = d\cos\varphi,$$

daher

$$x = r\varphi - d\sin\varphi, \quad y = r - d\cos\varphi \quad \ldots \quad (1)$$

Damit haben wir die parametrische Darstellung für alle drei Zykloiden; im Falle der gemeinen Zykloide ($d = r$) wird diese zu

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi).^{1)} \quad \ldots \quad (1')$$

Lassen wir die Achsen sich um einen Winkel $-\lambda$ drehen, und nehmen wir dann den Anfangspunkt in geeigneter Weise, so können wir die Gl. (1) durch folgende Gleichungen von symmetrischer Form ersetzen

$$x = d\sin\psi - \psi\cdot r\cos\lambda, \quad y = d\cos\psi - \psi\cdot r\sin\lambda,$$

oder auch

$$x = d\sin\psi - p\psi, \qquad y = d\cos\psi - q\psi;$$

in diesem letzteren Falle ist $\sqrt{p^2+q^2}$ der Radius des erzeugenden Kreises, und daher ist die Zykloide eine verlängerte, gemeine oder verkürzte, je nachdem $\sqrt{p^2+q^2} \gtreqless d$ ist.

Die Gleichungen (1) bieten im allgemeinen das bequemste Mittel, die Zykloiden darzustellen; zuweilen kann sich aber die Gleichung in x, y als nützlich erweisen, die man erhält, wenn man φ aus den Gleichungen (1) eliminiert; sie ist

$$x = r \text{ arc cos} \frac{r-y}{d} - \sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}, \quad \ldots \quad (2)$$

welche im Falle $d = r$ wird zu[2])

$$x = r \text{ arc cos} \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}. \quad \ldots \ldots \quad (2')$$

---

1) Es folgt daraus, daß bei der konformen Abbildung, die durch die Funktion $z = 1 + w - e^w$ definiert ist, der Geraden $u = 0$ die gemeine, durch den Kreis mit dem Radius 1, erzeugte Zykloide entspricht $x = 1 - \cos v$, $y = v - \sin v$; vgl. Amstein, *Quelques exemples de représentation conforme* (Bull. Soc. Vaudoise XVI, 1882).

2) Schreiben wir die Gleichung (2′) folgendermaßen

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2ry - y^2}} - \sqrt{2ry - y^2},$$

so findet man eine von Leibniz entdeckte und ziemlich berühmte Gleichung; s. einen Brief an Huygens vom 11./21. Juli 1690 (*Leibniz* ed. Gerhard, II, S. 43—44) und einen an Wallis vom 19./29. März 1697 (das. IV, S. 14), außerdem einen 1686 in den *Acta eruditorum* veröffentlichten Aufsatz mit dem Titel *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (das. V, S. 231).

Wir bemerken alsbald, daß aus (2) sich ergibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}}{y},$$

somit lautet die Gleichung der Tangente an die Zykloide im Punkte (x, y)

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}}{y}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Daraus folgt, daß die Berührungspunkte der vom Punkte $P(X, Y)$ an die Zykloide gezogenen Tangenten auf einer Kurve liegen, deren Gleichung ist

$$(X-x)^2(d+r-y)(d-r+y) - y^2(Y-y)^2 = 0 \,. \quad . \quad (4)$$

Da diese im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung mit P als Doppelpunkt ist[1]), so folgt: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an die verlängerte oder verkürzte Zykloide gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve vierter Ordnung, die jenen Punkt zum Doppelpunkte hat;** dies zeigt ferner: **Jede verlängerte oder verkürzte Zykloide ist eine panalgebraische Kurve, die einem Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$ angehört.** — Im Falle der gemeinen Zykloide wird aber die Gleichung (4)

$$(X-x)^2(2r-y) - y(Y-y)^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

folglich: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an die gemeine Zykloide gezogenen Tangenten liegen auf einer zirkularen Kurve dritter Ordnung, die jenen Punkt zum Doppelpunkte hat (d. i. auf einer Sluse'schen Konchoide); jede gemeine Zykloide gehört einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 1$.**

Um eine gute Konstruktion für die Tangente oder Normale in einem Punkte der Zykloide zu erhalten, beachten wir, daß aus Gl. (1) sich ergibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \frac{d \sin \varphi}{r - d \cos \varphi}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

diese Funktion liefert die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangente im Punkte P' (mit dem Parameter φ) der Zykloide mit der x-Achse bildet, oder auch des Winkels Θ, den die Normale in diesem Punkte P' mit der y-Achse bildet. Wenn wir nun (s. Taf. II, Fig. 20, 21, 22) die Gerade $P'K'$ ziehen und mit ψ den Winkel $P'K'N'$ bezeichnen, so erhalten wir aus dem Dreiecke $K'N'P'$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{N'P'}{N'K'} = \frac{d \sin \varphi}{r - d \cos \varphi};$$

also ist $\psi = \Theta$. Folglich bildet die durch P' gehende Normale mit der Geraden $K'N'$ einen Winkel gleich $P'K'N'$, fällt daher mit $P'K'$

---

1) Der Punkt $P(X, Y)$ ist eine Spitze, wenn er einer der Geraden $Y = 0$, $Y = r \pm d$ angehört.

zusammen. **Um also die Normale in einem beliebigen Punkte der Zykloide zu konstruieren, genügt es, diesen Punkt mit demjenigen zu verbinden, in welchem die entsprechende Lage des erzeugenden Kreises die Basis berührt.**[1])

199. Besehen wir uns die Gleichungen (1), so erkennen wir, daß, wenn wir in ihnen φ in $\varphi + 2k\pi$ verwandeln (wo k eine ganze Zahl ist) y sich nicht verändert, und x nur um $2k\pi r$ zunimmt; dies zeigt: **Wird eine Zykloide einer translatorischen Bewegung in der Richtung der Basis von der Größe $2k\pi r$ unterworfen, so fällt die Kurve wieder mit sich selbst zusammen.** Die Kurve besteht aus unzähligen einander kongruenten Teilen; um die Gestalt eines einzelnen derselben zu erkennen, genügt es z. B. φ zwischen 0 und 2π, oder zwischen $-\pi$ und $+\pi$ variieren zu lassen. — Die Gleichungen (1) und (2) zeigen, daß die Punkte, in denen die Zykloide die Basis schneidet, durch $\varphi = \arccos \frac{r}{d}$ gegeben sind; diese Punkte sind nur dann reell, wenn $r \leqq d$; **folglich treffen nur die gemeine und die verlängerte Zykloide ihre Basis.** Die Maximal- und Minimalwerte von y sind $r \pm d$; **folglich liegt die Kurve (1) vollständig innerhalb des von den Geraden $y = r + d$ und $y = r - d$ begrenzten Streifens.**

Um die Doppelpunkte, falls solche existieren, aufzufinden, muß man solche Wertepaare φ, ψ aufsuchen, denen gleiche Werte sowohl von x als auch y entsprechen; es entstehen also die Beziehungen

$$r\varphi - d \sin \varphi = r\psi - d \sin \psi, \qquad \cos \varphi = \cos \psi;$$

schließen wir, weil nichtssagend, die Lösung $\varphi = \psi$ aus, so ergibt sich wegen der zweiten Beziehung nur noch die zweite $\psi = -\varphi$, welche die erste Beziehung verwandelt in

$$r\varphi - d \sin \varphi = 0.$$

Die Lösung $\varphi = 0$ ist auszuschließen, weil sie nichts anderes als die Anfangslage des bewegten Punktes liefert; zur Bestimmung des φ bleibt also nur die Gleichung

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{r}{d};$$

---

1) Diese Konstruktion findet sich in einem ungemein wichtigen Briefe von Descartes an Mersenne vom 23. August 1638 (*Oeuvres de Descartes*, éd. Tannery et Adam, II, Paris 1898, S. 307—311). Für die gemeine Zykloide findet sie sich schon in dem berühmten *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* von Fermat, dem Descartes am 10. Januar 1638 mitgeteilt (*Oeuvres de Fermat* I, S. 136, III, S. 144; vgl. den Brief von Fermat an P. Mersenne vom 22. Oktober 1638, das. II, S. 171). Über dasselbe Thema siehe Roberval, *Observations sur la composition des mouvements* etc. (Mém. Acad. Sciences VI, 1730, S. 58) ebenso einige Briefe von R. de Sluse an Pascal und Oldenburg, datiert vom 6. Juli, 2. August und 13. September 1858, ferner vom 29. April und 26. Mai 1659, veröffentlicht alle von C. Le Paige im XVIII. B. des *Bullettino di Bibliografia e Storia etc.*

da nun immer $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \leqq 1$ ist, so muß, damit diese Gleichung reelle Wurzeln habe, $r \leqq d$ sein, **folglich haben die verkürzten Zykloiden keine Doppelpunkte.** Im Falle $\frac{r}{d} < 1$ läßt die vorige Gleichung zwei reelle, einander gleiche aber entgegengesetzte Wurzeln zu; Gleichung (5) zeigt dann, daß die entsprechenden Tangenten gleiche Winkel mit der y-Achse bilden, während (1) und (1′) erkennen lassen, daß für ihren gemeinsamen Berührungspunkt $x = 0$ ist. **Die verlängerte Zykloide hat demnach unendlich viele Doppelpunkte, deren Abszissen Vielfache vom Umfange des rollenden Kreises sind.** Im Grenzfalle $r = d$ fallen jene Tangenten zusammen, **folglich hat die gemeine Zykloide unendlich viele Spitzen.**

Noch eine Gestalteigenschaft der Zykloide ergibt sich aus der Bemerkung, daß der Krümmungsradius derselben im allgemeinen durch die Formel gegeben wird

$$R = \frac{[r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi]^{\frac{3}{2}}}{d(r\cos\varphi - d)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und im Falle der gemeinen Zykloide durch

$$R = 4r\sin\frac{\varphi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6')$$

Aus (6) geht hervor, daß Wendepunkte der Kurve die durch die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r-d}{r+d}}$ bestimmten Punkte sind; damit diese nun reelle Wurzeln habe, muß $r \geqq d$ sein, folglich: **Die verlängerten Zykloiden haben keine Wendepunkte;** im Falle $d = r$, sind diejenigen Punkte, in denen $R = 0$ die, für welche $\varphi \equiv 0$ (*mod.* 2π); dies sind die Spitzen; **demnach sind nur die verkürzten Zykloiden mit Wendepunkten versehen.** Aus unserer Diskussion ergibt sich, daß man die verkürzte, gemeine, verlängerte Zykloide in einer anschaulicheren Bezeichnungsweise, Wendepunkts-, Spitzen- und Knotenpunktszykloide nennen könnte.

200. Bezeichnen wir mit ds_c das Bogendifferential der durch Gleichung (1) dargestellten Zykloide, so haben wir

$$ds_c = d\varphi\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Wir setzen nun $\quad r + d = \frac{a}{2}, \quad |r - d| = \frac{b}{2}$

und erhalten $\quad ds_c = \frac{d\varphi}{2}\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}},$

und, wenn wir $\varphi = 2\psi$ setzen,

$$ds_c = d\psi\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\psi}.$$

Betrachten wir jetzt die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

oder

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi,$$

so ist deren Bogen s_e im Differential

$$ds_e = d\psi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \psi},$$

demnach ist $ds_c = ds_e$. Diese beachtenswerte Beziehung zwischen einem Zykloiden- und Ellipsenbogen ist von Blaise Pascal entdeckt worden und kann kurz wiedergegeben werden, indem man sagt: **Die Rektifikation einer beliebigen Zykloide hängt im allgemeinen von der Rektifikation einer Ellipse ab.**[1]) Wenn es sich jedoch um eine gemeine Zykloide handelt, so erfordert die Rektifikation nur die Anwendung der Kreisfunktionen; für $d = r$ wird nämlich Gleichung (7) zu

$$ds_c = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (7')$$

welche zwischen 0 und φ integriert ergibt

$$s_c = 4r\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) = 8r \sin^2 \frac{\varphi}{4}. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Um die Länge des zwischen zwei Spitzen gelegenen Zykloidenbogens zu erhalten, genügt es hierin $\varphi = 2\pi$ einzusetzen; man erhält dann als Resultat $8r$, und somit kommen wir zu dem folgenden Satze von Wren: **Der zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen gelegene Bogen einer gemeinen Zykloide ist gleich dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises.**[2])

Die von der Ordinate der Kurve (1) beschriebene Fläche S, wenn φ von 0 bis 2π variiert, wird gegeben durch

$$S = 2\int_0^\pi y \cdot dx = 2\int_0^\pi (r - d \cos \varphi)^2 \cdot d\varphi$$

$$= \left| (2r^2 + d^2)\varphi - 4dr \sin \varphi + \frac{d^2 \sin 2\varphi}{2} \right|_0^\pi = (2r^2 + d^2)\pi = 2\pi r^2 + \pi d^2.$$

Die Fläche ist also gleich dem doppelten Inhalte des rollenden Kreises vermehrt um den Inhalt des Kreises, der den Abstand des

---

1) *Dimensions des lignes courbes de toutes les roulettes* (Oeuvres de B. Pascal V, La Haye 1779, S. 411). Vgl. auch: Giannini, *Opuscula mathematica* (Parma, 1773) S. 85; Küpper, *Uebungsaufgaben für Schüler* (Arch. Math. Phys. XXVII, 1856); J. Neuberg, *Sur la cycloïde* (Nouv. Corr. Math., V. 1879).

2) Nach Wallis, *Tractatus duo.* (Opera mathem. I, S. 533—541 wurde dieser Satz von Wren 1658 entdeckt; vgl. die Note *Propositio Domini Wren, Demonstrata a Claudio Mylon die 26. Januarii 1659,* beigefügt einem Briefe, den Mylon unter dem 31. Januar 1659 an Huygens schickte (*Oeuvres de Huygens* II, S. 335).

erzeugenden Punktes vom Mittelpunkte des rollenden zum Radius hat. Setzt man im speziellen $d = r$, so erhält man den Satz von Roberval, welcher besagt: **Bei der gemeinen Zykloide ist die Fläche zwischen der Basis und dem von zwei aufeinanderfolgenden Spitzen begrenzten Bogen gleich dem Dreifachen des rollenden Kreises.**[1])

Bei der Aufstellung dieses wichtigen Satzes wurde Roberval veranlaßt, die Betrachtung einer neuen, mit der Zykloide eng verbundenen Kurve einzuführen, die er zu dem Zwecke die Gefährtin der Zykloide (trochoidis comes sive socia) nannte.[2]) Sie wird in folgender Weise konstruiert: Durch einen beliebigen Punkt P' der Zykloide (Taf. II. Fig. 20) ziehe man die Parallele zur Basis und trage auf ihr von P' aus in dem Sinne, in welchem die Bewegung erfolgt, die Strecke $P'N'$ gleich der Hälfte der Sehne, welche der erzeugende Kreis auf dieser Parallelen ausschneidet, ab; der Punkt N' liegt dann auf der Gefährtin der Zykloide. Die Koordinaten von N' werden offenbar ausgedrückt durch

$$x = r\varphi, \qquad y = r(1 - \cos\varphi);$$

durch Elimination von φ erhält man

$$r - y = r\cos\frac{x}{r},$$

welche Gleichung ersichtlich eine der Tschirnhausenschen Quadratrix ähnliche Kurve darstellt.[3]) Man kann bemerken, daß die von der Gefährtin der Zykloide und der Basis begrenzte Fläche S_1 gegeben wird durch

$$S_1 = 2r^2\int_0^\pi (1 - \cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi r^2.$$

Sie ist also die mittlere Proportionale zwischen (πr^2), der Fläche des rollenden Kreises und derjenigen $(\pi\cdot\overline{2r}^2)$ des Kreises, der zum Radius den Durchmesser des ersteren hat. Roberval hat außerdem bemerkt, daß $S - S_1 = \pi r^2$. Er bediente sich ferner derselben Hilfskurve, um

1) *De trochoide ejusque spatio* (Mém. de l'Acad. des Sciences VI, 1730) S. 311; s. auch einen Brief an Fermat vom 1. Juni 1638 (*Oeuvres de Fermat* II, S. 151), ebenso zwei Briefe zwischen Mersenne und Descartes gewechselt, 28. April und 27. Mai 1638 (*Oeuvres de Descartes*, éd. Adam et Tannery II, 1898, S. 116 und 135). Ein geometrischer sehr einfacher Beweis des Robervalschen Satzes steht in *The mathematical and other Writings of R. L. Ellis* (Cambridge, 1863) S. 224.

2) *De trochoïde etc.* S. 63 und 306. Montucla dagegen gebraucht (*Histoire des mathématiques*, Nouv. éd. Paris 1799, II, S. 72) den Namen „petite cycloïde".

3) Mit Recht bemerkt daher J. Wallis (Brief an Leibniz vom 6. April 1797 abg. in Leibniz ed. Gerhardt, IV, S. 18): „Et Gallorum socia Cycloidis est ea Curva quae (mihi) terminat Sinum rectorum." — Schreibt man die obige Gleichung wie folgt

$$\frac{y}{r} = 1 - \cos\frac{x}{r},$$

so sieht man, daß man die Kurve auch Sinusversuslinie nennen kann.

das durch Rotation der Zykloide (immer begrenzt zu denken zwischen zwei Spitzen) um ihre Basis erzeugte Volumen V zu ermitteln.[1]) Um die von ihm erhaltenen Resultate zu bestätigen, bezeichnen wir mit V_1 das ähnlich erzeugte Volumen der Begleitkurve der Zykloide und mit U das des umbeschriebenen Zylinders. Durch Anwendung bekannter Formeln finden wir

$$V = 5\pi^2 r^3, \qquad V_1 = 3\pi^2 r^3, \qquad U = 8\pi^2 r^3.$$

Daher ist $$\frac{V}{U} = \frac{5}{8}, \qquad \frac{V_1}{U} = \frac{3}{8}, \qquad V + V_1 = U,$$

wie auch der französische Geometer erhalten hat. Sind daher g und g_1 die Ordinaten der Schwerpunkte der Flächen S und S_1, so hat man nach dem Papus-Guldinschen Satze

$$V = 2\pi g \cdot S, \qquad V_1 = 2\pi g_1 \cdot S_1,$$

folglich ist $$g = \frac{5}{6} r, \qquad g_1 = \frac{3}{4} r.$$

Wir überlassen es dem Leser in ähnlicher Weise (wie es Roberval 1649 getan hat) das durch Rotation der Zykloide um ihre Mittellinie erzeugte Volumen zu berechnen, sowie den Schwerpunkt des Bogens zu bestimmen[2]) und kehren zur Quadratur der gemeinen Zykloide zurück, um einige wichtige darauf bezügliche Sätze anzuführen.

201. Derjenige ältesten Datums wurde von Huygens[3]) entdeckt. Um ihn darzulegen, beachten wir vor allem, daß die Gleichungen (1′) ergeben

$$\int x \cdot dy = r^2 \int (\varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)\, d\varphi$$

$$= r^2 \left\{ -\varphi \cos \varphi + \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right\} + Const.$$

Zeichnen wir nun den erzeugenden Kreis in der Lage, in welcher er den Kulminationspunkt A der Zykloide berührt (Taf. III, Fig. 23), und sei B sein Mittelpunkt und H der Berührungspunkt mit der Basis; durch den Mittelpunkt G des Radius AB ziehen wir die Parallele zur Basis der Zykloide, welche die Kurve in L und M

---

1) Anspielungen auf die Fragen der Kubatur machen Descartes in einem Briefe an P. Mersenne vom 11. Oktober 1638 (*Oeuvres de Descartes,* éd. Adam et Tannery II, 1898, S. 395) und Fermat in einem Briefe an denselben vom 1. April 1640 (*Oeuvres de Fermat* II, S. 191). Ebenfalls bezieht sich darauf die Prop. XX des *Tractatus Mechanicorum* (1670) von Wallis (*Opera mathematica* I, S. 815—835).

2) Saint-Germain, *Recueil complémentaire d'exercises sur la mécanique rationelle* (Paris, 1889) S. 56.

3) Dieser Satz wurde zuerst von Huygens an Ism. Bouillaud durch Brief vom 25. Juni 1658 mitgeteilt (*Oeuvres de Huygens* II, S. 200) und nachher an Carcavy (Brief vom 16. Januar 1659), das. S. 315; veröffentlicht wurde er durch Pascal in der o. a. *Histoire de la roulette.*

sowie die y-Achse in L' schneidet; sei dann noch A' der Schnitt dieser Achse mit der durch A zur Basis gezogenen Parallelen, so haben wir

$$\text{Fläche } A'L'LA = \int_{y=\frac{3r}{2}}^{y=2r} x \cdot dy$$

$$= r^2 \Big| - \varphi \cos \varphi + \sin \varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \Big|_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\varphi=\pi} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{3\sqrt{3}r^2}{8};$$

folglich ist die Fläche $AGDLA = \frac{3\sqrt{3}r^2}{8}$, und das Segment $ADLMEA = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$. Letzteres bedeutet aber die Fläche des einem Kreise mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks; demnach ist die Zykloidenzone $ADLMEA$ exakt quadrierbar.

Dies bemerkenswerte von Huygens erlangte Resultat veranlaßte Leibniz nach weiteren zu suchen, und das nicht vergeblich. Er fand nämlich folgendes[1]): Zieht man durch den Mittelpunkt B des erzeugenden Kreises in der Lage, in welcher er den Kulminationspunkt A berührt, die Parallele zur Basis, welche den Kreis, die Zykloide und die y-Achse bzw. in E, F und B' schneidet (Taf. III, Fig. 24), so ist das von der Geraden AF und dem entsprechenden Zykloidenbogen begrenzte Segment gleich dem Dreiecke ABE. Man hat nämlich

$$\text{Segment } AFDA = \text{Trapezfläche } AA'BFA - \text{Fläche } AA'B'FDA$$

$$= \frac{r}{2}\left(\pi r + r\frac{\pi}{2} - r\right) - r^2 \Big| - \varphi \cos \varphi + \sin \varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} 2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 = \triangle AEB,$$

wie behauptet war.

Die beiden einzeln soeben bewiesenen Sätze führten Joh. Bernoulli zur Auffindung eines anderen Satzes, der diese beiden als Spezialfälle in sich schließt; er gelangte nämlich zur Entdeckung unendlich vieler exakt quadrierbarer Flächen bei der gemeinen Zykloide.[2]) Um darzulegen, wie diese bestimmt werden, betrachten wir wiederum den rollenden Kreis in der Lage, in der er die Zykloide im Kulminations-

---

1) *Extrait d'une lettre de M. Leibniz écrite d'Hannovre à l'auteur du Journal touchant la quadrature d'une portion de la roulette* (Journ. des Savants 1678, oder *Leibniz*, ed. Gerhardt, V, S. 116—17). Vgl. auch einen Brief von Leibniz an Oldenburg v. 15. Juli 1674 (das. I, S. 52), ebenso die zwischen Leibniz und dem Marquis de l'Hôpital gewechselten Briefe vom 30. September, 1. Dezember 1695 u. 15. Januar 1696 (das. II, S. 299, 304, 311).

2) *Cycloidis primariae segmenta innumera quadraturae determinatio etc.* (Acta erud. Juli 1699; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 322—327).

punkte A berührt; sei H der Mittelpunkt (Taf. III, Fig. 25) und F der Berührungspunkt der Basis; es seien I und K Punkte des Durchmessers AH derart, daß $AK = HI = \eta$; durch K und I ziehen wir die Parallelen zur Basis $D'DM\overline{D}$ und $B'BL\overline{B}$, und wollen nun die Fläche der Segmente $BCDB$ und $BCD\overline{D}B$ berechnen, wo C ein beliebiger Punkt des Bogens BD sein möge. Die den Punkten $B, D, \overline{D}$ entsprechenden Werte des Winkels φ bezeichnen wir mit $\varphi_0, \Phi, \overline{\Phi}$, und die entsprechenden Koordinaten mit x_0, y_0, X, Y, $\overline{X}, \overline{Y}$; dann haben wir:

$$\cos\varphi_0 = -\frac{\eta}{r}, \qquad \sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{r^2-\eta^2}}{r};$$

$$\cos\Phi = \cos\overline{\Phi} = -\frac{r-\eta}{r}, \qquad \sin\Phi = -\sin\overline{\Phi} = \frac{\sqrt{2r\eta-\eta^2}}{r}.$$

Nun ergibt sich aus der Figur und dem zu Anfang dieser Nummer aufgestellten allgemeinen Ausdrucke für $\int x \cdot dy$:

$$\text{Fläche } BCDB = \text{Trapez } BB'D'B - \text{Fläche } BB'D'CB$$

$$= \frac{(Y-y_0)(X-x_0)}{2} - \int\limits_{y=r+y}^{y=2r-y} x \cdot dy = \frac{(r-2\eta)(X+x_0)}{2}$$

$$- \left| -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right|_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\Phi},$$

und nach einigen Reduktionen

$$\text{Fläche } BCDB = \frac{(\eta+r)\sqrt{r^2-\eta^2}}{2} - \frac{(2r-\eta)\sqrt{2r\eta-\eta^2}}{2}.$$

Ähnlich ergibt sich

$$\text{Fläche } BC\overline{D}B = \frac{(\eta+r)\sqrt{r^2-\eta^2}}{2} + \frac{(2r-\eta)\sqrt{2r\eta-\eta^2}}{2}.$$

Verbindet man aber F mit den Punkten L und M, so hat man

$$\text{Dreieck } FIL = \frac{1}{2}(r+\eta)\sqrt{r^2-\eta^2},$$

$$\text{Dreieck } FMK = \frac{1}{2}(2r-\eta)\sqrt{2r\eta-\eta^2};$$

folglich ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fläche } BCDB \\ \text{Fläche } BCD\overline{D}B\end{array}\right\} = \text{Dreieck } FIL \mp \text{Dreieck } FMK. \quad (9)$$

Diese Doppelbeziehung enthält den Satz, durch welchen Joh. Bernoulli die beiden vorigen von Huygens und Leibniz verallgemeinerte. Er sowohl, wie auch sein Bruder Jakob, stellten noch weitere ähnliche Untersuchungen an, auf welche näher einzugehen uns versagt ist[1]);

1) *Jac. Bernoulli Opera*, S. 1129—1134; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 328—335.

wir wollen nur andeuten, daß sie zur Entdeckung einer ähnlichen Relation wie (1) führten, die für alle Zykloiden, verlängerte und verkürzte Gültigkeit hat.[1])

202. Zu anderen beachtenswerten Eigenschaften der gemeinen Zykloide führen Betrachtungen über ihre Krümmung; da nämlich [m. s. die Gl. (6'), (8) und (1')]

$$R = 4r \sin\frac{\varphi}{2}, \qquad s = 1 + r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right), \qquad y = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

so folgt

$$R^2 + (s - 4r)^2 = 4r^2 \quad \ldots (10) \qquad R^2 = 8r \cdot y. \quad \ldots (11)$$

Verlegen wir den Anfang des Bogens, so wird die Gleichung (10) zu $R^2 + s^2 = (4r)^2$. Dies ist die natürliche kanonische Gleichung der gemeinen Zykloide; in geeigneter Weise interpretiert, besagt sie: **Wenn eine Zykloide auf einer festen Geraden rollt, so ist der Ort der Krümmungszentren für die aufeinander folgenden Berührungspunkte ein Kreis, dessen Radius viermal so groß ist als der des erzeugenden Kreises.**[2]) Die Gleichung (11) hingegen besagt: **Der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte der gemeinen Zykloide ist die mittlere Proportionale zwischen der zugehörigen Ordinate und einer konstanten Größe:** eine weitere charakteristische Eigenschaft der Zykloide.[3])

Sind x_1, y_1 die Koordinaten des Mittelpunktes der Krümmung im Zykloidenpunkte (φ), so findet man leicht

$$x_1 = r(\varphi + \sin\varphi), \qquad y_1 = -r(1 - \cos\varphi); \quad \ldots (12)$$

wenn man nun die Koordinatentransformation, die durch die Formeln

$$x_1 = x' + \pi r, \qquad y_1 = y' - 2r$$

definiert wird, ausführt und einen Winkel ψ einführt, der mit φ durch die Beziehung $\varphi = \pi + \psi$ verknüpft ist, so verwandeln sich die vorigen Gleichungen in

$$x' = r(\psi - \sin\psi), \qquad y' = r(1 - \cos\psi),$$

und diese mit (1') verglichen beweisen: **Die Evolute einer gemeinen Zykloide ist eine ihr gleiche Kurve.**[4])

Das zwischen dem Kurvenpunkte und dem Schnitte mit der Basis gelegene Stück N der Normalen zur Zykloide wird gegeben durch

$$N = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = 2r\sin\frac{\varphi}{2},$$

1) Acta Erudit. Juni 1700; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 330.

2) Mannheim, *Recherches géométriques sur le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouvilles Journ. 2. Sér. IV, 1859) S. 99.

3) Tisserand, *Recueil complémentaire d'exercises sur le calcul infinitésimal* (Paris, 1895) II. Aufl. S. 251.

4) Huygens, *Horologium oscillatorium* (Paris, 1673) 3. Teil, Prop. VI.

weshalb $R = 2N$. **Der Krümmungsradius ist also doppelt so groß als die Normale; die sämtlichen Krümmungsradien werden durch eine feste Gerade (die Basis) halbiert; auch diese Eigentümlichkeit** kommt ausschließlich der gemeinen Zykloide zu.[1])

Schließlich wollen wir noch beweisen den

Satz von Guillery[2]): **Jede Parallelprojektion einer Zylinder-Schraubenlinie auf die Basisebene ist eine Zykloide, und zwar eine gemeine, verkürzte oder verlängerte, je nachdem die Neigung der Projektionsstrahlen gegen die Erzeugenden des Zylinders gleich, kleiner oder größer als die Steigung der Schraubenlinie ist.**

Betrachtet man nämlich die Schraubenlinie

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \operatorname{cotg} \mu \cdot \varphi$$

und projiziert diese in der durch die Winkel α, β, γ definierten Richtung, so erhält man den Zylinder dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{x - r \cos \varphi}{\cos \alpha} = \frac{y - r \sin \varphi}{\cos \beta} = \frac{z - r \operatorname{ctg} \mu \cdot \varphi}{\cos \gamma}.$$

Setzen wir hierzu $z = 0$, so erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen für die Darstellung der Projektionskurve

$$x = r \cos \varphi - r \operatorname{ctg} \mu \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cdot \varphi, \quad y = r \sin \varphi - r \operatorname{ctg} \mu \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cdot \varphi,$$

welche tatsächlich einer Zykloide angehören (s. Nr. **198**). Der Radius des erzeugenden Kreises ist $= r \operatorname{ctg} \mu \, \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}}{\cos^2 \gamma} = r \operatorname{ctg} \mu \cdot \operatorname{tg} \gamma$, daher ist die Zykloide eine verkürzte, gemeine oder verlängerte, je nachdem $r \operatorname{ctg} \mu \cdot \operatorname{tg} \gamma \gtreqless r$ ist, d. h. je nachdem $\gamma \lesseqgtr \mu$ ist, wie der Satz eben behauptet.

Die für die gemeine Zykloide hier bewiesenen geometrischen Eigenschaften — es sind bei weitem nicht die einzigen, die sie besitzt[3]) — zeigen hinlänglich, welch eine bemerkenswerte Kurve sie

---

1) Cesàro-Kowalewski, *Natürliche Geometrie* S. 26.

2) M. s. den XVII der *Lettres sur l'Architecture* (Bruxelles, 1847) von Guillery wie auch eine Mitteilung von Th. Olivier an die Société philomatique 1847 und die *Mémoires de géometrie déscriptive* desselben Geometers (Paris, 1851; S. 290). Für den Fall der gemeinen Zykloide spricht Montucla davon (*Histoire des math.* Nouv. éd. Paris 1799, II, S. 78) als von einer von ihm gefundenen Sache und leitet daraus ab, daß die Zykloide sich ins Unendliche erstrecke, während es scheint, daß man früher nur den zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen liegenden Teil betrachtet hat.

3) Unter den von uns übergangenen Sätzen erwähnen wir besonders den von Jac. Bernoulli in der Note *De evolutione successiva et alternante curvae cujus quoque etc.* dargelegten (Opera IV, S. 98); dieser wurde weiter untersucht von Legendre (*Exercises de calcul intégral* II, Paris 1817), von Poisson (Journ. de l'Éc. pol. XVIII, Cah.) und verallgemeinert von G. Mainardi (*Sullo sviluppo imperfetto continuo di una curva piana;* Ann. Scienze Regno Lombardo-Veneto VII,

ist, und erklären hinlänglich die Häufigkeit der seit dem 17. Jahrhundert an ihr angestellten Untersuchungen. Jedoch wuchs die Wertschätzung derselben noch ungemein, als Huygens bemerkte[1]), daß sie die Tautochrone (von ταὐτός χρόνος, dieselbe Zeit) im leeren Raume sei[2]), indem er entdeckt hatte, daß die Kurve von der Eigenschaft, daß ein schwerer Punkt, der sie durchläuft, immer in derselben Zeit den tiefsten Punkt erreicht, gleichgültig, von welchem Punkte er ausgehe, eine gemeine Zykloide mit horizontaler Basis sei, jedoch mit der Konkavität nach oben gerichtet. Doch nicht genug damit! Joh. Bernoulli[3]) stellte in den *Acta eruditorum* vom Juni 1696 und dann in einem *Programma editum Groningae A° 1697* als „problema novum, ad cujus solutionem mathematici invitantur" folgendes: „Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignari mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad altrum punctum B". Die lösende Kurve, in jenem Programm als linea celerrimi descensus bezeichnet, und heute Brachistochrone genannt (von βράχιστος χρόνος, kürzeste Zeit), ist nun eine gemeine Zykloide, und nicht, wie Galilei glaubte[4]), ein Kreisbogen: bewiesen wurde dies von Leibniz, Jak. Bernoulli, dem Marquis de l'Hôpital und Newton.[5])

Ferner: Betrachtet man bei der Bewegung eines Punktes auf einer Zykloide die Horizontale durch den Ausgangspunkt, die durch den tiefsten Punkt und diejenige, die den Abstand dieser beiden halbiert, so ist die Zeit, die der bewegte Punkt gebraucht, um von der ersten

---

1837). — Von Problemen, die durch die Zykloide gelöst werden, möge folgendes erwähnt werden: „Eine Kurve zu finden, die durch zwei gegebene Punkte geht und mit den zugehörigen Normalen und dem Bogen der Evolute ein Viereck von kleinstem Flächeninhalt begrenzt" (Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung,* Braunschweig 1900, S. 203).

1) *Horologium oscillatorium* II. Teil. Prop. XXV. M. s. auch de la Hire, *Traité de mécanique*, Mém. Acad. Sciences IX, 1666—1699. Ein sehr einfacher Beweis für den Tautochronismus der Zykloide findet sich in *The math. and other Writings of R. L. Ellis* (Cambridge, 1863) S. 326; vgl. auch Lehmann, *Theorie der Cycloide als Tautochrona. Diskussion nach der antiken geometrischen Methode* (Crelles Journ. VI, 1830).

2) Joh. Bernoulli wendet hingegen den Namen linea tachystoptota an (Brief an Leibniz v. 16. Juni 1696; *Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 291) und Jac. Bernoulli den Namen curva oligochrona (Acta erud. Mai 1697; *Opera* S. 768—778).

3) *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 155—161 und 166—169.

4) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove Firenze.* Giornata III, Prop. 36, Scolio (*Opere di Galileo Galilei*, ediz. naz., VIII; Firenze, 1898; S. 263).

5) Die ersten drei Lösungen des Problems von Bernoulli finden sich in den Acta erudit. Mai 1697, die letzte anonym in der Nr. 224 der Phil. Trans. (Jan. 1697). S. auch *Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 290, und *Is. Newtonii opuscula* I. (Lausannae et Genevae, 1744) S. 285.

Lage zur dritten zu gelangen, gleich der, welche er gebraucht, um von der zweiten in die dritte Lage zu kommen; dies wird dadurch ausgedrückt, daß man nach P. Serret[1]) sagt: die Zykloide ist eine mesochrone Kurve.

Schließlich ist die Zykloide noch mit den Anfängen der Theorie der synchronen Kurven verknüpft; Joh. Bernoulli stellte nämlich in den *Acta eruditorum* vom Mai 1697 folgende Aufgabe[2]): „Quaeritur in plano verticali curva PB, quam synchronam appellare liceat, ad cujus singula puncta B, grave ex A descendens per cycloides conterminans AB aequali tempore perveniret“. Später wurde der Begriff der synchronen Kurven bedeutend verallgemeinert: man betrachtete nämlich eine Familie von Kurven, gelegen in einer vertikalen Ebene, ausgehend von einem Punkte A, und untersuchte den Ort der Lagen, den im selben Augenblicke die Punkte einnehmen, welche die gegebenen Kurven unter dem Einflusse gegebener Kräfte durchlaufen, wenn sie zu gleicher Zeit von A ausgegangen sind.[3]) Die Behandlung dieser Aufgabe, sowie die Probleme der tautochronen und brachistochronen Kurven — sei es in der ursprünglichen Form oder unter der Annahme, daß die Bewegung in einem widerstehenden Medium erfolge — überschreitet jedoch die dieser Arbeit gesteckten Grenzen.[4])

203. Die Definition der Zykloide ist verschiedener Verallgemeinerungen fähig; einige derselben, die schon in der Periode auftraten, in welcher diese Kurve besonders eifrig untersucht wurde, mögen hier erwähnt werden.[5]) Fermat bezeichnete in einem Briefe an Carcavy vom Jahre 1660[6]), den dieser dem Huygens unter dem 6. März desselben Jahres mitteilte[7]), eine Eigenschaft einer Kurve, die schon seit 20 Jahren allgemein bekannt war, indem P. Laloubère davon in dem Anhange seines Werkes *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris* (Tolosae, 1640) gesprochen hatte.[8]) Es sind Kurven,

1) *Des methodes en géométrie* (Paris, 1855) S. 132.

2) *Joh. Bernoulli opera* I, S. 192.

3) S. die beiden von Euler hinterlassenen Abhandlungen, abgedruckt im IX. B. (1824) der *Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg.*

4) Der Leser, welcher genauere Berichte wünscht, nehme: Lacroix, *Traité de calcul differentiel et de calcul intégral* II. (Paris, 1798) S. 696; E. Pascal, *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite* (Milano, 1897) S. 172; Saint-Germain, *Recueil complémentaire d'exercises sur la mécanique rationelle* (Paris, 1898) S. 292 und 298; usw. Außerdem verweisen wir auf die historischen Arbeiten von C. Ohrtmann, *Das Problem der Tautochronen* (Berlin, 1872) und F. Amodeo, *Monografia delle curve tautocrone* (Avellino, 1883).

5) Der Kürze wegen sei nur auf die Arbeit von E. Köstlin, *Über eine transzendente Kurve, von der die Zykloide ein Grenzfall ist* (Württemberg Mitt., II. Reihe, IX, 1907) verwiesen.

6) *Oeuvres de Fermat* II, S. 445—448.

7) *Oeuvres de Huygens* III, S. 39—40.

8) Vgl. *Oeuvres de Fermat* I, S. 202, und III, S. 175.

die affin zur gemeinen Zykloide sind, indem sie durch Gleichungen von folgender Form dargestellt werden:

$$x = kr(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi), \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo k eine gegebene Zahl ist. Wenn $k > 1$, so haben wir es — nach der Fermatschen Bezeichnungsweise — mit verlängerten, wenn $k < 1$ aber mit verkürzten Zykloiden zu tun. Fermat hat bemerkt, daß **die verlängerten Zykloiden durch Kreisbögen, die verkürzten dagegen durch Parabelbögen rektifizierbar sind.** Um dies nachzuweisen, beachten wir, daß aus (13) sich ergibt

$$ds = r \cdot d\varphi \sqrt{(k^2 + 1) - 2k^2 \cos\varphi + (k^2 - 1)\cos^2\varphi};$$

setzen wir $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = u$, so können wir schreiben

$$ds = \frac{4ru \cdot du\sqrt{1 + k^2u^2}}{(1 + u^2)^2};$$

und, wenn wir statt u eine neue Variabele z einführen, derart, daß $z^2 = 1 + k^2u^2$, so erhalten wir

$$ds = \frac{4k^2rz^2 \cdot dz}{(k^2 - z^2 - 1)^2}.$$

Integrieren wir in Teilen, so ergibt sich

$$\frac{s}{2k^2r} = -\frac{z^2}{z^2 + k^2 - 1} + \int\frac{dz}{z^2 + k^2 - 1},$$

und wenn die noch unterbliebene Integration ausgeführt wird,

$$\frac{s}{2k^2r} = \begin{cases} -\dfrac{z^2}{z^2+k^2-1} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-k^2}}\log\dfrac{z-\sqrt{1-k^2}}{z+\sqrt{1-k^2}}, & \text{wenn } k < 1, \\[2ex] -\dfrac{z^2}{z^2+k^2-1} + \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{z}{\sqrt{k^2-1}}, & \text{wenn } k > 1. \end{cases}$$

Da nun, wenn $k < 1$, man es mit verkürzten, wenn $k > 1$, mit verlängerten Fermatschen Zykloiden zu tun hat, so kann man hieraus den oben ausgesprochenen Satz erschließen.[1])

Den Fermatschen Zykloiden begegnet man in Fragen der darstellenden Geometrie.[2]) Bemerkenswert ist die Tatsache, daß, wahrscheinlich ohne die Beobachtungen des berühmten Tolosanischen Senators zu kennen, Laisant diese Kurven wieder auffand, als er die Entstehungsweise der gemeinen Zykloide verallgemeinerte.[3]) Laisant

---

1) Dieser Satz wurde von B. Tortolini im J. 1839 wiedergefunden; man sehe die Abh. *Sul metodo inverso delle tangenti* im Giornale arcadico und übersetzt in Crelles Journ. XXVI, 1843; vgl. auch Tortolini, *Rivista bibliografica. Sugli archi di cicloide* (Ann. di Matem. VI, 1865).

2) F. J., *Exercises de géométrie déscriptive* (III. éd., Paris, 1893) S. 545.

3) *Essai sur les fonctions hyperboliques* (Paris, 1874) S. 56ff. S. auch S. Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S., 1881) S. 243ff.

bemerkte nämlich: wenn ein Punkt sich auf der Peripherie einer Ellipse mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, während diese selbst sich in einer mit einer Achse parallelen Richtung gleichförmigen Bewegung befindet, so ist die Trajektorie der resultierenden zusammengesetzten Bewegung eine Kurve, die durch zwei Gleichungen von folgendem Typus darstellbar ist:

$$x = \frac{r}{a^2}(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r\cos\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

aus diesen geht hervor, daß die Kurve für $a = 1$ eine gemeine, jedoch für $a \neq 1$ eine Fermatsche Zykloide ist. Laisant nannte sie elliptische Zykloide zum Unterschiede von der ähnlich vermittelst einer Hyperbel erzeugten Kurve, die er hyperbolische Zykloide nannte, und die durch folgende Gleichungen dargestellt wird:

$$x = \frac{r}{a^2}(\varphi - \mathfrak{Sin}\,\varphi), \qquad y = r\,\mathfrak{Cos}\,\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

204. Unter dem 6. Mai 1674 schrieb Michelangelo Ricci an Huygens: „Man nehme eine Gerade AB von beliebiger Länge (Taf. III, Fig. 26), an die sich zwei gleiche und ähnlich gelegene Halbkreise AGE, BCD anschließen, deren Durchmesser AE und BD senkrecht auf AB stehen; dann nehme man auf der Peripherie des letzteren die Punkte C, C usw., ziehe durch diese die Parallelen zu AB und bestimme auf diesen die Punkte F, F usw. derart, daß der Bogen BCD sich verhält zu DC, DC usw. wie AB zu CF, CF usw.; die Punkte F, F usw. liegen dann auf einer Linie, die eine primäre Zykloide ist, wenn AB gleich der Peripherie BCD, eine sekundäre, wenn man AB davon verschieden annimmt. Dieselbe Kurve $DFF\ldots A$, gleichsam Diagonale des krummlinigen Parallelogramms $DCC\ldots BAGE$ teilt dieses in zwei gleiche Teile; hieraus folgt, daß das krummlinige Dreieck $AFF\ldots DCC\ldots B$ die Hälfte von diesem, als auch von dem Rechtecke $AEDB$ ist. Zieht man die Gerade AD, so ist der krummlinige Teil $ADFF\ldots A$ gleich der erzeugenden Figur $BCC\ldots D$.“[1])

Um die Gleichung der sekundären Zykloide von Ricci zu finden, nehmen wir AB als x-Achse, AE als y-Achse, setzen $AB = a$, $BD = 2r$, $\sphericalangle DOC = \omega$ (O sei der Mittelpunkt des Halbkreises BCD). Dann finden wir alsbald

$$x = a - r\sin\omega - \frac{a\omega}{\pi}, \qquad y = r + r\cos\omega;$$

oder, wenn wir $\omega = \pi - \varphi$, $a = \pi R$ setzen,

$$x = R\varphi - r\sin\varphi, \qquad y = r - r\cos\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Dies ist die gesuchte analytische Darstellung; da für $R = r$ Gl. (16) mit (1′) übereinstimmt, so ist ersichtlich, daß die gemeine Zykloide

1) *Oeuvres de Huygens* VII, S. 381.

ein Spezialfall dieser neuen Kurve ist. Aus der Gleichung (16) ergibt sich ferner:

$$\text{Fläche } ABDFF\ldots A = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} y \cdot dx = \int_0^\pi (r - r\cos\varphi)(R - r\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= Rr\int_0^\pi d\varphi - 2Rr\int_0^\pi \cos\varphi \cdot d\varphi + r^2\int_0^\pi \cos^2\varphi \cdot d\varphi = \pi\left(Rr + \frac{r^2}{2}\right),$$

und daher

$$\text{Fläche } ABCC\ldots DFF\ldots A = \pi Rr = \frac{1}{2}\pi R 2r = \frac{1}{2}a \cdot 2r$$

$$= \frac{1}{2}\text{ Rechteck } ABDE = \frac{1}{2} ABCC\ldots DGEA.$$

Dieser Satz ist der wichtigste der von Ricci ausgesprochenen; die übrigen sind Folgerungen hieraus. Sie scheinen der Allgemeinheit unbekannt geblieben zu sein, bis zu dem Zeitpunkte (1897), als der oben erwähnte Brief ans Tageslicht kam zugleich mit denen, die den wissenschaftlichen Briefwechsel von Huygens betreffen. Jedoch die Kurve, auf die sich die Sätze beziehen, blieb nicht ganz unbekannt. Wenn man nämlich die Normalen der durch Gl. (1′) dargestellten Zykloide in einem konstanten Verhältnisse k teilt, so erhält man eine Kurve von folgender analytischer Darstellung:

$$x = \frac{r}{1+k}\left\{(1+k)\varphi - \sin\varphi\right\}, \qquad y = \frac{r}{1+k}(1 - \cos\varphi);$$

da diese von der Form (16) ist, so stellt sie eine sekundäre Zykloide von Ricci dar. Von solchen Betrachtungen ausgehend stieß Mannheim[1]) auf diese Kurven, von denen er zeigte, daß sie durch Ellipsenbogen rektifizierbar seien, welche Tatsache sich auch leicht aus der Gleichung (16) nachweisen läßt.[1]) Ferner fand Clairaut[2]) bei der Behandlung gewisser Fragen aus der Mechanik, daß eine solche geliefert wird von dem Endpunkte eines Kreisradius, wenn der Mittelpunkt gleichförmig eine Gerade durchläuft, und der Radius sich gleichförmig um den Mittelpunkt dreht. Ein solche Kurve kann offenbar dargestellt werden durch zwei Gleichungen von folgendem Typus

$$x = at + b - r\sin(\alpha t + \beta), \qquad y = r - r\cos(\alpha t + \beta)$$

und diese sind leicht auf die Form (16) zu reduzieren. Es möge bemerkt werden, daß Clairaut, nachdem er die lösende Kurve in der

---

1) Nouv. Ann. Mathém., 2e Sér., III (1864) Question 699, gelöst im IV. Bde. (1865) der 2. Ser. S. 55. S. auch die Abhandl. von Mannheim, *Recherches géométriques sur les longueurs comparées de différentes courbes* (Journ. de l'École polyt. Heft XL, 1863, oder *Principes et développements de géométrie cinématique*, Paris 1894, S. 511ff.).

2) A. Clairaut, *Solutions de quelques problèmes de dynamique par rapport aux tractions* (Mém. de Paris 1736).

obigen Weise definiert hat, hinzufügt: „tout le monde reconnaitra dans cette description la cycloide allongée ou accourcie“.

Die neue Zykloide erfreut sich nicht hervorragender Eigenschaften[1]), wir verlassen daher die Kurve, um uns zu anderen wichtigeren Verallgemeinerungen der gemeinen Zykloide zu wenden.

Zuvor möge hier noch folgendes bemerkt werden: Alle Zykloiden (gemeine, verlängerte und verkürzte) können auch durch die Bewegung eines Punktes erzeugt werden, der mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Peripherie eines Kreises durchläuft, während der Kreis selbst auch mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden gleitet. Setzt man nun voraus, daß die Geschwindigkeiten der beiden Bewegungs-Komponenten nicht mehr konstant, sondern variabel nach gewissen Gesetzen sind, so erhält man Kurven, die tatsächlich Verallgemeinerungen der Zykloiden sind. Sie wurden als solche von Varignon in einer der Pariser Akademie unterm 31. März 1693 vorgelegten Abhandlung[2]) untersucht.

Zehntes Kapitel.

Die Epizykloiden, die Hypozykloiden und die Kreisevolventen.

205. Der Gedanke, welcher von der Konchoide des Nikomedes zur Pascalschen Schnecke führte, nämlich die Idee, an Stelle der geradlinigen Basis einen Kreis (vgl. Nr. **69**) zu setzen, führte auch zu den neuen zykloidischen Kurven, denen dieses Kapitel gewidmet ist. Diese Idee, die sich hier ziemlich von selbst aufdrängt, indem man die Rollbewegung eines Kreises auf einem festen Kreise betrachtet, geht mindestens bis in die Zeit Hipparchs zurück, der sich derselben bediente, um eine plausibele Erklärung der planetarischen Bewegungen zu geben (System der Epizyklen).

Wenn ein Kreis auf einem festen Kreise rollt, so kann er ihn dabei immer entweder von außen, oder immer von innen berühren; im ersteren Falle erzeugt ein beliebiger Punkt seiner Ebene eine Epizykloide (Epitrochoide oder äußere Epizykloide), im zweiten eine Hypozykloide (Hypotrochoide oder innere Epizykloide); die Beiwörter gemeine, geschweifte oder verkürzte und verschlungene oder verlängerte[3]) werden benutzt, um anzudeuten,

---

1) Der Leser wird noch leicht nachweisen, daß sie eine panalgebraische Kurve ist, die seinem Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$ angehört.

2) *Des cycloïdes ou roulettes à l'infini, traitées à la manière des lignes géométriques* (Mém. de Paris, X).

3) Nach E. Wölffing müßten die Bezeichnungen „verlängert“ und „verkürzt“ aufgegeben werden, da sie von den Schriftstellern in verschiedenem Sinne gebraucht worden.

daß der erzeugende Punkt auf der Peripherie innerhalb oder außerhalb des rollenden Kreises liegt, oder anders gesagt, daß der feste Kreis und der durch den erzeugenden Punkt um den Mittelpunkt des bewegten beschriebene Kreis durch die Peripherie des rollenden getrennt, resp. nicht getrennt werden. Dieselben Beiwörter fügt man auch bisweilen dem Namen Perizykloide bei, wenn der bewegte Kreis mit seiner Innenseite den festen von außen berührt und größer ist als dieser.[1]) Die Epi- und Hypozykloiden werden zweckmäßig auch mit dem gemeinsamen Namen zyklische Kurven oder auch Zykloidalen belegt.[2])

Die älteste Betrachtung dieser Kurven findet sich in dem Werke Albrecht Dürers[3]) *Underweysung der Messung mit dem Zyrkel und rychtscheyd* (Nürnberg, 1525), woselbst eine spezielle Epizykloide als Spinnenlinie benannt und mit Hilfe eines besonderen Instrumentes konstruiert wird.[4]) Jedoch scheinen die Worte des genialen deutschen Malers auf die Mathematiker keinen Eindruck gemacht zu haben; zum wenigsten war es mindestens 100 Jahre später, als sie unter anderm Himmelsstriche Früchte zeitigten; es war nämlich ein Franzose — de La Hire — der die erste methodische Abhandlung über sie schrieb. Dennoch scheint es, daß er in der Bestimmung dieser Kurve und der Entdeckung ihrer Anwendung auf Zahnräder, die die geringste Reibung darbieten, in Frankreich einen scharfsinnigen Vorläufer gehabt habe; denn in der Vorrede zu seinem *Traité de Mécanique* weist La Hire auf ein Rad hin, „dont la prémière invention étoit due à Mr. Desargues, qui étoit un de plus excellents géomètres de notre siècle“[5]). Ebenfalls sagt La Hire im Anfange seines *Traité des épicycloïdes et de leurs usages dans les mécaniques*, indem er auf denselben Gegenstand zurückkommt: „mais je n'ai point su, que cet excellent géomètre (Desargues) eut jamais rien expliqué de sa construction et comme il n'étoit pas appliqué à cette partie de la Géométrie,

---

1) Die Perizykloiden sind daher Epizykloiden.

2) Weißenborn, *Die cyclischen Curven methodisch und mit besonderer Rücksicht auf Constructionen usw.* (Eisenach, 1856). Perigal schlug für die zyklischen Kurven den Namen Bicircloids vor (vgl. Drach, *Phil. Mag.* 2. Ser. XXXIV, 1849). Über andere Namen s. *Intermédiaire* VI, 1899, S. 266.

3) S. auch *Alberti Dureri Institutionum geometricarum libri quatuor* (Arnheim, 1606) S. 37; vgl. S. Günther, *Geschichte des mathem. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* (Berlin, 1887) S. 367.

4) Ein anderer ähnlicher Apparat der Epizyklograph, ist von Ridolfi beschrieben worden in seiner Arbeit *Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quella dell' ellisse* (Firenze, 1844) S. 43.

5) *Mem. de l'Académie des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699,* IX. (Paris, 1730). Vgl. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par Poudra* (Paris, 1864) S. 31. Dieser wichtigen Anwendung bei Verzahnungen verdankt eine Vorrichtung zum Zeichnen der zyklischen Kurven den Namen Odontograph.

je crois qu'il en avait seulement détermine la figure mécaniquement"[1]), und diese Vermutung scheint zweifellos unannehmbar für jeden, der den hohen Wert und die Originalität der Ansichten Desargues' als Geometer anerkennt. Auf jeden Fall ist es sicher, daß die Epizykloiden und ihre wichtigsten Anwendungen in Frankreich um die Mitte des 17. Jahrhunderts bekannt gewesen sind. Dort wird wahrscheinlich auch Römer von ihnen Kenntnis erhalten haben, der einer der ersten Mitarbeiter Cassinis in dem zu Paris im Jahre 1667[2]) gegründeten großen Observatorium war, auf welchen viele, dem Beispiele von Leibniz[3]) folgend, die Erfindung dieser Kurven und die Entdeckung des Auftretens derselben in der praktischen Mechanik zurückführen; jedoch, wenn wir auch zugeben wollen, daß Römer im Jahre 1674 zu den beiden Kurvenarten gelangt sei, so gebührt die Priorität immerhin dem Desargues, der 1662 zu Grabe getragen war. Dem La Hire hingegen gebührt der Ruhm, die geometrischen Untersuchungen dieser Kurven begonnen zu haben, indem er eine ziemliche Anzahl eleganter Sätze bewies, welche sich auf die Tangenten, die Rektifikation und Quadratur beziehen; wir werden ihnen im Verlaufe unserer Betrachtungen, mit denen wir nun beginnen werden, begegnen.[4])

206. Wir bezeichnen mit R den Radius des festen, mit r den des beweglichen Kreises, mit h den Abstand des erzeugenden Punktes P vom Mittelpunkte Ω des letzteren.[5]) Als Koordinatenanfang nehmen wir das Zentrum O (s. Taf. III, Fig. 27, 28) des festen Kreises, als x-Achse eine Gerade, die durch den Berührungspunke A des festen Kreises mit dem beweglichen geht, wenn dieser sich in solcher Lage befindet, daß P gerade auf der Zentrale $O\Omega$ liegt.[6]) Wir betrachten alsdann den beweglichen Kreis in einer anderen beliebigen Lage; es sei jetzt Ω' sein Mittelpunkt, B der Berührungspunkt mit dem festen Kreise, P' die entsprechende Lage des erzeugenden Punktes und A' der Endpunkt des Radius $\Omega P'$. Dann haben wir ersichtlich

$$\text{arc}\, ALB = \text{arc}\, A'AB;$$

---

1) *Mém. de l'Ac. des Sc. depuis 1666 jusqu'à 1699,* IX, S. 222.

2) R. Wolf, *Geschichte der Astronomie* (München, 1877) S. 453.

3) Vgl. den Brief an Joh. Bernoulli vom 18. Januar 1698 und 1. Februar 1707 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, III, S. 477 und 811).

4) Eine reichhaltige Liste der bezüglichen Arbeiten wurde von E. Wölffing aufgestellt im *Intermédiaire* V, 1898, S. 235 und VI, 1899, S. 11; s. ferner den *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven* desselben Verf. (Bibl. Math. 3. Reihe, II, 1901).

5) h ist positiv zu nehmen, wenn P auf den von Ω nach A hin gehenden Strahl fällt, negativ, wenn es nach entgegengesetzter Richtung fällt.

6) Damit macht man allerdings eine beschränkende Annahme, um die gewöhnlichen Formeln zu erhalten; es ist jedoch leicht sich davon zu befreien, wie Weißenborn a. O. gezeigt hat.

setzen wir nun $\sphericalangle BOA = \varphi$, $B\Omega'A' = \psi$, so ist

$$r\psi = R\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Beachten wir nun, daß die Gerade OP' und die gebrochene Linie $O\Omega'P'$ dieselben Endpunkte haben, so ist die Projektion von $OP' =$ Proj. $O\Omega'$ + Proj. $\Omega'P'$; wir projizieren nun senkrecht auf den beiden Achsen: es ist jedoch hierbei der Fall der Epizykloide von dem der Hypozykloide zu trennen. Für die Epizykloide (Fig. 27) haben wir dann

$$O\Omega' = R + r, \quad \text{Winkel zwischen } P'\Omega' \text{ und } Ox = \varphi + \psi - \pi.$$

Dagegen ist für die Hypozykloide (Fig. 28)

$$O\Omega' = R - r, \quad \text{Winkel zwischen } P'\Omega' \text{ und } Ox = \varphi - \psi.$$

Demnach bestehen für die Epizykloide die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\varphi - h\cos(\varphi + \psi) \\ y &= (R + r)\sin\varphi - h\sin(\varphi + \psi) \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2_e)$$

dagegen haben wir für die Hypozykloiden

$$\left.\begin{aligned} x &= (R - r)\cos\varphi + h\cos(\varphi - \psi) \\ y &= (R - r)\sin\varphi + h\sin(\varphi - \psi) \end{aligned}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2_h)$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (1) liefern die analytische Darstellung aller zykloidischen Kurven; es ist im allgemeinen zweckmäßig, einen der beiden Winkel φ und ψ zu eliminieren. Eliminieren wir ψ, so werden die Gleichungen (2)

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\varphi - h\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) \\ y &= (R + r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_e)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= (R - r)\cos\varphi + h\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right) \\ y &= (R - r)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right) \end{aligned}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_h)$$

Die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Kurven wollen wir mit $\mathsf{E}(R, r, h)$ bzw. $\mathsf{H}(R, r, h)$ bezeichnen. Wenn $R < r$, so wechseln die positiven Richtungen der Koordinatenachse und die (3_h) werden zu

$$x = (r - R)\cos\varphi - h\cos\left(\frac{r-R}{r}\varphi\right),$$

$$y = (r - R)\sin\varphi - h\sin\left(\frac{r-R}{r}\varphi\right).$$

Eliminieren wir hingegen φ, indem wir setzen

$$\frac{r}{R} = n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

(n heißt dann der Modulus der Kurve), so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1+n}{n} \cos n\psi - \frac{h}{r} \cos (1+n)\psi, \\ \frac{y}{r} &= \frac{1+n}{n} \sin n\psi - \frac{h}{r} \sin (1+n)\psi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4_e)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1-n}{n} \cos n\psi + \frac{h}{r} \cos (1-n)\psi, \\ \frac{y}{r} &= \frac{1-n}{n} \sin n\psi + \frac{h}{r} \sin (1-n)\psi, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4_h)$$

man kann sich merken, daß (4_h) aus (4_e) entsteht, indem man r, ψ, n in $-r, -\psi, -n$ verwandelt; damit sind wir in der Lage, Folgerungen aus den Gl. (4_e) sogleich auf die Gl. (4_h) auszudehnen.

Aus den so gefundenen Gleichungen ergibt sich leicht eine Folgerung von großer Wichtigkeit. In (3_e) führen wir nun an Stelle der R, r, h andere Konstanten R_1, r_1, h_1 ein, die mit den ersteren durch folgende Beziehungen verknüpft sind

$$R_1 = \frac{hR}{r}, \quad r_1 = \frac{h(R+r)}{r}, \quad h_1 = R + r; \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

infolgedessen ist $R_1 < r_1$, und jene werden dann

$$x = h_1 \cos \varphi + (R_1 - r_1) \cos \frac{r_1 \varphi}{r_1 - R_1},$$

$$y = h_1 \sin \varphi + (R_1 - r_1) \sin \frac{r_1 \varphi}{r_1 - R_1};$$

und wenn wir

$$\frac{r_1}{R_1 - r_1} \varphi = \varphi_1, \quad x_1 = -x, \quad y_1 = -y$$

setzen, so können wir schreiben

$$x_1 = (R_1 - r_1) \cos \varphi_1 - h_1 \cos \left(\frac{R_1 - r_1}{r_1} \varphi_1\right),$$

$$y = (R_1 - r_1) \sin \varphi_1 - h_1 \sin \left(\frac{R_1 - r_1}{r_1} \varphi_1\right).$$

Vergleichen wir diese mit der Gleichung (3_h), so erkennt man, daß die durch sie dargestellte Kurve symbolisch mit $\mathsf{H}\,(R_1, r_1, h_1)$ bezeichnet werden darf. Folglich: **Die Epizykloide $\mathsf{E}(R, r, h)$ unterscheidet sich nicht von der Epizykloide $\mathsf{E}(R_1, r_1, h_1)$, wenn die Beziehungsgleichungen (5) bestehen.** In ähnlicher Weise ergibt sich: **Wenn die Beziehungen**

$$R_1 = \frac{hR}{r}, \quad r_1 = \frac{h(r-R)}{r}, \quad h_1 = r - R \quad \ldots \quad (5')$$

bestehen, so ist die Hypozykloide $\mathsf{H}(R, r, h)$ identisch mit der Hypozykloide $\mathsf{H}(R_1, r_1, h_1)$. Wenn $R < r$, so ist in diesen Formeln das

Vorzeichen der Differenz umzukehren. Betrachten wir den Modulus $n_1 = \frac{r_1}{R_1}$, so hat man, wenn die Gleichungen (5) bestehen, $n_1 = n + 1$, und wenn (5′) bestehen, $n_1 = n - 1$. Im Falle der gemeinen Epi- und Hypozykloiden ist $h = r$; die Gleichungen (5) werden dann $R_1 = R$, $r_1 = h_1 = R + r$, während (5′) sich verwandeln in $R_1 = R$, $r_1 = h_1 = r - R$. Man gelangt so zu der doppelten Erzeugung der gemeinen Epi- und Hypozykloiden, die von La Hire und Euler[1]) bemerkt worden ist; der entsprechende allgemeine Satz wurde später von mehreren entdeckt und verschiedentlich bewiesen.[2])

Weitere Folgerungen, die sich aus der gefundenen analytischen Darstellung der zyklischen Kurven ergeben, betreffen die Gestalt derselben. Ähnliche Betrachtungen, wie die in Nr. **199**, führen uns zu dem Schlusse, daß **die gemeinen Epizykloiden im allgemeinen unendlich viele Spitzen auf der Peripherie des Basiskreises haben, die verlängerten besitzen unzählig viele Doppelpunkte und die verkürzten unzählig viele Wendepunkte**; alle (reellen) Punkte der Kurve (3_e) liegen in dem von den Kreisen um O mit den Radien $|R + r \pm h|$, die der Kurve (3_h) innerhalb des von den Kreisen mit den Radien $|R - r \pm h|$ begrenzten Kreisringes.

207. Die Erzeugung der Epizykloiden erhält größere Klarheit und führt zu neuen Folgerungen, wenn man sie als Grenzfall einer Bewegung eines Polygons $ABCD\ldots$ auffaßt, welches sich in der Ebene derart umlegt, daß seine Seiten mit den (im allgemeinen gleichgroßen) Seiten eines festen Polygons $A'B'C'D'\ldots$ zusammenfallen.[3]) Betrachten wir die Polygone in der Lage, daß die Seite

1) *De duplici genesi tam epicycloïdum quam hypocycloïdum* (Acta Acad. Petrop. pro anno 1781, Pars I, 1784). Derselbe Satz wurde von Daniel Bernoulli bemerkt und dem Goldbach von Nicolaus Bernoulli in einem Briefe vom 2. Juni 1725 mitgeteilt; Goldbach lieferte einen Beweis desselben in seiner Antwort vom 18. September 1725 (P. H. Fuß, *Correspondance mathématique et phys. de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle*, II, St. Pétersburg 1843, S. 168—170).

2) Gildemeister, *De lineis curvis epicyloidibus et hypocycloidibus* (Diss. Marburg, 1866); Bellermann, *Epicykloiden und Hypocykloiden* (Diss. Jena, 1867); Fouret, *Sur la double génération des epicycloïdes planes* (Nouv. Ann. Math., 2e Sér. VIII, 1869). Vgl.: Proctor, *A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves* (London, 1878) S. 154—157; Vietor, *Die Polkreispaare einer Cycloide* (Zeitschr. Math. Phys. XXV, 1880); Chr. Wiener, *Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven* (Das. XXVI, 1881, u. XXVII, 1882). — F. Schilling, in einer sogleich zu nennenden Arbeit (Das. XLIV, 1899) unterscheidet die zwei Erzeugungsarten als solche mit bedecktem und freiem Zentrum, je nachdem die Fläche des rollenden Kreises den Mittelpunkt des festen bedeckt oder freiläßt.

3) R. Hennig, *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten* (Crelles Journ. LXV, 1866; daselbst werden die beiden Linien, die durch Rollen innerhalb und außerhalb derselben Kurve auf derselben Basis erzeugt werden, als die Glieder einer zweiseitigen oder Doppel-Roulette betrachtet); O. Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, II. Tl. 2. Aufl. (Leipzig, 1874) S. 320 ff.

AB des ersteren mit der Seite $A'B'$ zusammenfällt; man stelle sich nun vor, wie das bewegliche Polygon sich um den Eckpunkt B' dreht, bis seine Seite BC sich auf $B'C'$ gelegt hat; ein unveränderlich mit dem ersteren verbundener Punkt P beschreibt dann einen Kreisbogen PP_1 mit dem Mittelpunkte B' und dem Radius $B'P$, und es wird der Winkel $PB'P_1 = CB'C'$ sein. Kippen wir nun das Polygon ein zweites Mal um die Ecke C', so daß eine Ecke D auf D' fällt, so beschreibt der Punkt P_1 einen zweiten Kreisbogen mit dem Radius $C'D_1$ um den Mittelpunkt C'. Indem wir so fortfahren, erkennen wir, daß die Bahn des Punktes P aus einer Reihe von Kreisbogen besteht, deren Mittelpunkte in den Ecken des festen Polygons liegen. Nehmen wir jetzt an, daß die Seiten der Polygone unendlich klein sind, so erhalten wir eine Bewegung, die durch das Abrollen einer beweglichen Kurve auf einer festen definiert ist, und die Bahn des Punktes P (eine sogenannte Roulette oder Rollkurve; vgl. Nr. **214**) wird die Enveloppe einer Reihe von Kreisen sein, die ihren Mittelpunkt auf der festen Kurve haben. Da nun die Enveloppe in jedem ihrer Punkte die Tangente, und also auch die Normale mit der Eingehüllten gemeinsam hat, und weil die Normale der Eingehüllten (nämlich des Kreises) durch den (Mittelpunkt, d. h. den) Berührungspunkt der entsprechenden Lage der bewegten Kurve mit der festen geht, so hat man hiermit eine sehr einfache Methode, die Normale in jedem Punkte der Bahnlinie zu finden; es ist dies eine beachtenswerte Bemerkung von Descartes[1]), die als einfachsten Fall die Konstruktion der Normale an die Zykloide (s. Nr. **198**) in sich schließt. Fassen wir die vorigen Betrachtungen zusammen, so haben wir gesehen: **Jede Rollkurve kann als Enveloppe eines Kreises mit veränderlichem Radius, dessen Mittelpunkt eine feste Kurve durchläuft, aufgefaßt werden.**

Für die Epi- und Hypozykloiden können wir diesen Satz auch durch folgende Berechnung bestätigen und besser präzisieren.[2]) Wir nehmen, wie vorhin, den Mittelpunkt O des festen Kreises als Koordinatenanfang und als x-Achse die Gerade, welche den Mittelpunkt Ω des rollenden Kreises enthält, wenn er die Lage hat, daß auch der erzeugende Punkt P in diese Gerade hineinfällt (Taf. III, Fig. 27, 28, 29). Dann betrachten wir den rollenden Kreis in einer beliebigen Lage, und wir suchen die Enveloppe des Kreises mit dem Mittelpunkte Ω'

---

1) Vgl. auch Huygens, *Horologium oscillatorium,* Pars I, Prop. 15. (Bekanntlich trägt die Widmung dieses berühmten Werkes das Datum des 25. März 1673.) Ein einfacher analytischer Beweis dieses Satzes findet sich bei F. Frenet, *Note sur un théorème de Descartes. Courbe roulante sur une autre* (Nouv. Ann. Math., XIII, 1854).

2) O. Wetzell, *Die cyclischen Curven als Einhüllungscurven eines beweglichen Kreises* (Diss. Marburg, 1880).

und dem Radius $\Omega' P'$. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, so sehen wir, daß die Gleichung des eingehüllten Kreises ist

$$(x - R\cos\varphi)^2 + (y - R\sin\varphi)^2 = h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi$$

oder wegen (1)

$$x^2 + y^2 + R^2 - 2Rx\cos\frac{r\psi}{R} - 2Ry\sin\frac{r\psi}{R} = h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi. \quad (6)$$

Differenzieren wir diese nach ψ, so ergibt sich

$$x\sin\frac{r\psi}{R} - y\cos\frac{r\psi}{R} = h\sin\psi. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Vermittelst (6) und (7) können wir x und y in Funktionen von ψ ausdrücken; zu dem Zwecke setzen wir

$$x - R\cos\frac{r\psi}{R} = \xi, \qquad y - R\sin\frac{r\psi}{R} = \eta \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Die Gleichungen (6) und (7) werden dann

$$\xi^2 + \eta^2 = h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi. \quad (6') \qquad \xi\sin\frac{r\psi}{R} - \eta\cos\frac{r\psi}{R} = h\sin\psi. \quad (7')$$

Der Gleichung (6') wird genügt, wenn man setzt

$$\xi = \cos\lambda\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi}, \qquad \eta = \sin\lambda\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi}, \quad (9)$$

und die verwandeln die (7') in folgende

$$\sin\left(\frac{r\psi}{R} - \lambda\right) = \frac{h\sin\psi}{\sqrt{h^2 + r^2 + 2hr\cos\psi}};$$

und dem entsprechend

$$\cos\left(\frac{r\psi}{R} - \lambda\right) = \varepsilon\,\frac{r - h\cos\psi}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\cos\psi}};$$

(wo $\varepsilon = \pm 1$) oder wegen Gleichung (9)

$$\xi\cos\frac{r\psi}{R} + \eta\sin\frac{r\psi}{R} = \varepsilon\,(r - h\cos\psi). \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Lösen wir (7') und (10) bzw. nach ξ und η auf, so erhält man

$$\xi = a\sin\psi\sin\frac{r\psi}{R} + \varepsilon\,(r - h\cos\psi)\cos\frac{r\psi}{R},$$

$$\eta = -a\sin\psi\cos\frac{r\psi}{R} + \varepsilon\,(r - h\cos\psi)\sin\frac{r\psi}{R},$$

d. h. wegen der Gleichung (8)

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + \varepsilon r)\cos\frac{r\psi}{R} - h\varepsilon\cos\frac{(R + \varepsilon r)\psi}{R} \\ y &= (R + \varepsilon r)\sin\frac{r\psi}{R} - a\sin\frac{(R + \varepsilon r)\psi}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Dies ist die analytische Darstellung der Enveloppe, sie zeigt, daß diese aus zwei verschiedenen zyklischen Kurven besteht, entsprechend den beiden Werten ± 1, die man für ε nehmen kann.

Die Epizykloiden sind noch einer zweiten Erzeugungsweise als Enveloppen fähig; es ist nämlich leicht zu beweisen (und wir über-

lassen es dem Leser): **Wenn zwei Punkte die Peripherie eines Kreises mit Winkelgeschwindigkeiten durchlaufen, die in konstantem Verhältnisse stehen** (vgl. den Spezialfall Bd. I, S. 167), **so ist die Enveloppe der verbindenden Geraden eine Epizykloide.**[1]) Bemerkenswert ist ferner, daß eine ähnliche Kurve entsteht, wenn man alle diese Verbindungsgeraden in demselben Verhältnisse teilt.

Nicht weniger bemerkenswert ist die in folgendem Satze angegebene Erzeugungsweise: **Wenn zwei aufeinander folgende Seiten OE_1, OE_2 eines Gelenk-Parallelogramms sich gleichförmig (aber mit verschiedener Geschwindigkeit ω_1, ω_2) um den Eckpunkt O drehen, so beschreibt die vierte Ecke eine Epizykloide oder Hypozykloide.**[2]) Um dies zu beweisen, beachten wir, daß man immer annehmen kann, daß zu Anfang die beiden Seiten OE_1 und OE_2 in eine Gerade zusammenfallen; diese nehmen wir als x-Achse, setzen $OE = l_1$, $OE_2 = l_2$, und, was ja gestattet ist, $\sphericalangle E_1 Ox = t\omega_1$, $\sphericalangle E_2 Ox = t\omega_2$, wo t eine beliebige Variabele (die Zeit) ist; sind dann z_1, z_2, z die komplexen Zahlen, die in gewohnter Weise die Punkte E_1, E_2, M darstellen[3]), so haben wir

$$z_1 = l_1 e^{i\omega_1 t}, \quad z_2 = l_2 e^{i\omega_2 t}, \quad z = z_1 + z_2,$$

und daher

$$z = l_1 e^{i\omega_1 t} + l_2 e^{i\omega_2 t}. \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Trennen wir das Reelle und Imaginäre, so ergibt sich

$$x = l_1 \cos \omega_1 t + l_2 \cos \omega_2 t, \quad y = l_1 \sin \omega_1 t + l_2 \sin \omega_2 t$$

als analytische Darstellung des Ortes von M; die Form dieser Gleichung führt zur obigen Behauptung. — Wenn man nun (12) in folgender Weise schreibt:

$$z = \{l_1 + l_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}\} e^{i\omega_1 t}$$

und bekannte Sätze die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen betreffend anwendet, so schließt man: **Jede Epi- oder Hypo-**

1) Eckhardt, *Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide* (Zeitschr. Math. Phys. XV, 1870), Wolstenhohne, *On epicycloids and hypocycloids* (Proc. London math. Soc. IV, 1873) und Schwering, *Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten* (Leipzig, 1884) S. 77 ff. Als Spezialfall würde sich ergeben, „daß bei einer Uhr mit gleichlangen Zeigern, die Enveloppe der Verbindungslinien der Endpunkte entsprechender Zeigerstellungen eine Hypozykloide ist"; sind die Zeiger verschieden lang, so würde die Enveloppe die Evolute einer Epizykloide sein (s. *Intermédiaire* II, 1895, S. 9 und 396).

2) Diese Erzeugungsweise wurde von Bellermann in der S. 97, Note 2 zitierten *Dissertation*, und von J. Morley im Aufsatze *On adjustable cycloïdal and trochoidal curves* (Amer. Journ. Math., XVI, 1894), ferner in einem Spezialfalle von J. Neuberg (*Sur la cycloïde,* Nouv. corr. math. V, 1879) angegeben; F. Schilling benutzte diese neuerdings zur Konstruktion von höchst bemerkenswerten Apparaten zur Zeichnung aller zyklischen Kurven; s. die Abh. *Ueber neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyclischen Curven* (Zeitschrift Math. Phys. XLIV, 1899).

3) Die älteste Erwähnung der Anwendung der komplexen Zahlen (oder, wenn man will, der Äquipollenzenrechnung) auf die Zykloiden findet sich in einem Briefe von E. Françoise an G. Bellavitis und von diesem veröffentlicht in

zykloide kann durch einen Punkt M erzeugt werden, der gleichförmig um einen Punkt E rotiert, welcher mit konstanter Geschwindigkeit die Peripherie eines festen Kreises durchläuft. Dies ergibt sich auch durch einfache Betrachtungen aus der ursprünglichen Entstehungsweise. Beachten wir schließlich[1]), daß der Mittelpunkt des Parallelogramms OE_1ME_2 durch die komplexe Zahl $\frac{z}{2}$ dargestellt wird, so beschreibt dieser eine zu der durch M erzeugten homothetische Kurve, nämlich eine zweite Epi- oder Hypozykloide.[2])

208. Die Polargleichung der Epi- bzw. Hypozykloiden ergibt sich als von so komplizierter Form, daß sie sozusagen keinen Vorteil bietet, selbst wenn man sich auf die gemeinen beschränkt. Nützlich erweist sich dagegen in manchen Fällen die polare Differentialgleichung derselben Kurve. Um sie zu erhalten, beachten wir, daß, wenn man $\psi = \varphi$ und $h = r$ setzt, die Gleichungen (4_e) werden zu:

$$\frac{x}{r} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi, \quad \frac{y}{r} = \frac{n+1}{n} \sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi;$$

daraus ergibt sich

$$\frac{\varrho^2}{r^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + 1 - \frac{2(n+1)}{n} \cos\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

---

der *Seconda parte dell' Undicesima Rivista di giornali* (Atti. Ist. Veneto, IV Ser., Bd. I, 1871—72, S. 430—436); in diesem zu wenig bekannten Briefe finden sich elegante Sätze über die den zyklischen Kurven mit ganzem Modulus eingeschriebenen Polygone, sowie die Lösung neuer und interessanter Fragen.

1) Reincke, *Ueber cyclische Kurven, dargestellt als geometrischen Ort des Mittelpunktes derjenigen Geraden, welche zwei auf zwei concentrischen Kreisen gleichförmig bewegte Punkte in jedem Moment verbindet* (Programm Malchin 1892).

2) Die Gleichung (12), mittelst derer man jede Epizykloide darstellen kann, ist ein Spezialfall von folgender:

$$(\alpha) \qquad z = l_0 + l_1 e^{i\omega_1 t} + \cdots l_n e^{i\omega^n t},$$

wo $l_0, l_1 \ldots . l_n, \omega_1 \ldots \omega_n$ reelle gegebene Zahlen sind und t eine unabhängige Variabele. Die durch sie dargestellten Kurven wurden von Bellermann (o. a. Diss., wo der Name Zykloiden höherer Ordnung angewendet wird) und Eichler betrachtet (*Die Darstellung der cyklischen Curven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie,* Hamb. Mitt., Teil II, 1890), der auch ihre Erzeugung vermittelst eines Gelenkpolygons angab, die ähnlich der oben angegebenen für die Epizykloiden vermittelst eines Gelenkparallelogramms ist. Wir bemerken auch, daß man, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, immer $l_0 = 0$ annehmen darf; daraus können wir ableiten, daß „jede Kurve der fraglichen Art als Ort der Schwerpunkte eines Polygons angesehen werden kann, von welchem n Ecken gleichförmig konzentrische Kreise durchlaufen". Unter den fraglichen Kurven finden sich viele bei Untersuchungen aus der Optik und Mechanik. Als Spezialfall der Gleichung (α) kann man die folgende betrachten

$$(\beta) \qquad z = R_1 e^{i\omega} + R_2 e^{\frac{ip\omega}{q}} + R_3 e^{i\left(\frac{p\omega}{q} + \alpha\right)},$$

wo R_1, R_2, R_3 gegebene Längen, α ein bekannter Winkel und p, q ganze positive Zahlen sind. Sie zeigen außerordentlich verschiedene Formen, die man alle durch Benutzung der Compas Schwarzbard, der von der Firma Chateau Frères & Cie in Paris hergestellt wird, erhalten kann, und der gestattet, diese Kurven in kontinuierlichem Zuge zu zeichnen.

Da nun anderseits

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

so hat man

$$d\omega = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{dx}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{dy}{r} \end{vmatrix}}{\frac{\varrho^2}{r^2}} = \frac{r^2}{\varrho^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi.$$

Differenzieren wir die Gleichung (13), so erhalten wir

$$d\varrho = \frac{n+1}{n} \frac{r^2}{\varrho} \sin\varphi \cdot d\varphi,$$

infolgedessen wird die vorige Gleichung zu

$$\frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{2n+1}{\varrho} \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}},$$

oder auch wegen Gleichung (13)

$$d\omega = \frac{d\varrho}{\varrho} \sqrt{\frac{\varrho^2 - \frac{r^2}{n^2}}{\frac{r^2}{n^2} - \frac{\varrho^2}{(2n+1)^2}}}. \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Dies ist die angekündigte Differentialgleichung.

Wir wollen sie auf die Untersuchung der von einem Punkte $A(\varrho_0, \omega_0)$ an die Epizykloide gezogenen Tangenten anwenden. Ist $P(\varrho, \omega)$ der Berührungspunkt einer derselben, und μ der Winkel der Tangente mit dem Radius vector des Berührungspunktes, so ergibt sich aus Nr. **174**

$$\varrho = \varrho_0 \left[\sin(\omega_0 - \omega) \cdot \frac{d\varrho}{\varrho \cdot d\omega} + \cos(\omega_0 - \omega)\right]. \quad \ldots \quad (15)$$

Setzen wir hier an Stelle von $\varrho \frac{d\omega}{d\varrho}$ seinen durch (14) gegebenen Ausdruck, gehen dann zu kartesischen Koordinaten über, so ergibt sich daraus

$$\left\{\frac{x^2 + y^2 - (x_0 x + y_0 y)}{y_0 x - x_0 y}\right\}^2 = \frac{\frac{r^2}{n^2} - \frac{x^2 + y^2}{(2n+1)^2}}{x^2 + y^2 - \frac{r^2}{n^2}}.$$

oder, von dem überflüssigen Faktor $x^2 + y^2$ befreit,

$$[x^2 + y^2 - (xx_0 + yy_0)]^2 = \frac{r^2}{n^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \frac{(xy_0 - x_0 y)^2}{(2n+1)^2};$$

nun kann man mittels einer geschickt gewählten Koordinatentransformation dieser Gleichung die folgende Form geben

$$[X^2 + Y^2 - (XX_0 + YY_0)]^2 = a^2 (X - X_0)^2 + b^2 (Y - Y_0)^2,$$

die die Fußpunktkurve eines zentrischen Kegelschnittes darstellt (vgl. Nr. 270). Folglich: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkte an eine (algebraische oder transzendente) Epi- oder Hypozykloide ziehen kann, liegen auf der Fußpunktkurve eines**

Kegelschnittes in bezug auf jenen Punkt.[1] Damit ist gezeigt, daß **jede Epi- oder Hypozykloide eine panalgebraische Kurve ist, die einem Systeme mit den Charakteristiken** $\mu = 2$, $\nu = 2$ angehört.

Bezeichnen wir mit s den Bogen der durch die Gleichungen (3_e) dargestellten Epizykloide, so erhalten wir durch Differentiation die Gleichung

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \frac{R+r}{r}\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\frac{R\varphi}{r}}. \quad . \quad (16)$$

Wir setzen nun $r + h = a, \quad r - h = b, \quad \frac{R\varphi}{r} = \omega$

und erhalten
$$ds = \frac{2(R+r)}{R}\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\omega} \cdot d\omega.$$

Betrachten wir dagegen die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und nennen deren Bogen σ, so bekommen wir, wie bekannt,

$$d\sigma = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\omega} \cdot d\omega,$$

und folglich ist
$$ds = \frac{2(R+r)}{R} \cdot d\sigma.$$

Rechnen wir nun sowohl auf der Ellipse als auch auf der Epizykloide die Bogen von dem Punkte an, für welchen $\omega = 0$, so ergibt sich folgende bemerkenswerte Relation

$$s = \frac{2(R+r)}{R}\sigma.$$

Die Rektifikation der Epi- und Hypozykloiden hängt somit, wie die der Zykloiden im allgemeinen (vgl. Nr. 250) von elliptischen Integralen ab (s. auch Bd. I, S. 460).[2] In dem speziellen Falle jedoch, daß $h = r$, wird die Gleichung (16)

$$\frac{ds}{d\varphi} = 2(R+r)\sin\frac{R\varphi}{2r}$$

und gibt
$$s = Const. - \frac{4r(R+r)}{R}\cos\frac{R\varphi}{2r},$$

daher ist die Rektifikation der gemeinen Epi- und Hypozykloide elementar ausführbar.

Wählt man den Anfangspunkt des Bogens derart, daß für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, so hat man im besonderen

$$s = \frac{8r(R+r)}{R}\sin^2\frac{R\varphi}{4r}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

---

1) R. Blum, *Zykloiden und Zykloidalen als Umhüllungskurven und deren Zusammenhang mit den Fußpunktkurven der Kegelschnitte* (Progr. Stuttgart, 1902).

2) Geometrische Ableitungen dieses Satzes findet man bei A. Gob, *Réctification des épitrochoïdes* (Liège Mém., III Sér., IV, 1902) und H. Wiener, *Die Rektifikation der zyklischen Kurven* (Württemberg. Mitt., II. Reihe, IX. 1907).

hieraus kann man die Länge des zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen gelegenen Epizykloidenbogens ableiten, indem man $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$ setzt; man erhält dann als Resultat

$$8r\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 8r(1 + n),$$

wie auch La Hire[1]) fand.

Bezeichnen wir mit dS die Fläche des Elementar-Sektors, der als Bogen das Bogenelement der Epizykloide (3_e) hat, so erhalten wir

$$\frac{dS}{R+r} = \frac{x dy - y dx}{2(R+r)} = \frac{1}{2}\left\{R + r + \frac{h^2}{r} - \frac{h(R+2r)}{r}\cos\frac{R\varphi}{r}\right\}d\varphi,$$

und daher durch Integration

$$S = \frac{R+r}{2}\left\{\left(R + r + \frac{h^2}{r}\right)\varphi - \frac{h(R+2r)}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\}; \quad . \quad . \quad (18)$$

eine Konstante fügen wir nicht hinzu, da wir annehmen, daß für $\varphi = 0$ auch $S = 0$ sei. Im Spezialfalle der gemeinen Zykloiden wird der Ausdruck

$$S = \frac{(R+r)(R+2r)}{2}\left\{\varphi - \frac{r}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\} \text{ }^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Machen wir hiervon eine Anwendung, indem wir $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$ setzen; wir erhalten $S = \frac{\pi r(R+r)(R+2r)}{R}$; nun hat der von den beiden, den Winkeln $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$ entsprechenden Radien begrenzte Sektor des festen Kreises den Flächeninhalt $\frac{1}{2}R \cdot \frac{2\pi r}{R}R = \pi r R$; der Unterschied jener beiden Sektoren beträgt also $\pi r^2\left(3 + 2\frac{r}{R}\right) = \pi r^2(3 + 2n)$, wie auch La Hire gefunden hat.[3])

Im Falle der gemeinen Epi- oder Hypozykloide wird der Krümmungsradius $\mathfrak{R}$ gegeben durch

$$\mathfrak{R} = \frac{4r(R+r)}{2r+R}\sin\frac{R\varphi}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Eliminieren wir φ aus den Gleichungen (17) und (20), so finden wir

$$\left\{\frac{Rs}{4r(R+r)} - 1\right\}^2 + \left\{\frac{2r+R}{4r(R+r)}\mathfrak{R}\right\}^2 = 1.$$

---

1) *Mém. de l'Ac. des Sc. depuis 1666 jusqu'à 1699,* IX (Paris, 1730) S. 234 u. 239.

2) Newton, *Principia*, Lib. I, Prop. 49.

3) *Mém. de l'Acad. des Sciences etc.* S. 230 u. 231; vgl. auch Caswell, *The quadrature of a portion of the epicycloid* (Phil. Trans. 1695, Nr. 217), und E. Halley, *A general proposition for measuring all cycloids and epicycloids* (Das. Nr. 218).

Dies ist die natürliche Gleichung der betrachteten Epizykloide[1]); in der üblichen Weise interpretiert, sagt sie aus: **Wenn eine gemeine Epizykloide auf einer festen Geraden rollt, so liegen die Krümmungszentren der aufeinander folgenden Berührungspunkte der Kurve auf einer Ellipse.**[2])

Aus der oben bewiesenen Tatsache, daß die natürliche Gleichung einer jeden gemeinen Epizykloide von folgendem Typus ist

$$\frac{\mathfrak{R}^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

läßt sich eine wichtige Folgerung ziehen. Diese Gleichung kann nämlich durch folgende beiden ersetzt werden

$$\mathfrak{R} = a \cos \lambda, \qquad s = b \sin \lambda,$$

wo λ eine unabhängige Variabele ist. Sind nun $\mathfrak{R}_1$ und s_1 der Krümmungsradius und der Bogen der Evolute von (21), so hat man (vgl. Nr. **251**)

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}\frac{d\,\mathfrak{R}}{ds}, \qquad s_1 = \mathfrak{R}$$

oder wegen der vorhergehenden Gleichungen

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{a^2}{b}\sin\lambda, \quad s_1 - a\cos\lambda.$$

Durch Elimination von λ ergibt sich, daß

$$\frac{\mathfrak{R}_1{}^2}{a^2} + \frac{s_1{}^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

die natürliche Gleichung der Evolute der Kurve (21) ist; vergleicht man sie mit (18) selbst, so schließt man: **Die Evolute einer gemeinen Hypo- oder Epizykloide ist eine andere ihr ähnliche Kurve**[3]), eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit, die ebenfalls von La Hire bemerkt worden ist.[4])

Aus den für die Koordinaten einer Epi- oder Hypozykloide als Funktionen eines Parameters aufgestellten Ausdrücken (3_e) auf S. 95, die uns zu den bemerkenswerten, in dieser Nr. dargelegten Sätzen führten, lassen sich noch andere Beziehungen herleiten, die wir jetzt angeben

---

1) Nach Aoust (*Analyse infinitésimale des courbes planes*, Paris 1873, S. 99) soll sich diese Gleichung bereits bei Riccati vorfinden. Daraus kann man wiederum die doppelte Erzeugung dieser Kurve folgern.

2) Mannheim, *Recherches géométriques rélatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859) S. 99. Für den Fall der regulären Astroide wurde dieser Satz vorher von O. Böklen angegeben (Arch. Math. Phys., XXXVII, 1856, S. 105).

3) Die Evoluten der allgemeinen Epizykloiden sind neue Kurven, die von Chr. Wiener untersucht wurden (*Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen zyklischen Kurven*, Zeitschr. Math. Phys. XXVII, 1882).

4) *Mém. de l'Ac. des Sciences etc.* IX, S. 265.

wollen. Bezeichnen wir die Ableitungen jener Ausdrücke nach φ mit Akzenten, so liefern uns die Gleichungen (3_e) für den Fall $h = r$:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 4r(R + r)\sin^2\frac{R\varphi}{2r},$$

$$x'^2 + y'^2 = 4(R + r)^2\sin^2\frac{R\varphi}{2r},$$

$$xy' - x'y = 2(R + r)(R + 2r)\sin^2\frac{R\varphi}{2r},$$

$$x'y'' - x''y' = \frac{2(R+r)(R+2r)}{r}\sin^2\frac{R\varphi}{2R};$$

daraus folgt die Identität

$$\frac{x^2+y^2-R^2}{x'^2+y'^2} = \frac{xy'-x'y}{x'y''-x''y'},$$

oder

$$\begin{vmatrix} x & y & R^2 - (x^2 + y^2) \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & x'^2 + y'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder auch

$$\begin{vmatrix} x & y & R^2 \\ x' & y' & xx' + yy' \\ x'' & y'' & x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Identität ist nun einer wichtigen geometrischen Interpretation fähig. Sie sagt nämlich, daß, wenn X, Y die laufenden Koordinaten sind, die drei Geraden

$$xX + yY = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' = x'^2 + y'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

in einen Punkt zusammenlaufen. Nun stellt (β) die Normale im Punkte (x, y) dar; (γ) ist die Ableitung von (β), stellt also eine Gerade dar, die durch den Berührungspunkt jener Normalen mit ihrer eigenen Enveloppe geht, d. i. das dem Punkte (x, y) entsprechende Krümmungszentrum; folglich schneiden sich die Geraden (β) und (γ) in diesem Punkte. Durch denselben Punkt geht nun auch die Gerade (α); diese ist aber die Polare des Punktes (x, y) in bezug auf den festen Kreis mit dem Radius R. Erinnern wir uns nun der Descartesschen Konstruktion der Normalen (Nr. 207), so können wir schließen: **Um das Krümmungszentrum für einen Punkt P der gemeinen Epi- oder Hypozykloide zu finden, braucht man nur den Schnittpunkt der Polaren von P in bezug auf den festen Kreis mit der Verbindungslinie PA aufzusuchen, wo A den Berührungspunkt jenes Kreises mit der entsprechenden Lage des rollenden bedeutet.**[1])

---

1) Zehme, *Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Zykloiden* (Iserlohn und Elberfeld, 1854). S. auch E. Cesàro, *Remarque de géométrie infinitésimale* (Mathésis VII, 1887) und *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (Nouv. Ann. Math. 3e. Sér. VII, 1883. — Dieselbe Frage war früher von Dieu, *Note sur les hypocycloïdes* (Das. XIX, 1860) und von Henning im § 1 des *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten* (Crelles Journ. LXV, 1866) behandelt.

209. Aus den Gleichungen (3_e) in Nr. **207** ergibt sich, daß die Gleichung der Normalen an die Kurve dargestellt wird durch

$$\begin{aligned}&\left[(x-R\cos\varphi)-r\cos\varphi+h\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right]\left(\sin\varphi-\frac{h}{r}\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right)-\\&\left[(y-R\sin\varphi)-r\sin\varphi+h\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right]\left(\text{sos}\,\varphi-\frac{h}{r}\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)\right)=0.\end{aligned}\qquad(22)$$

Dieser Gleichung wird offenbar genügt durch $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$; demnach geht die Normale durch den so bestimmten Punkt, und dieser ist nichts anderes als der Punkt B (Taf. XV, Fig. 120 a, b), in welchem der bewegliche Kreis den festen berührt; die Normale in P′ ist also die Gerade $P'B$ in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Satze, den wir in Nr. **207** gebracht haben.

Wenn wir für den Fall der gemeinen Epizykloiden uns der Gleichungen (4_e) bedienen, so erkennen wir, daß

$$x\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}-y\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}=\frac{2n+1}{n}r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\quad\ldots\quad(23)$$

$$x\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}+y\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}=\frac{1}{n}r\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\quad\ldots\quad(24)$$

die Tangente bzw. die Normale der Epizykloide im Punkte (φ) darstellen. Bezeichnen wir nun mit u und v die Plückerschen Koordinaten der Normalen, so haben wir

$$u=-\frac{n\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{r\cos\frac{\varphi}{2}},\qquad v=-\frac{n\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{r\cos\frac{\varphi}{2}}.\quad\ldots\quad(25)$$

Denken wir uns nun, daß wir die Normalen zur Epizykloide in denjenigen Punkten gezogen hätten, in denen sie von Geraden, die durch den Punkt (x, y) gehen, berührt wird, so wird der Winkel φ der Gleichung (23) genügen; wenn wir demnach φ aus den Gleichungen (23) und (25) eliminieren, so werden wir die Tangentialgleichung einer Kurve erhalten, die alle jene Normalen zu ihren Tangenten hat. Nun liefern die Gleichungen (25)

$$u^2+v^2=\frac{n^2}{r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}};$$

außerdem erhält man durch Einsetzen der durch (25) gegebenen Werte von $\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}$ und $\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}$ in die Gleichung (23)

$$uy-vx=(2n+1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

und durch Elimination von φ aus diesen beiden letzteren

$$(xu-yv)^2=\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 r^2(u^2+v^2)-(2n+1)^2$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade in u und v ist, so kann man mit C. Juel[1]) den Schluß ziehen: Die Normalen einer Epi- oder Hypo-

1) *Intermédiaire* I, 1894, S. 22 u. 243; II, 1895, S. 208.

zykloide in den Punkten, in welchen sie von Geraden eines Strahlenbüschels berührt wird, sind Tangenten eines Kegelschnittes.

Nun wollen wir noch bemerken, daß die Polare des Punktes (φ) der gemeinen Epizykloide (3_e) in bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = l^2$ als Gleichung hat

$$x\left[(R+r)\cos\varphi - r\cos\frac{R+r}{r}\varphi\right] + y\left[(R+r)\sin\varphi - r\sin\frac{R+r}{r}\varphi\right] = l^2.$$

Differenzieren wir diese nach φ und kombinieren das Resultat mit der ursprünglichen Gleichung, so finden wir

$$x = \frac{l^2 \sin\frac{R+2r}{2r}\varphi}{(R+2r)\sin\frac{R\varphi}{2r}}, \qquad y = \frac{l^2 \cos\frac{R+2r}{2r}\varphi}{(R+2r)\sin\frac{R\varphi}{2r}}$$

als Gleichungen für die Darstellung der Polarreziproken jener Epizykloide in bezug auf diesen Kreis. Führen wir nun ein Polarkoordinatensystem ein, dessen Achse mit der y-Achse zusammenfällt, indem wir $\frac{R+2r}{2r}\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$ setzen und den Quotienten $\frac{r}{R}$ mit n bezeichnen, so können die obigen beiden Gleichungen durch die folgende ersetzt werden

$$\varrho = \frac{l^2}{(2n+1)R}\,\frac{1}{\sin\frac{\omega}{2n+1}};$$

da diese eine uns schon bekannte Kurve darstellt (vgl. Bd. I, S. 367), so schließen wir: **Die Polarreziproke einer Epi- oder Hypozykloide in bezug auf einen mit dem Basiskreise konzentrischen Kreis ist eine Ährenkurve.**[1])

Benutzen wir die Gleichungen (23), so sehen wir, daß das vom Mittelpunkte des Basiskreises auf die Tangente gefällte Lot dargestellt wird durch die Gleichung

$$x\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2} + y\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2} = 0,$$

daher sind die Koordinaten des Fußpunktes jenes Lotes

$$x = \frac{2n+1}{2}r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}; \qquad y = -\frac{(2n+1)}{2}r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2};$$

führen wir auch hier Polarkoordinaten ein, indem wir $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{(2n+1)\varphi}{2} = \omega$ setzen, so erkennen wir, daß der Ort des genannten Fußpunktes als Gleichung hat

$$\varrho = \frac{2n+1}{2}r\cdot\cos\frac{\omega}{2n+1},$$

---

1) S. Jeřabek, *Courbes polaires réciproques des épicycloïdes et hypocycloïdes* (Mathésis, 2. Sér. IX, 1899).

und folglich (s. Bd. I, S. 359): **Die Fußpunktkurve einer gemeinen Epi- oder Hypozykloide in bezug auf das Zentrum des Basiskreises ist eine Rhodonee.**[1])

Die oben dargelegten Sätze[2]) zeigen, wie bemerkenswert gerade die Epi- und Hypozykloiden sind, bei denen $h = r$ ist. Es gibt jedoch noch einen anderen speziellen Wert von h, der besonders vermerkt zu werden verdient, nämlich $h = R - r$; in diesem Falle werden die Gleichungen (3_h) zu

$$x = (R - r)\left[\cos\varphi + \cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right)\right], \quad y = (R - r)\left[\sin\varphi - \sin\left(\frac{R-r}{r}\right)\varphi\right],$$

oder auch

$$x = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r}\cdot\cos\frac{(2r-R)\varphi}{2r}, \quad y = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r}\cdot\sin\frac{(2r-R)\varphi}{2r}.$$

Nun folgt aus diesen

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{(2r-R)\varphi}{2r}, \quad \sqrt{x^2+y^2} = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r};$$

wenn wir daher Polarkoordinaten einführen, indem wir

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

setzen, so bekommen wir

$$\omega = \frac{(2r-R)\varphi}{2r}, \quad \varrho = 2(R-r)\cos\frac{R\varphi}{2r},$$

und nach Elimination von φ

$$\varrho = 2(R-r)\cdot\cos\frac{R\omega}{2r-R}.$$

Da diese Gleichung wiederum eine allgemeine Rhodonee darstellt, so ist bewiesen: **Jede Rhodonee kann durch Rollen eines Kreises auf einem anderen festen Kreise erzeugt werden,** indem man sie entweder als Epi- oder Hypozykloide betrachten kann; es ist dies eine wichtige Tatsache, die 1752 von G. B. Suardi empirisch bemerkt[3]), 1844 von Luigi Ridolfi[4]) bewiesen und 20 Jahre darauf von Durège[5]) wieder aufgefunden wurde, sowie später noch von neuem durch E. W. Hyde.[6])

---

1) G. Bellavitis, *Sulla derivazione delle curve* (Annali di Tortolini, III, 1852); Böklen, *Einige geometrische Sätze über Kurven* (Zeitschr. Math. Phys. III, 1855).

2) Denselben kann man noch folgenden hinzufügen: „Rollt eine gemeine Epi- oder Hypozykloide auf einer geraden Linie, so beschreibt deren Mittelpunkt eine Ellipse" (G. Bellermann, *Ueber Rouletten, welche entstehen, wenn eine Cykloide auf einer anderen rollt,* Berlin 1892, S. 14).

3) *Nuovi strumenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne, e di molte altre* (Brescia, 1752).

4) S. die in Note 4 auf S. 93 zitierte Schrift, S. 11.

5) *Über eine besondere Art zyklischer Curven* (Zeitschr. Math. Phys. IX, 1864); daselbst werden die Rhodoneen, von diesem Standpunkte betrachtet, mit dem Namen sternförmige Cykloiden belegt.

6) *Foliate Curves* (The Analyst II, 1875).

210. Alle unsere bisherigen Betrachtungen bestehen zu Recht, welches auch der Wert des Modulus sein möge; wenn man jedoch über den Wert desselben gewisse Annahmen macht, gelangt man zu neuen Eigenschaften der Epi- und Hypozykloiden. Beachten wir zunächst, daß aus (3_e) sich ergibt

$$x \pm iy = (R + r)e^{\pm i\varphi} - he^{\pm i\frac{R+r}{r}\varphi}.$$

Wenn nun der Modulus rational ist, so wird $\frac{R+r}{r}$ ein Bruch sein, der soweit als möglich gekürzt mit $\frac{p}{q}$ bezeichnet werden kann ($p > q$). Setzt man nun $e^{i\varphi} = \lambda^q$, $x + iy = \xi$, $x - iy = \eta$, so werden die vorigen Gleichungen

$$\xi = (R+r)\lambda^q - h\lambda^p, \quad \eta = (R+r)\lambda^{-q} - h\lambda^{-p} = \frac{(R+r)\lambda^{p-q} - h}{\lambda^p}; \quad (26)$$

diese neue parametrische Darstellung zeigt, daß man in diesem Falle es mit einer algebraischen Kurve von der Ordnung $2p$ zu tun hat; demnach: **Alle Epi- und Hypozykloiden mit rationalem Modulus sind algebraische Kurven.** Jene parametrische Darstellung, die analog zu derjenigen ist, der wir bei der Untersuchung der Lissajousschen Kurven begegnet sind (s. Bd. I, S. 482), erweist sich als vortrefflich zur Bestimmung der Plückerschen Charakteristiken der fraglichen Kurven[1]); z. B. findet man auf diese Weise, daß die Klasse der Kurve (26) gleich $p + q$ ist.

Wenn wir, was noch spezieller ist, annehmen, daß n eine positive ganze Zahl sei, so kann die Gleichung (23), falls x und y als gegeben vorausgesetzt werden, dazu dienen, die Berührungspunkte der $(2n + 1)$ Tangenten zu bestimmen, die man vom Punkte (x, y) an die Kurve ziehen kann. Durch Einführung von Polarkoordinaten wird diese Bestimmung noch erleichtert. Setzen wir nämlich $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$, so wird die Gleichung (23) zu

$$\varrho \sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi - \omega\right) = \frac{2n+1}{n} r \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Setzen wir im besonderen

$$\varrho = \frac{2n+1}{n} r,$$

dann wird die letzte Gleichung

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi - \omega\right) = \sin\frac{\varphi}{2};$$

dieser wird genügt, wenn man setzt

$$\frac{2n+1}{2}\varphi - \omega = \frac{\varphi}{2} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad = (2k+1)\pi - \frac{\varphi}{2},$$

1) S. Roberts, *Note on the Plückerian Characteristics of Epi- and Hypotrochoids and allied Curves* (Proc. London math. Soc. IV, 1873), Elling Holst, *Ueber algebraische cycloidische Curven* (Lie's Archiv VI, 1881) und F. Morley, *On the Epicycloid* (Amer. Journ. Math. XIII, 1891).

oder, wenn man setzt

$$n\varphi - \omega = 2k\pi \quad \text{oder} \quad (n+1)\varphi - \omega = (2k+1)\pi,$$

d. h. wenn man nimmt

$$\varphi = \frac{\omega + 2k\pi}{n}, \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{\omega + (2k+1)\pi}{n+1}.$$

Bei der ersteren dieser Formeln wird es genügen, dem k die Werte $0, 1, 2 \ldots, n-1$ zu erteilen, bei der zweiten die Werte $0, 1, 2 \ldots . n$; man erhält so zwei Gruppen, die eine von n, die andere von $n+1$ Tangenten der Epizykloide, jede gebildet von einem regulären Büschel. Also: **Die Tangenten einer Epi- oder Hypozykloide mit ganzzahligem Modulus n laufen zu je n und je $n+1$ in einen Punkt eines Kreises zusammen, indem sie in jedem Punkte desselben ein reguläres Büschel bilden; jener Kreis ist mit dem Basiskreise der Kurve konzentrisch, und sein Radius steht mit dem Radius des rollenden Kreises im Verhältnisse $\frac{1}{n-1}$.**[1]) Es ist dies eine bemerkenswerte Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft der dreispitzigen Hypozykloide (s. Bd. I, S. 164).

Unter den algebraischen Epizykloiden finden sich mehrere uns schon bekannte Kurven, die wir an dieser Stelle aufzählen wollen:

I. Es sei $r = h = \frac{R}{2}$. Die Gleichungen (3_h) werden dann: $x = R\cos\varphi$, $y = 0$ und stellen dann den mit der x-Achse zusammenfallenden Durchmesser des Basiskreises dar; daraus folgt: **Wenn ein Kreis sich so bewegt, daß er immer einen anderen vom doppelten Radius von innen berührt, so beschreibt ein beliebiger Punkt der Peripherie einen Durchmesser des festen Kreises.** Dieser merkwürdige Satz, der sich im *Traité des epicycloïdes* von de la Hire[2]) findet, wurde vielfach diesem Geometer zugeschrieben; er wurde jedoch, soviel man weiß, schon früher bemerkt[3]), nicht bloß in einer Arbeit von Tacquet, 1651 gedruckt, sowie in einer von Cardano, 1572 veröffentlicht, sondern auch in dem berühmten Werke von Copernicus, *De revolutionibus orbium coelestium*, das bekanntlich 1543 herausgegeben wurde, und noch früher bei Nasîr Eddîn.[4]) In der praktischen Mechanik findet der Satz eine sinnreiche Anwendung zur sogenannten Geradführung, z. B. bei der Buchdruckschnellpresse von König.

---

1) Dieser elegante Satz ist implicite enthalten in einer Abhandlung von P. Serret, *Sur les équilatères d'ordre quelconpue* (C. R. CXXI, 1895).

2) *Mém. de l'Acad. des Sciences etc.* IX, S. 254.

3) C. Le Paige, *Sur un théorème attribué à La Hire* (Bibl. math., Neue Reihe, I, 1887); M. Curtze, *Ueber einen De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz* (Das. II. 1888).

4) Vgl. P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris, 1893) S. 348—349.

II. Für $R = 2r$ (h beliebig) werden die Gleichungen (3_h) zu $x = (r + h) \cos \varphi$, $y = (r - h) \sin \varphi$, und stellen eine Ellipse dar; auf dieser Beobachtung beruht die Konstruktion eines besonderen Ellipsographen.[1])

III. Wenn $R = r$, werden die Gleichungen (3_e) $x = 2r \cos \varphi - h \sin 2\varphi$, $y = 2r \sin \varphi - h \sin 2\varphi$, oder auch

$$x - h = 2 \cos \varphi \cdot (r - h \cos \varphi), \qquad y = 2 \sin \varphi \cdot (r - h \cos \varphi);$$

führen wir jetzt Polarkoordinaten ein, indem wir $x - h = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \cdot \sin \omega$ setzen, so erhalten wir

$$\varrho = 2 (r - h \cos \varphi), \quad \omega = \varphi,$$

somit nach Elimination von φ

$$\varrho = 2 (r - h \cos \omega),$$

welches (vgl. Bd. I, S. 147) eine Pascal'sche Schnecke darstellt.[2]) Wenn im besonderen $h = r$, so sieht man, **daß die Kardioide eine spezielle Epizykloide ist**; diese Auffassung der Kardioide stammt, wenn nicht von einem früheren, von G. Cramer[3]) her; jedoch die spezielle Epizykloide, die dem Falle $R = r = h$ entspricht, wurde viel früher, nämlich 1678 vom Abt de Vaumesle[4]) betrachtet; es waren auch die von ihm gemachten Mitteilungen, die Huygens veranlaßten, sich mit den Epizykloiden im allgemeinen zu befassen[5]).

Wenden wir auf diesen Fall, $\frac{r}{R} = n = 1$, die Gl. (23) an, so bekommen wir für die Tangente an die Kardioide

$$x \sin \frac{3\varphi}{2} - y \cos \frac{3\varphi}{2} = 3r \sin \frac{\varphi}{2},$$

welche Gleichung wir benutzen wollen, um eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Kurve nachzuweisen. Setzen wir

$$\varphi = \pi - 2\theta, \quad 3r = a,$$

so wird die obige Gleichung

$$- x \cdot \cos 3\theta + y \cdot \sin 3\theta = a \cdot \cos \theta \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

Eine zu dieser senkrechte Tangente wird dann durch

$$- x \cdot \cos 3\theta' + y \cdot \sin 3\theta' = a \cdot \cos \theta' \quad \ldots \ldots \quad (\alpha')$$

dargestellt, wobei $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$, oder $\theta' = \theta \pm \frac{\pi}{6}$ ist.

1) Ridolfi, a. a. O. S. 25.

2) Salmon-Fiedler, *Analytische Geom. der höh. eb. Curven* (Leipzig, 1873) S. 345.

3) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750) S. 431.

4) S. den Brief an Huygens vom 29. Oktober und 19. November 1678, sowie 31. Juli 1679 (*Oeuvres de Huygens* VIII, S. 117, 127, 189); daselbst werden die fraglichen Kurven circulare Zykloiden genannt.

5) *Oeuvres de Huygens* VIII, S. 117, Note 6.

Im ersten Falle wird die Gl. (α') zu

$$x \cos 3\theta + y \sin 3\theta = a \sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

und, wenn wir θ aus α und β eliminieren, finden wir

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{9r^2}{2};$$

folglich **gehen von jedem Punkte dieses Kreises Paare zueinander senkrechter Tangenten an die Kardioide.**

Im zweiten Falle und wenn wir das +Zeichen nehmen, wird (α') zu

$$x \sin 3\theta + y \cos 3\theta = a \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Eliminieren wir θ aus (α) und (γ), erhalten wir

$$8(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 6a^2(x^2 + y^2 - a^2) + 3a^3(2x - a) = 0,$$

welche Gleichung man auch erhalten hätte, wenn man $\theta' = \theta - \frac{\pi}{6}$ genommen hätte. Somit **ergänzt die betreffende Kurve 4ter Ordnung den geometrischen Ort solcher Punkte, von denen zueinander rechtwinklige Tangenten an die Kardioide gehen.**

Verlegt man nun den Anfang in den Punkt $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ und geht zu Polarkoordinaten über, so gelangt man zu folgender Gleichung für die obige Kurve:

$$\varrho + a \cos\omega = a \cos\frac{\pi}{6},$$

die (vgl. Bd. I, S. 147) eine Pascalsche Schnecke darstellt. Somit haben wir (s. Kap. 9 des f. Abschn.): **Die orthoptische Kurve einer Kardioide besteht aus einem Kreise und einer Pascalschen Schnecke.**[1])

IV. Wenn auf einem Kreise ein anderer von der halben Dimension von außen rollt, so entsteht eine Kurve mit zwei Spitzen, die von einigen[2]) — welche dem Beispiel von R. A. Proctor[3]) folgen — Nephroide genannt wird.

V. Für $\boldsymbol{R = 3r}$, $\boldsymbol{h = r}$ werden die Gleichungen (3_h) zu

$$x = r(2\cos\varphi + \cos 2\varphi), \quad y = r(2\sin\varphi - \sin 2\varphi),$$

und stellen (vgl. Bd. I, S. 160) die dreispitzige Hypozykloide dar.

VI. Für $\boldsymbol{R = 4r}$, $\boldsymbol{h = r}$ werden (3_h)

$$x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi, \quad y = 2r\sin\varphi - r\sin 3\varphi,$$

oder auch
$$\frac{x}{r} = 4\cos^3\varphi, \quad \frac{y}{r} = -4\sin^3\varphi,$$

---

1) Wolstenholme, *On the locus of point of concourse of perpendicular tangents to a cardioid* (Proc. Lond. math. Soc. IV, 1873).

2) Z. B. H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig, 1908) S. 139.

3) *A treatise on the cycloids etc.* (London, 1878) S. 179.

demnach durch Elimination von φ

$$\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

welches eine reguläre Astroide darstellt (s. Bd. I, S. 268).[1])

Schließlich können die Epizykloiden zur Teilung eines Winkels in gleiche Teile benutzt werden[2]); sie finden auch vielfache Anwendung in der Kunst[3]), sowie bei physikalischen Fragen[4]) und Problemen der Mechanik[5]), mit denen wir uns aber nicht aufhalten wollen.

211. Nichts hindert uns bei der Allgemeinheit der Definition der Epi- und Hypozykloiden anzunehmen, daß der Radius entweder des Basiskreises oder der des rollenden Kreises unendlich groß sei.[6]) Im ersteren Falle kommen wir nämlich auf die Zykloiden zurück, im zweiten Falle erhalten wir eine neue Kurve, deren Untersuchung den Schluß dieses Kapitels ausmachen wird.

Wenn der erzeugende Punkt auf der bewegten Geraden liegt, so ist die entstehende Kurve nichts anderes als die gemeine Kreisevolvente[7]), andernfalls eine verlängerte oder verkürzte Evolvente, je nachdem der erzeugende Punkt auf derselben Seite oder auf der entgegengesetzten Seite der Geraden liegt, wie das Zentrum des Basiskreises.[8]) Die Gleichungen dieser Evolventen könnten wir durch einen

---

1) Die Bemerkung, daß die reguläre Astroide als spezielle Hypozykloide angesehen werden kann, scheint zuerst von C. Sturm gemacht zu sein; s. die Question 39 der Nouv. Ann. Mathém. gelöst 1843 von Breton (de Champ).

2) Ridolfi, a. a. O. S. 13—17; van Leeuwen, *Nieuw Arch. voor Wiskunde,* VII, 1881; Proctor, o. a. O. S. 246.

3) Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien etc.* (Nürnberg, 1802) S. 124 u. 210.

4) Blumenthal, *Die Bewegung der Ionen beim Zeemann'schen Phänomen* (Zeitschr. Math. Phys. XLV, 1900).

5) Schon seit Newtons Zeiten (s. *Principia*, Lib. I, Sect. X) war es bekannt, daß die Epizykloiden Probleme des Tautochronismus in einem widerstehenden Medium lösten; jedoch das allgemeinere Problem dieser Art ist das von Hâton de la Goupillière aufgestellte in der Note: *Theoreme sur le tautochronisme des épicycloides quand on a égard au frottement* (Liouvilles Journ. 2. Sér. XIII, 1868).

6) Die entstehenden Kurven werden von Reuleaux (*Verh. des Ver. zur Bef. des Gewerbefl.* LV, 1876) Orthocykloiden resp. Cykloorthoiden genannt.

7) Diese Kurve — von der De La Hire in seinem *Traité des roulettes* spricht (Mém. Acad. Sciences, 1706, S. 369) — wurde methodisch behandelt von Diderot in der Abh. *Examen de la développante du cercle*, welcher den zweiten Teil seiner *Mémoires sur différents sujets mathématiques* (Paris, 1748) bildet.

8) Diese Kurven kommen in der angewandten Mathematik bei Fragen aus der Mechanik vor, z. B. bei der Lösung folgender Aufgabe: „Eine Ebene dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine zu ihr senkrechte Achse. Einer ihrer Punkte bewegt sich infolge eines anfänglich erhaltenen Anstoßes der Trägheit gemäß: seine Bahn aufzufinden.“ (Roth, *Ueber die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmäßig drehenden Scheibe*; Repertorium der Physik XXII, 1886).

Grenzübergang aus den früheren Gleichungen (3_e) erhalten[1]; wir ziehen es jedoch vor, sie direkt zu entwickeln. Wir werden annehmen, daß der erzeugende Punkt von einer solchen Lage P ausgehe, daß die Verbindungslinie mit dem Zentrum O des festen Kreises auf der zugehörigen Lage g der bewegten Geraden senkrecht steht. Als Anfangspunkt nehmen wir O, als x-Achse die Gerade OP (Taf. III, Fig. 29). Der Radius des gegebenen Kreises sei a; der Endpunkt des Radius heiße A, und es sei der Abstand $AP = h$. Ist nun g' eine andere beliebige Lage der bewegten Geraden, B ihr Berührungspunkt, so wird, wenn BA' gleich dem Bogen BA ist, A' ein Punkt der gewöhnlichen Kreisevolvente sein; errichten wir nun auf g' in A' das Lot $A'P' = h$, so wird P' ein Punkt der durch P erzeugten Evolvente sein. Wir setzen jetzt

$$\sphericalangle A'Ox = \varphi, \quad \sphericalangle BOA' = \psi, \; OA' = \varrho;$$

dann haben wir

$$a(\varphi + \psi) = \sqrt{\varrho^2 - a^2}, \quad a = \varrho \cos \psi,$$

oder

$$\varrho = \frac{a}{\cos \psi}, \quad \varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a} - \psi,$$

oder auch

$$\varrho = \frac{a}{\cos \psi}, \quad \varphi = \frac{\varrho \sin \psi}{a} - \psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Gleichungen können als eine parametrische Darstellung der gewöhnlichen Kreisevolvente angesehen werden; durch Elimination des Hilfswinkels ψ bekommt man ihre Polargleichung:

$$\varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc} \cos \frac{a}{\varrho}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

[2])

Bezeichnen wir jetzt mit ξ und η die Koordinaten des Punktes A', nämlich die Produkte $\varrho \cos \varphi$ und $\varrho \sin \varphi$, so ergeben die Gl. (1)

$$\xi = a \cos (\operatorname{tg} \psi) + a \operatorname{tg} \psi \cdot \sin (\operatorname{tg} \psi),$$
$$\eta = a \sin (\operatorname{tg} \psi) - a \operatorname{tg} \psi \cdot \cos (\operatorname{tg} \psi),$$

und wenn wir setzen

$$\operatorname{tg} \psi = \omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\xi = a \cos \omega + a\omega \sin \omega, \quad \eta = a \sin \omega - a\omega \cos \omega.$$

Weil nun die Strecke $A'P'$ parallel zum Radius OB ist, so haben wir, wenn x, y die Koordinaten von P' sind

$$x = \xi + h \cos (\varphi + \psi), \quad y = \eta + h \sin (\varphi + \psi);$$

---

1) Für die gewöhnlichen Kreisevolventen s. m. z. B. Serret-Harnack-Scheffers, I (Leipzig, 1907) S. 335.

2) Beachten wir, daß die Gl. (8) auf S. 43 wie folgt geschrieben werden kann

$$\omega = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{b} - \operatorname{arc} \cos \frac{b}{\varrho},$$

so folgt daraus eine Beziehung zwischen den von Clairaut a. O. betrachteten Kurven und den Kreisevolventen.

außerdem ist wegen (1) und (3)

$$\varphi + \psi = \operatorname{tg} \psi = \omega,$$

daher ist schließlich

$$x = (a + h) \cos \omega + a\omega \sin \omega, \quad y = (a + h) \sin \omega - a\omega \cos \omega \quad . \quad (4)$$

die analytische Darstellung aller Kreisevolventen. Wir wollen aus ihr einige Folgerungen ziehen. Zunächst ergibt sich

$$\frac{ds}{d\omega} = \sqrt{h^2 + a^2\omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und somit, wenn $h \neq 0$,

$$s = \frac{\omega}{2}\sqrt{h^2 + a^2\omega^2} + \frac{h^2}{4a} \log \frac{a\omega + \sqrt{h^2 + a^2\omega^2}}{a\omega - \sqrt{h^2 + a^2\omega^2}} + Const.; \quad . \quad . \quad (6)$$

ist dagegen $h = 0$ und nimmt man als Anfangspunkt des Bogens denjenigen, für welchen $\omega = 0$ ist, so bekommt man

$$s = \frac{1}{2} a\omega^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

Beachten wir ferner, daß

$$\frac{dx}{d\omega} = a \sin \omega - y, \qquad \frac{dy}{d\omega} = -a \cos \omega + x,$$

$$\frac{d^2x}{d\omega^2} = 2a \cos \omega - x, \quad \frac{d^2y}{d\omega^2} = 2a \sin \omega - y,$$

so erhalten wir für den Krümmungsradius R, wenn $h \neq 0$,

$$R = \frac{(h^2 + a^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\omega^2 + h^2 - ah} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und wenn $h = 0$ $\qquad R = a\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$

Die Gleichungen (6) und (7), indem sie R und s in Funktion des Parameters ω liefern, genügen zur analytischen Darstellung der Kurve in natürlichen Koordinaten; eliminiert man aus (6′) und (7′) ω, so erhält man

$$R^2 = 2as, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches die natürliche Gleichung der gewöhnlichen Kreisevolvente ist[1]), sie zeigt, daß die betreffende Kurve zur Klasse der in Nr. **196** bezeichneten Kurven gehört, ferner beweist sie: **Rollt eine gewöhnliche Kreisevolvente auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungszentren für die aufeinander folgenden Berührungspunkte mit der Geraden eine Parabel.**[2]) Beachten wir auch, daß, wenn ε der Kon-

1) Ampère, *Mémoire sur les avantages qu'on peut tirer dans la théorie des courbes de la consideration des paraboles osculatrices* (Journ. Éc. polyt. XIV Cah., 1808).

2) Mannheim, *Recherches géométriques etc.* (Liouvilles Journ., 2. Sér. IV. 1859) S. 97. Ein ähnlicher Satz wurde später von G. Bellermann (*Ueber Rouletten, welche entstehen, wenn eine Cykloide auf einer anderen rollt,* Berlin 1892, S. 17—18) angegeben; er lautet: **Rollt die Evolvente eines Kreises auf einer Geraden, so beschreibt ihr Mittelpunkt eine Parabel; rollt sie aber auf einer ihr kongruenten Kurve, so daß sich die entsprechenden Punkte einander berühren, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises eine archimedische Spirale.**

tingenzwinkel ist, im allgemeinen Falle $\frac{ds}{d\varepsilon} = R$, und im vorliegenden Falle $R = \sqrt{2as}$ ist; folglich ist hier $\frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{2a} \cdot d\varepsilon$; integriert: $2s = a\varepsilon^2$, welche Gleichung analog der kanonischen Form der Parabel ist: daraus erklärt sich der Name parabola originaria augularis, der von Krause zur Bezeichnung der vorliegenden Kurve angewendet wurde.[1]) — Eine ganz ähnlich wie auf S. 478 — 89 ausgeführte Rechnung führt zu dem Satze: **Die Berührungspunkte der von einem Punkte an die gewöhnliche Kreisevolvente gezogenen Tangenten liegen auf einer Pascalschen Schnecke; jede gewöhnliche Kreisevolvente gehört daher einem System mit den Charakteristiken $\mu = \nu = 2$ an.**

Die Quadratur der gewöhnlichen Kreisevolvente liefert einen eleganten von A. Mannheim[2]) entdeckten Satz. Um diesen darzulegen bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}$ den Inhalt des Dreieckes, welches die Kreistangente TM, den Kreisbogen TA und den Evolventenbogen AM zu Seiten hat (Taf. III, Fig. 30); aus Gleichung (1) ergibt sich nun

$$\text{Sektor } OAM = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \varrho^2 \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos^2\psi}\left(\frac{1}{\cos^2\psi} - 1\right) = \frac{a^2}{6}\operatorname{tg}^3\psi.$$

Ist nun N der Schnittpunkt von OM mit dem Kreise, so ist

$$\text{Sektor } OAN = \frac{1}{2}a^2\varphi = \frac{a^2}{2}(\operatorname{tg}\psi - \psi), \quad \text{Sektor } TON = \frac{a^2}{6}\psi;$$

$$\text{Dreieck } OTM = \frac{1}{2}a \cdot a(\varphi + \psi) = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\psi.$$

Da nun $\mathfrak{T} = \text{Sekt. } OAM - \text{Sekt. } OAN + \text{Dreieck } OTM - \text{Sekt. } TON$ ist, so ist ebenfalls $\qquad \mathfrak{T} = \frac{a^2}{6}\operatorname{tg}^3\psi.$

Nun ist wegen (6′) $\qquad \text{Bogen } AM = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\psi,$

daher $\qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{3}\text{ Bogen } AT \cdot \text{Bogen } AM;$

diese Gleichung besagt: **Die zwischen dem Kreisbogen, dem entsprechenden Evolventenbogen und der zugehörigen Tangente des ersteren gelegene Fläche ist gleich einem Drittel des Produktes aus der Länge jener beiden Bogen.**

Zwischen der gewöhnlichen Kreisevolvente und anderen uns schon bekannten Kurven bestehen Beziehungen, die wir nicht gänzlich mit Stillschweigen übergehen können.

a) Da im allgemeinen $\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin x$, so wird, wenn wir $\frac{\pi}{2} + \varphi = \omega$ setzen, die Gleichung (2) zu

$$\omega = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a} + \operatorname{arc}\sin\frac{a}{\varrho}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2')$$

---

1) *Novae theoriae linearum curvarum* (München, 1835) S. 79.

2) S. die in Note 2, S. 116 zitierte Abh. S. 98.

Wir wollen diese benutzen, um die Fußpunktkurve der Evolvente abzuleiten. Es seien (Taf. III, Fig. 30) ϱ_1, ω_1 die Koordinaten des Fußpunktes F des vom Pole auf die Tangente in M (ϱ, ω) gefällten Lotes; nennen wir den Winkel OMF μ, so haben wir

$$\omega + \omega_1 = \frac{\pi}{2} - \mu, \qquad \varrho_1 = \varrho \sin \mu, \qquad \sin \mu = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho},$$

daher

$$\cos(\omega - \omega_1) = \sin \mu = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}, \qquad \varrho_1 = \sqrt{\varrho^2 - a^2}.$$

$$\omega - \omega_1 = \arccos \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho} = \arcsin \frac{a}{\varrho}.$$

Daraus folgt in Verbindung mit (2'), daß

$$\omega_1 = \frac{\varrho_1}{a}, \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = a\omega_1, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

welches eine Archimedische Spirale darstellt. Also: **Die Fußpunktkurve der Evolvente eines Kreises in bezug auf dessen Zentrum ist eine Archimedische Spirale.**[1])

b) Man beschreibe einen Kreis um O mit dem Radius l, auf der Geraden OF nehme man den Punkt P (ω', ϱ') derart, daß $OF \cdot OP = l^2$, so ist der Punkt P der Pol der Tangente MP in bezug auf diesen Kreis, und der Ort von P ist die Polarreziproke der betrachteten Evolvente; da nun $\omega' = \omega_1$, $\varrho' \cdot \varrho_1 = l^2$, so wird die Gleichung (9) zu

$$\frac{l^2}{\varrho'} = a\omega', \quad \text{oder} \quad \varrho'\omega' = \frac{l^2}{a},$$

welches eine hyperbolische Spirale darstellt. Demnach: **Die Polarreziproke der Evolvente eines Kreises in bezug auf einen konzentrischen ist eine hyperbolische Spirale.**[2])

c) Wir betrachten schließlich die durch folgende Gleichungen dargestellte Zylinder-Schraubenlinie:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = h\varphi;$$

die allgemeine Gleichung der Tangente ist

$$\frac{x - r\cos\varphi}{-r\sin\varphi} = \frac{y - r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{z - h\varphi}{h}.$$

Setzen wir darin $z = 0$, so erhalten wir

$$x = r(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \qquad y = r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (4), so schließen wir: **Die Schnittlinie einer abwickelbaren Schraubenfläche mit einer zur Achse senkrechten Ebene ist eine gewöhnliche Kreisevolvente.**[3])

---

1) Clairaut, *Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris,* 1740. S. auch J. de la Gournerie, *Traité de geometrie descriptive,* Art. 990 (III. Aufl., III. Tl., Paris 1901 S. 143).

2) J. Neuberg, *Nouv. Corr. math.* VI, 1880. — Eine andere minder wichtige Beziehung zwischen diesen beiden Kurven ist in der Abh. von Schiffner dargestellt, *Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale* (Arch. Math. Phys. LXVI, 1881).

3) G. Monge, *Géometrie descriptive* (Paris, An. VII) S. 112.

Elftes Kapitel.

Die Pseudozykloiden.

212. Wir nehmen wieder die Gleichungen (3_h) aus Nr. **206** und wollen untersuchen, ob sie auch dann eine reelle Kurve darstellen können, wenn die in ihnen auftretenden Konstanten R, r, h nicht alle reell sind.[1]) Wir setzen daher zur Verallgemeinerung

$$R = R_1 + iR_2, \qquad r = r_1 + ir_2, \qquad h = h_1 + ih_2, \qquad \varphi = (\varrho_1 + i\varrho_2)\,\omega,$$

wo die $R_1, R_2, \ldots, \varrho_2$ reelle Konstanten sind. Der Kürze wegen wollen wir ferner setzen

$$d_1 + id_2 = (R_1 - r_1) + i\,(R_2 - r_2), \qquad \sigma_1 + i\sigma_2 = \frac{(\varrho_1 + i\varrho_2)(d_1 + id_2)}{r_1 + ir_2}.$$

Die angezogenen Gleichungen werden dann

$$\left.\begin{aligned} x &= (d_1 + id_2)\cos(\varrho_1 + i\varrho_2)\,\omega + (h_1 + ih_2)\cos(\sigma_1 + i\sigma_2)\,\omega \\ y &= (d_1 + id_2)\sin(\varrho_1 + i\varrho_2)\,\omega + (h_1 + ih_2)\sin(\sigma_1 + i\sigma_2)\,\omega \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

Damit x und y für alle reellen Werte von ω reell seien, müssen die eingeführten Konstanten gewissen Bedingungsgleichungen genügen, und eine nicht schwierige Diskussion zeigt uns, daß dies nur in folgenden beiden Fällen eintritt:

$$\text{I.} \quad d_2 = h_2 = \varrho_2 = \sigma_2 = 0.$$

$$\text{II.} \quad d_1 = h_1, \quad d_2 = h_2, \quad \varrho_1 = -\sigma_1, \quad \varrho_2 = \sigma_2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man erkennt alsbald, daß im ersten Falle $r_2 = 0$, $R_2 = 0$ und deshalb verschwindet in den Gleichungen (1) jede Spur des Imaginären, sie gehen daher auf die Gleichung (3_h) in Nr. **206** zurück, weshalb die entsprechende Kurve eine gewöhnliche Hypozykloide ist.

Im zweiten Falle hat man $d_1 - id_2 = h_1 + ih_2$, $\sigma_1 = i\sigma_2 = -(\varrho_1 - i\varrho_2)$, und die Gleichungen (1) werden dann zu

$$\left.\begin{aligned} x &= 2d_1\cos(\varrho_1\,\omega)\cdot\mathfrak{Cos}\,(\varrho_2\,\omega) + 2d_2\sin(\varrho_1\,\omega)\cdot\mathfrak{Sin}\,(\varrho_2\,\omega) \\ y &= 2d_1\sin(\varrho_1\,\omega)\cdot\mathfrak{Cos}\,(\varrho_2\,\omega) - 2d_2\cos(\varrho_1\,\omega)\cdot\mathfrak{Sin}\,(\varrho_2\,\omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

Da die so dargestellten reellen Kurven durch Rollen eines komplexen Kreises auf einem ebensolchen Kreise erzeugt werden, so wurden sie von E. Cesàro und E. Wölffing Pseudozykloiden oder Pseudotrochoiden genannt.[2])

Da im allgemeinen

$$\sigma_1 = \frac{(d_1 r_1 + d_2 r_2)\,\varrho_1 + (d_1 r_2 - d_2 r_2)\,\varrho_2}{r_1^{\,2} + r_2^{\,2}}, \qquad \sigma_2 = \frac{-(d_1 r_1 - d_2 r_1)\,\varrho_1 + (d_1 r_1 + d_2 r_2)}{r_1^{\,2} + r_2^{\,2}}$$

---

1) Betreffs des folgenden s. die Abh. von E. Wölffing, *Ueber Pseudotrochoiden* (Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 1899), woselbst sich auch vollständige bibliographische Notizen finden.

2) Besondere Pseudozykloiden sind die *Pseudorhodoneen* (vgl. S. 109), deren Inversen die *Pseudoährenkurven* sind.

und da wegen (2) $\sigma_1 = -\varrho_1$, $\sigma_2 = \varrho_2$, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 (r_1 d_1 + r_2 d_2 + \overline{r_1^2 + r_2^2}) + \varrho_2 (d_1 r_2 - d_2 r_1) = 0, \\ -\varrho_1 (d_1 r_2 - d_2 r_1) + \varrho_2 (r_1 d_1 + r_2 d_2 - \overline{r_1^2 + r_2^2}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (4)$$

demnach durch Elimination von ϱ_1 und ϱ_2

$$d_1^2 + d_2^2 = r_1^2 + r_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

oder auch $$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 r_1 - 2R_2 r_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5')$$

Nun stellt $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ das Maß für den Abstand des Mittelpunktes des beweglichen Kreises vom Mittelpunkte des festen dar, während $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ das Maß für den Radius des ersteren ist; folglich: **Damit ein komplexer Kreis durch Rollen auf einem anderen eine reelle Pseudozykloide erzeuge, muß der absolute Wert seines Radius gleich dem absoluten Werte des Abstandes seines Mittelpunktes von dem des Basiskreises sein.**

Die Gleichungen (3) lassen sich ein wenig anders schreiben. Setzt man nämlich $\mu = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, so geben die Gleichungen (4) und (5)

$$\mu = \frac{R_1}{R_2 - 2r_2} = \frac{R_2}{2r_1 - R_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

und, wenn man noch statt ω den Winkel $\vartheta = \varrho_1 \omega$ einführt, bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} x = 2(R_1 - r_1) \cos\vartheta \cdot \operatorname{Cos}(\mu\vartheta) + 2(R_2 - r_2) \sin\vartheta \cdot \operatorname{Sin}(\mu\vartheta) \\ y = 2(R_1 - r_1) \sin\vartheta \cdot \operatorname{Cos}(\mu\vartheta) - 2(R_2 - r_2) \cos\vartheta \cdot \operatorname{Sin}(\mu\vartheta) \end{aligned}\right\}, \quad (7)$$

wo μ durch die Doppelgleichung (6) bestimmt ist.

Jedem die Gleichung (5') befriedigenden Quadrupel der Werte R_1, R_2, r_1, r_2, entspricht demnach eine Pseudzykloide; daher gibt es ∞^3 verschiedene Pseudozykloiden, von denen ∞^2 von verschiedener Gestalt sind. — Ebenso wie unter den Zykloiden diejenigen bemerkenswert sind, bei denen der erzeugende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises liegt, so verdienen auch unter den Pseudozykloiden diejenigen eine besondere Beachtung, bei denen $h = \pm r$. Nehmen wir zunächst $h = r$, so liefern die Gleichungen (2) $R_1 = 2r_1$, $R_2 = 0$; daher ist $R = R_1$, $r = \frac{R_1}{2} + ir_2$; die Kurve wird erzeugt durch Rollen eines komplexen Kreises auf einem reellen; sie heißen Parazykloiden[1]) und haben zur Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x = 2r_1 \cos\vartheta \operatorname{Cos}(\mu\vartheta) - 2r_2 \sin\vartheta \operatorname{Sin}(\mu\vartheta) \\ y = 2r_1 \sin\vartheta \operatorname{Cos}(\mu\vartheta) + 2r_2 \cos\vartheta \operatorname{Sin}(\mu\vartheta) \end{aligned}\right\}, \text{ wobei } \mu = -\frac{r_1}{r_2}. \quad (8)$$

1) R. de Saussure, *Sur la génération des courbes par roulement* (Diss. Genève 1895) S. 41—55; *Note sur les lignes cycloidales* (Amer. Journ. Math. XVIII, 1895).

Setzen wir hingegen $h + r = 0$, so ergeben die Gleichungen (2) $R_1 = 0$, $R_2 = 2r_2$; daher ist $R = iR_2$ und $r = r_1 + \frac{iR_2}{2}$; die Kurven werden erzeugt durch Rollen eines Kreises mit komplexem Radius auf einem festen mit rein imaginärem Radius; sie heißen Hyperzykloiden[1]) und haben zur Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x &= -2r_1 \cos\vartheta \operatorname{Cos}(\mu\vartheta) + 2r_2 \sin\vartheta \operatorname{Sin}(\mu\vartheta) \\ y &= -2r_1 \sin\vartheta \operatorname{Cos}(\mu\vartheta) - 2r_2 \cos\vartheta \operatorname{Sin}(\mu\vartheta) \end{aligned}\right\}, \text{ wobei } \mu = \frac{r_2}{r_1}. \quad (9)$$

213. Die Pseudozykloiden erfreuen sich vieler Eigenschaften, die ähnlich denen der Epizykloiden, z. B. sind sie vermittelst elliptischer Integrale rektifizierbar.[2]) Die Parazykloiden und Hyperzykloiden besitzen jedoch noch weitere der Erwähnung werte Eigenschaften.

So erhält man aus den Gleichungen (8) und (9) als Ausdruck für den Bogen s und den Krümmungsradius $\mathfrak{R}$

$$s = \mp 2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2} \operatorname{Cos}(\mu\vartheta), \qquad \mathfrak{R} = 2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \operatorname{Sin}(\mu\vartheta).$$

Durch Elimination von ϑ ergibt sich

$$\left(\frac{s}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{R}}{r_1}\right)^2 = \left(2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1}\right)^2, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

es ist dies die natürliche Gleichung der Parazykloiden sowohl wie der Hyperzykloiden; sie sagt aus: **Rollt eine Para- oder Hyperzykloide auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die aufeinander folgenden Berührungspunkte eine Hyperbel.** Vergleichen wir die Gleichung (10) mit der in Nr. **208** gefundenen natürlichen Gleichung der Epizykloiden, so können wir sagen: **$\mathfrak{R}^2 = as^2 + bs + c$ ist die natürliche Gleichung einer Epizykloide, wenn $a < 0$, dagegen die einer Para- oder Hyperzykloide, wenn $a > 0$.**[3])

Noch eine weitere Folgerung verdient hervorgehoben zu werden. Es sei

$$\frac{\mathfrak{R}^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1$$

die natürliche Gleichung einer Para- oder Hyperzykloide. Setzen wir, was ja gestattet ist,

$$\mathfrak{R} = a \sec\lambda, \qquad s = b \operatorname{tg}\lambda,$$

wo λ ein Parameter ist, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_1$ und s_1 den Krümmungsradius und Bogen der Evolute, so finden wir durch Anwendung eines bekannten Verfahrens (vgl. Nr. **251**) für die Darstellung der Evolute die beiden Gleichungen

1) S. die vorhin zitierten Aufsätze.

2) Um dies zu beweisen, kann man das S. 103 dargestellte Rechnungsverfahren anwenden.

3) E. Cesàro, *Sur deux classes remarquables des lignes planes* (Nouv. Ann. Math. 3e Sér. VIII, 1888). Vgl. eine von demselben im *Intermédiaire* I, 1894 (S. 153) vorgelegte Frage und die Beantwortungen von C. Juel (II, S. 160), R. de Saussure (das. S. 356) und G. Tarry (das. S. 390). — In dem ausgeschlossenen Falle $a = 0$, bekommt man offenbar eine gewöhnliche Kreisevolvente.

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{a^2}{b} \operatorname{tg} \lambda, \qquad s_1 = a \sec \lambda.$$

Wenn wir nun mit $\mathfrak{R}_2$ und s_2 die nämlichen Elemente der zweiten Evolute bezeichnen, so finden wir ähnlich

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{a^3}{b^2} \sec \lambda, \qquad s_2 = \frac{a^2}{b} \operatorname{tg} \lambda;$$

durch Elimination von λ ergibt sich als Gleichung der zweiten Evolute

$$\frac{\mathfrak{R}_2{}^2}{a^2} - \frac{s_2{}^2}{b^2} = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2;$$

Daraus folgt: **So wie die gewöhnlichen Epizykloiden Kurven sind, die ihrer ersten Evolute ähnlich sind, so sind die Para- und Hyperzykloiden Kurven, die ihrer zweiten Evolute ähnlich sind.** Somit erklärt es sich, daß schon Euler auf diese Kurven traf im Verlauf seiner Untersuchungen über diejenigen Kurven beliebiger Ordnung, die einer ihrer sukzessiven Evolute ähnlich sind.[1])

Andere bemerkenswerte spezielle Pseudozykloiden entstehen, wenn man $R_2 = r_2$ oder $R_1 = r_1$ setzt. Im ersten Falle werden die Gleichungen (7)

$$x = 2(R_1 - r_1) \cos \vartheta \cdot \operatorname{Cos}(\mu \vartheta), \qquad y = 2(R_1 - r_1) \sin \vartheta \operatorname{Cos}(\mu \vartheta);$$

gehen wir zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir

$$\varrho = 2(R_1 - r_1) \operatorname{Cos}(\mu \vartheta),$$

welches (s. S. 68) eine Summenspirale darstellt. Im zweiten Falle ergeben dieselben Gleichungen (7)

$$x = 2(R_2 - r_2) \sin \vartheta \operatorname{Sin}(\mu \vartheta), \qquad y = -2(R_2 - r_2) \cos \vartheta \operatorname{Sin}(\mu \vartheta)$$

und gehen wir auch hier zu Polarkoordinaten über:

$$\varrho = 2(R_2 - r_2) \operatorname{Sin}(\mu \vartheta),$$

welches eine Differenzenspirale (s. S. 68) darstellt. Somit haben wir zwei Erzeugungsweisen dieser Kurven. Bemerkt werden soll noch, daß sie sich auch als Fußpunktkurve der Pseudozykloiden in bezug auf den Mittelpunkt des festen Kreises ergeben; dies läßt sich durch ein ähnliches Verfahren nachweisen, wie das, durch welches wir dieselbe zwischen den Epizykloiden und Rhodonen bestehende Beziehung (in Nr. **207**) nachgewiesen haben; ebenso möge nicht unerwähnt bleiben, daß sie sich bei gewissen Problemen des Tautochronismus vorfinden.[2])

Zum Schlusse führen wir an, daß die Pseudozykloide diejenige Kurve ist, welche folgendes Problem löst: „Eine Kurve rotiert mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine zu ihr senkrechte Achse; auf

---

1) *Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt* (Comm. Acad. Petrop. XII, 1750, S. 19–23) und *Investigatio curvarum, quae similes sunt suis evolutis vel primis vel secundis vel tertiis vel adeo ordinis cujuscunque* (Nova Acta Acad. Petrop. I, 1783, S. 97—106).

2) Puiseux, *Sur les courbes tautochrones* (Liouvilles Journ. IX, 1844).

ihr bewegt sich mit Berücksichtigung der Reibung ein Punkt infolge eines ursprünglich erhaltenen Antriebes; seine Bahn zu finden." Diese wird nämlich durch die beiden Gleichungen

$$x = \varrho e^{\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)t} \cos\left\{(\gamma - w)t - \chi\right\} + \varrho_1 e^{-\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)t} \cos\left\{(\gamma + w)t - \chi_1\right\},$$

$$y = \varrho e^{\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)t} \sin\left\{(\gamma - w)t - \chi\right\} - \varrho_1 e^{-\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)t} \sin\left\{(\gamma + w)t - \chi_1\right\}$$

dargestellt, wo t die unabhängige Variabele (die Zeit) darstellt. Es ist leicht nachzuweisen, daß die fragliche Kurve auch erzeugt werden kann durch einen Punkt, der eine logarithmische Spirale durchläuft, während der Pol eine andere logarithmische Spirale beschreibt; diese neue Erzeugungsweise veranlaßte Roth[1]), diese Kurve als Ephelix zu bezeichnen.

Zwölftes Kapitel.

Die Kurven von Delaunay und C. Sturm (Rollkurven der Ellipse).

214. Indem wir die geradlinige Basis mit dem Kreise vertauschten, kamen wir von den Zykloiden zu den Epi- und Hypozykloiden; nehmen wir an Stelle dessen eine andere Kurve und ersetzen zugleich den rollenden Kreis durch eine beliebige andere Kurve, so erhalten wir Kurven, die von den Franzosen und Engländern Rouletten genannt werden, und die wir Trochoiden oder Rollkurven nennen.[2]) Die Betrachtung derselben geht bis in das 17. Jahrhundert zurück (vgl. die von Descartes und Huygens für sie gegebene Konstruktion der Normalen auf S. 98); ihre methodische Untersuchung geschah jedoch erst im Anfange des folgenden Jahrhunderts, besonders durch La Hire[3]), Nicole[4]) und Waring.[5]) Man kann außerdem annehmen, daß die rollende Kurve nicht einen Punkt, sondern eine andere Kurve mit

---

1) *Ueber die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmäßig drehenden Scheibe* (Repertorium der Physik, XXIII, 1887).

2) Eine andere Verallgemeinerung der zyklischen Kurven, die wir nicht verfolgen werden, erhält man, wenn man mehrere Kreise betrachtet, von denen jeder auf dem vorigen rollt. So entstehen die höheren Epizykel, welche durch Littrow (*Disquisitiones ad theoriam epicyclorum pertinentes,* Mém. Acad. St. Pétersbourg, 5. Ser. VII, 1820) und Raabe (*Allgemeine Theorie der Epicyklen,* Crelles Journ. I, 1826) erforscht wurden. Wenn man drei Drehungen hat, so heißen die entstehenden Kurven nach Bellavitis (Atti Ist. Veneto, 4. Ser. II, 1873) Epiepizykloide oder Hypoepizykloide.

3) *Traité des roulettes* (Mém. Acad. Sciences MDCCVI, Paris 1707).

4) *Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toute sorte de courbes sur une courbe quelconque* (Mém. Acad. Sciences MDCCVII, Paris 1730); *Méthode générale pour rectifier toutes les roulettes à base droite et circulaire* (Das. MDCCVIII, Paris 1730).

5) *Miscellanea analytica* (Cantabridgiae, 1763) S. 114 ff.

sich führt, und dann die von dieser eingehüllte Kurve betrachten; letztere gehört einer noch umfangreicheren Kategorie von Kurven an, die von W. H. Besant[1]) als Enveloppe-Roulettes bezeichnet wurden, und die wir mit dem Namen trochoidale Hüllkurven benennen wollen[2]). Die Theorie der Rollkurven und der trochoidalen Hüllkurven ist weniger das Studium einer speziellen Kurvenklasse als eine besondere Betrachtungsweise aller möglichen ebenen Kurven, indem La Hire den Nachweis geliefert hat, **daß jede beliebige ebene Kurve als Roulette angesehen werden kann**[3]): daher können und dürfen wir in einem Werke, welches, wie das vorliegende, denjenigen Kurven gewidmet ist, die sich in irgendeinem Sinne von den allgemeinen Kurven unterscheiden, auf diese Theorie nicht eingehen. Wir empfehlen deshalb dem Leser andere Arbeiten[4]) und gehen zu der Bemerkung über, daß von den speziellen Trochoiden zunächst diejenigen betrachtet wurden, die durch Rollen eines Kegelschnittes auf einer festen Geraden erzeugt werden; unter diesen wieder treten diejenigen hervor, die von einem Brennpunkte oder dem Mittelpunkte der rollenden Kurve beschrieben werden.[5])

Die Gelegenheit und die Veranlassung zur Untersuchung der ersteren ist in folgendem Satze von Delaunay zu suchen: „Um die Meridiankurve der Rotationsfläche, deren mittlere Krümmung konstant und gleich $\frac{1}{2a}$ ist, zu finden, genügt es, auf der Achse der Fläche eine Ellipse oder Hyperbel ohne Gleiten rollen zu lassen, deren Achse gleich $2a$ ist; jeder Brennpunkt des Kegelschnittes beschreibt die gesuchte Kurve".[6]) Wegen dieses Satzes ist die fragliche Linie, nach einem

---

1) *Notes on roulettes and glisettes* (2. Aufl., Cambridge 1890) S. 33.

2) Zu dieser Klasse gehören insbesondere die von W. Merkelbach in seiner Dissertation, *Über Rollcurven, die von einer Geraden eingehüllt werden,* untersuchten Kurven (Marburg, 1881).

3) Einen einfachen Beweis dieses Satzes findet man in der *Note sur la théorie des roulettes* von E. Catalan (Nouv. Ann. Mathém., XV, 1856).

4) Lamarle, *Exposé géométrique du Calcul differentiel et intégral,* 3. Teil, (Paris, 1863) S. 218—229; Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris, 1873); Onnen, *Note concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes* (Archives néerlandaises, XIV, 1879); daselbst wird das Beiwort anticycloidal angewendet, um die beiden durch Rollen derselben Kurve auf den beiden entgegengesetzten Seiten derselben Basis erzeugten Kurven zu bezeichnen; E. Cesàro, *Natürliche Geometrie* (Leipzig, 1902) S. 81 ff. S. 65—77; außerdem siehe die oben zitierte Arbeit von Besant.

5) Bezüglich anderer Fälle s.: Brocard, *Roulettes de coniques* (Nouv. corr. math. II, 1875, und III, 1876) und H. Ekama, *Die Kurven, welche von Punkten von Kegelschnitten, die sich, ohne zu gleiten, längs anderen Kurven wälzen, beschrieben werden* (Arch. Math. Phys., II. Reihe, VIII. 1900).

6) *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante* (Liouvilles Journ. VI, 1841). Vgl. R. Verduzio, *Curva di Delaunay* (Riv. fis. mat. e scienze nat. II Sem. 1908).

Vorschlage von P. Mansion[1]), mit dem Namen die Kurve von Delaunay belegt worden, welcher Name dem von Lindelöf[2]) angewandten, Kettenlinie (elliptische, hyperbolische, parabolische, je nach der Art der rollenden Kurve) vorgezogen wird.[3]) C. Sturm[4]) fand mit Anwendung der Variationsrechnung die Differentialgleichung der Kurve von Delaunay als

$$y^2 \pm 2ay\frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

oder auch

$$dx = \frac{y^2 \pm b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}} \cdot dy \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Um zu beweisen, daß diese der angegebenen Rollkurve angehört, betrachten wir eine Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$, die ohne Gleiten auf der x-Achse rollt (Taf. III, Fig. 31). Ihr Brennpunkt F wird dann eine Kurve beschreiben, die (infolge des Descartes-Huygens'schen Satzes, s. Nr. **207**) als Normale die Verbindungslinie von F mit dem entsprechenden Berührungspunkte K der Ellipse mit der Grundlinie hat. Es seien $OP = x$, $PF = y$ die Koordinaten von F; wir haben dann offenbar

$$y = FK \cdot \sin FKP.$$

Nun ist FKP das Komplement des Winkels, den die in F die Delaunaysche Kurve berührende Gerade FT mit Ox bildet; demnach ist

$$\sin FKP = \cos FTK = \frac{dx}{ds};$$

und also

$$y = FK \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Betrachten wir auch den anderen Brennpunkt F' mit den Koordinaten $OP' = x'$, $P'F' = y'$. Da die Winkel FKP und $F'KP'$ gleich sind, so findet man ebenso

$$y' = F'K \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Nun beachten wir, daß

$$FK + F'K = 2a, \qquad y \cdot y' = b^2;$$

man kann nun FK, $F'K$ und y' eliminieren und findet so

$$y^2 - 2ay\frac{dx}{ds} + b^2 = 0$$

als Differentialgleichung der vom Brennpunkte F beschriebenen Kurve. Wechseln wir nun das Vorzeichen des zweiten Gliedes, so bekommen wir eine Gleichung, die der von F' beschriebenen Kurve angehört; da die gefundenen Gleichungen mit (1) übereinstimmen, so ist die Be-

---

1) Habich, *Sur une question de roulettes* (Mathésis VI, 1880).

2) *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (Mém. Soc. Sciences de Finlande, 1863).

3) Vgl. auch § 5 der Abh. von M. Ehrhorn, *Ueber die von Challis vorgeschlagene Integrationsmethode* (Arch. Math. Phys., LXVI, 1881).

4) *Note à l'occasion de l'article précédent* (von Delaunay) (Liouvilles Journ. VI, 1841).

hauptung bewiesen. Ändert man das Vorzeichen von b^2, so verwandelt sich (1) in die Differentialgleichung der ähnlich durch Rollen einer Hyperbel erzeugten Kurve. — Wir überlassen es dem Leser in ähnlicher Weise zu zeigen, daß, wenn die rollende Kurve ein Parabel ist, ihr Brennpunkt eine Kurve beschreibt, deren Differentialgleichung

$$dx = a \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

ist; integriert ergibt sie

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

die (wie wir später in Nr. **234** sehen werden) eine Kettenlinie darstellt.

Bevor wir uns mit der Gl. (1) näher beschäftigen, wollen wir noch die vom Zentrum G der rollenden Ellipse erzeugte Kurve aufsuchen. Wir ziehen deshalb (Fig. 31) den Halbmesser GI parallel zur x-Achse und verbinden G mit K. Die Sätze von Apollonius liefern dann:

$$\overline{GI}^2 + \overline{GK}^2 = a^2 + b^2, \qquad GI \cdot GK \sin GIK = ab;$$

und wenn wir nun die Koordinaten von G, $OH = x$, $HG = y$ einführen, so haben wir

$$\sin IGK = \sin GKH = \frac{dx}{ds}, \qquad y - GH = GK \cdot \sin IGK,$$

daher
$$\overline{GI}^2 + \left(y \frac{ds}{dx}\right)^2 = a^2 + b^2, \qquad GI \cdot y = ab;$$

durch Elimination von GI aus diesen beiden ergibt sich

$$\frac{a^2 b^2}{y^2} + y^2 \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = a^2 + b^2,$$

oder auch
$$dx = \frac{y^2 \cdot dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Dies ist die Differentialgleichung des Ortes des Punktes G; diesen kann man — dem großen Geometer C. Sturm zu Ehren, der ihn zuerst betrachtet hat — die Sturmsche Kurve nennen.

Wir kehren zu den Gleichungen (1) und (2) zurück, indem wir sie folgendermaßen schreiben:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{2ay}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}.$$

Die zweite ist leicht zu integrieren und gibt

$$y^2 = a^2 \left[1 + e^2 + 2e \sin \frac{s - s_0}{a}\right], \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

wo s_0 die Integrationskonstante und $e = \frac{a^2 \mp b^2}{a}$ die numerische Ex-

zentrizität des betrachteten Kegelschnittes ist. Nehmen wir, was jetzt gestattet ist, $s_0 = \frac{1}{2}\pi a$, so haben wir noch einfacher

$$y^2 = a^2 \left[1 - 2e \cos\frac{s}{a} + e^2\right] \cdot {}^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Nennen wir nun R den Krümmungsradius der Delaunayschen Kurve, so finden wir ohne Schwierigkeit

$$R = \frac{2ay^2}{y^2 - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

eine Relation, die es gestattet y aus (4′) zu eliminieren: man findet so

$$R = a \frac{1 - 2e \cos\frac{s}{a} + e^2}{e\left(e - \cos\frac{s}{a}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als natürliche Gleichung der Delaunayschen Kurve.[2])

Wenn N die Länge der Normale der hier untersuchten Kurve ist, so finden wir durch Anwendung der bereits aufgestellten Gleichungen

$$N = y\frac{ds}{dx} = y\frac{ds}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2ay^2}{y^2 + b^2};$$

eliminiert man y aus dieser und aus Gleichung (5), so bekommt man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{N}\right) = \frac{a}{2};$$

folglich: **Bei der Delaunayschen Kurve ist das harmonische Mittel zwischen dem Krümmungsradius und der Normale konstant.**

Die Gleichung (6) zeigt, daß, wenn $e < 1$, also die rollende Kurve eine Ellipse ist, die Delaunaysche Kurve unendlich viele Wendepunkte hat, nämlich alle diejenigen, für welche $s = a \arccos e$ ist; sie ist von ähnlicher Gestalt wie die verkürzte Zykloide (Taf. II, Fig. 21). Wenn hingegen $e > 1$, also die rollende Kurve eine Hyperbel, so hat die erzeugte Kurve keine Wendepunkte, besitzt aber unendlich viele Doppelpunkte; sie ist von ähnlicher Gestalt wie die verlängerte Zykloide (Taf. II, Fig. 22).

Bemerkungen I. Die Gleichungen und Eigenschaften derjenigen Kurven, die von den Endpunkten der Fokal-Achse einer Ellipse beschrieben werden, wenn diese auf einer Geraden rollt, wurden von A. V. Lane[3]) untersucht. Rollt dagegen eine Ellipse auf einer ihr ähnlichen, so beschreibt jeder ihrer Punkte eine Epiellipside, eine Kurve, deren Gleichung man durch ein Verfahren erhalten kann, welches man O. Biermann[4]) verdankt.

1) Spitzer, *Merkwürdige Eigenschaften derjenigen Curve, welche vom Brennpunkte einer Ellipse beschrieben wird, wenn diese auf einer Geraden rollt* (Arch. Math. Phys XLVIII, 1868).

2) E. Cesàro, Vorl. üb. *Natürliche Geometrie,* S. 57.

3) *Note on a roulette* (Amer. Journ. Mathem. VIII, 1886).

4) *Ableitung einer analytischen Darstellung der Epiellipside* (Monatshefte Math. Phys. VIII, 1907).

II. Von den nunmehr naturgemäß folgenden Fällen, daß eine Ellipse auf einem Kreise, einer anderen Ellipse, einer Hyperbel oder Parabel rollt, ist der Fall besonders bemerkenswert, daß eine Ellipse auf einer ihr kongruenten Ellipse rollt. Es ist klar, daß nach einer vollen Umwälzung die bewegte Ellipse und jeder mit ihr fest verbundene Punkt wieder die ursprüngliche Lage einnimmt, und daher sind die entstehenden Rollkurven geschlossene Linien. In bezug auf ihre Gestalt unterscheiden sie sich nicht sonderlich von den Taf. III, Fig. 27, 28, 29 dargestellten Epizykloiden, sind aber, wie C. Schwering[1]) nachgewiesen hat, mit alleiniger Ausnahme des Falles, daß zu Anfang der Bewegung die Scheitelpunkte der großen Achsen einander berühren, transzendente Kurven. Dies ist um so mehr bemerkenswert, als vielfach die Ansicht herrscht — und alle bisherigen Beispiele scheinen sie zu bestätigen —, daß die transzendenten Kurven nichtgeschlossene Kurven seien. Obiges Beispiel zeigt aber: Es **existieren transzendente Kurven, die in sich geschlossen sind.**

215. In der allgemeinen Definition der Rollkurven treten drei Kurven auf: die Basis, die bewegte Kurve und die erzeugte Rollkurve nimmt man die beiden ersteren als gegeben an, so bildet die Aufsuchung der dritten das Problem der Trochoiden; nimmt man hingegen die dritte als gegeben an (und man kann infolge des S. 124 zitierten La Hireschen Satzes eine ganz beliebige Kurve als solche nehmen), so würden die beiden ersten aufzufinden sein: es entsteht dann das umgekehrte Problem der Trochoiden. Bei der Lösung solcher Probleme trifft man zuweilen auf schon bekannte Kurven, häufiger jedoch gelangt man zu neuen Kurven, wie folgende Sätze zeigen:

1) Die Linie, auf der man eine Ellipse rollen lassen muß, damit ein fest mit ihr verbundener Punkt eine Gerade beschreibe, ist eine Delaunaysche Kurve.[2])

2) Die Kurve, die man auf einer Geraden rollen lassen muß, damit ein mit ihr verbundener Punkt einen Kreis beschreibe, hat in Polarkoordinaten die Differentialgleichung

$$\frac{\varrho \cdot d\omega}{d\varrho} = \frac{b}{\sqrt{(a-\varrho)^2 - b^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

deren Integration vollständig ausführbar ist.[3])

---

1) *Über eine Gattung transcendenter Kurven, welche geschlossen sind* (Zeitschr. Math. Phys. XX, 1875).

2) M. s. den auf S. 125 zitierten Habichschen Aufsatz.

3) Koenigs, *Leçons de cinématique* (Paris 1897) S. 170 bis 71. Führt man die Integration aus, so erhält man:

$$\text{wenn } a < b, \quad \varrho = \frac{a^2 - b^2}{a + b \cos \frac{\sqrt{b^2 - a^2}\,\omega}{b}} \text{ (vgl. Bd. I, S. 423);}$$

$$\text{wenn } a = b, \quad \varrho = \frac{2a}{1 - \omega^2} \text{ (vgl. S. 58);} \qquad \text{wenn } a > b, \quad \varrho = \frac{a^2 - b^2}{a + b \operatorname{Cos} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\omega}{b}}.$$

3) Die Kurve, auf welcher man eine Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$ rollen lassen muß, damit ihr Mittelpunkt eine Gerade beschreibe, wird durch die Gleichung

$$y = a\, dn \frac{x}{b} \qquad (8)$$

dargestellt.[1]

4) Das analoge Problem für die Hyperbel wird gelöst durch die Kurve

$$a = y\, cn \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (9)$$

Auf die ähnlichen durch die Gleichungen

$$y = b\, sn \frac{x}{a}, \qquad \varrho\, cn\, \omega = Const.$$

dargestellten Kurven trifft man bei Fragen aus der Mechanik, die vorletzte wird von den Franzosen courbe à sauter (Seilspringerkurve) genannt, da sie die Gestalt eines schweren, homogenen, biegsamen, aber nicht dehnbaren Fadens wiedergibt, wenn man denselben um eine horizontale Achse rotieren läßt.[2]

Dreizehntes Kapitel.

Syntrepente und isotrepente Kurven.

216. Kinematische Methoden, die uns zu den meisten der in den vorigen Kapiteln untersuchten Kurven führten, bilden auch die Grundlage des Begriffes weiterer Kurven: mit der Betrachtung derjenigen unter ihnen, die durch einen fest mit einer Kurve verbundenen Punkt erzeugt werden, indem die Kurve sich parallel zu sich selbst und immer eine feste Kurve berührend bewegt (die sog. Reptorien Joh. Bernoullis[3]) oder Kriechkurven), wollen wir uns nicht aufhalten, da sie von einer Allgemeinheit sind, die mit der der Olistoiden (Bd. I, S. 265) und der Trochoiden (Nr. **214**) vergleichbar ist. Wir werden uns daher mit anderen spezielleren beschäftigen, zu denen uns folgende Betrachtungen führen.

Wenn zwei materielle, in einer Ebene liegende, um ihren Mittelpunkt drehbare Kreise derart miteinander verbunden sind, daß die Distanz k ihrer Mittelpunkte gleich der Summe $r + r'$ ihrer Radien

1) Greenhill, *The application of elliptic funktions* (London, 1892) S. 71—73. Vgl Opitz, *Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Rollkurven* (Diss. Dresden, 1904.)

2) Appell et Lacour, *Principes de la théorie des functions elliptiques* (Paris, 1897) S. 188.

3) S. die Abhandlung *Motus reptorius, ejusque insignis usus, pro lineis curvis in unam omnibus aequalem colligendis, vel a se mutuo subtrahendis; atque hinc deducta problematis de transformatione curvarum in Diario Gallico Paris, 12. Febr. 1702 propositi genuina solutio* (Acta Erud. Aug. 1705; Joh. Bernoulli opera I, S. 408); außerdem G. Sacchi, *Sulla geometria analitica delle curve piane* (Pavia 1854) S. 106—108 und E. Prouhet, *Étude géométrique sur les courbes engendrées pour le mouvement de réptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des Oeuvres de Jean Bernoulli* (Nouv. Ann. Mathém. XIII, 1854).

ist, so können sie sich drehen, ohne daß der Umfang des einen auf dem des anderen zu gleiten braucht. Diese Idee verallgemeinern wir und nennen zwei Kurven Γ und Γ' syntrepent[1]) (von συν-τρέπειν, zugleich drehen), wenn sie sich um die beiden in ihrer Ebene liegenden Punkte O und O' zugleich drehen können, ohne ihre gegenseitige Berührung aufzuheben, und ohne daß die eine auf der anderen gleitet. Daraus ergibt sich, daß die in derselben Zeit den gemeinsamen Berührungspunkt C (der zwar variabel ist, aber immer auf der Geraden OO' verbleibt) durchlaufenden Kurvenbogen CM und CM' gleich sind. Praktische Anwendung finden syntrepente Kurven im Maschinenbau bei der Herstellung der sogenannten „unrunden" Räder, z. B. der quadratischen, polygonalen, elliptischen Räder, der exzentrischen Kreisräder, Spiralrollen usw., wenn es sich darum handelt, die gleichförmige Rotation in eine ungleichförmige zu verwandeln. Beispielsweise sind zwei kongruente Ellipsen, die eine solche Anfangslage haben, daß die große Achse AC der einen die Verlängerung der anderen bildet, und sie um die beiden entsprechenden Brennpunkte O und O' drehbar sind (deren Entfernung gleich jener Achse ist) isotrepent. Denn sind P und P' die beiden anderen Brennpunkte und M und M' zwei Punkte derart, daß die Bogen CM und CM' gleich sind, so ist $OM + O'M' = OM + PM = AC$. Folglich bleiben die beiden Ellipsen bei der Drehung um O und O' immer in Berührung, ohne dabei zu gleiten. Im allgemeinen Falle: wenn Γ und Γ' zwei syntrepente Kurven sind (Taf. III, Fig. 32) und M, M' zwei entsprechende Punkte derselben, so muß die Summe $OM + O'M'$ der beiden Radienvektoren immer konstant $= OO' = k$ sein; außerdem müssen die Winkel dieser Radienvektoren mit den zugehörenden Tangenten gleich sein, weil bei der Berührung der Kurven die beiden Radien sowohl als auch die Tangenten in eine Gerade zusammenfallen. Beziehen wir daher Γ und Γ' auf zwei Polarkoordinatensysteme mit O und O' als Polen und OO' als gemeinsamer Polarachse, so haben wir

$$\varrho + \varrho' = k, \qquad \varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = \varrho' \frac{d\omega'}{d\varrho'}. \qquad (1)$$

Nehmen wir nun an, daß $\omega = \psi(\varrho)$ und $\omega' = \varphi(\varrho')$ die Gleichungen von Γ und Γ' seien, so wird die zweite der obigen Gleichungen zu

$$\varrho \cdot \psi'(\varrho) = \varrho' \cdot \varphi'(\varrho'),$$

oder wenn wir sie mit der ersten kombinieren

$$\varrho \cdot \psi'(\varrho) = (k - \varrho) \cdot \varphi'(k - \varrho) \qquad (2)$$

Nehmen wir jetzt die Funktion φ als gegeben an, so wird ψ durch eine Integration zu bestimmen sein, nämlich durch

$$\psi(\varrho) = \int \frac{(k-\varrho) \cdot \varphi'(k-\varrho)}{\varrho} \cdot d\varrho; \qquad (3)$$

1) A. Miquel, *Sur quelques questions rélatives à la theorie des courbes* (Liouvilles Journ. III, 1838).

es ist zu bemerken, daß die Integrationskonstante nur Einfluß auf die Lage, nicht auf die Natur der Kurve Γ hat.

Nehmen wir als Beispiel für Γ' die Ellipse

$$\varrho = \frac{b^2}{a - c\cos\omega} \qquad (c = \sqrt{a^2 - b^2},\ a > b)$$

oder
$$\omega = \arc\cos\frac{a\varrho - b^2}{c\varrho};$$

dann wird die Gleichung (3) zu

$$\psi(\varrho) = -b\int\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{c^2 - (a-k)^2 + 2(a-k)\varrho - \varrho^2}}$$
$$= \frac{b}{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}}\arc\cos\frac{(a-k)\varrho - b^2}{c\varrho}.$$

Schreiben wir diese in folgender Weise:

$$\varrho = \frac{\frac{b^2}{a-k}}{1 + \frac{c}{a-k}\cos\frac{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}}{b}\cdot\omega}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

so sehen wir, daß die entsprechende Kurve, wenn $k = 2a$, eine der gegebenen kongruente Ellipse ist (vgl. das oben angewandte Beispiel). Im übrigen ist sie algebraisch oder transzendent, je nachdem der Bruch $\frac{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}}{b}$ rational ist oder nicht; ist dieser Wert eine ganze Zahl (n), so ist sie eine Kurve mit n Bäuchen (s. Bd. I, S. 423).

Wir kehren zu den allgemeinen Betrachtungen zurück und fragen, ob es — außer der Ellipse und dem Kreise — noch weitere Kurven gibt, die zu sich selber syntrepent sind, in welchem Falle wir sie isotrepent nennen wollen. Um zu untersuchen, ob es deren gibt, bedienen wir uns der Gleichung (2), indem wir φ an Stelle von ψ setzen; sie wird dann

$$\varrho\cdot\varphi'(\varrho) = (k - \varrho)\cdot\varphi'(k - \varrho);$$

daraus ergibt sich, wenn wir $f(\varrho) = \varrho\cdot\varphi(\varrho)$ setzen,

$$f(\varrho) = f(k - \varrho);$$

daher ist f eine symmetrische Funktion von ϱ und $k - \varrho$. Bezeichnen wir sie mit $F(\varrho, k - \varrho)$, so haben wir

$$\varrho\cdot\varphi'(\varrho) = F(\varrho, k - \varrho),$$

und daher ist
$$\varphi(\varrho) = \int\frac{F(\varrho, k-\varrho)}{\varrho}\,d\varrho.$$

Dies beweist, daß die Gleichung

$$\omega = \int\frac{F(\varrho, k-\varrho)}{\varrho}\,d\varrho, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wo F eine symmetrische Funktion von ϱ und $k - \varrho$ ist, die allgemeine

analytische Darstellung der isotrepenten Kurven liefert. — Im einfachsten Falle $F=k$ wird die Gleichung (5) zu

$$\omega = k\int\frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \text{integriert } \varrho = a e^{\frac{\omega}{k}},$$

welches (vgl. S. 61) die Gleichung einer logarithmischen Spirale ist. Damit ist zugleich ein neuer Fall der Erzeugung dieser interessanten Kurve gefunden.

Vierzehntes Kapitel.

Die Debeauneschen Kurven.

217. „Gegeben eine Strecke n sowie zwei Geraden GD und FE, die miteinander einen Winkel $\lambda = \frac{\pi}{4}$ bilden (Taf. III, Fig. 33); eine Kurve AB zu bestimmen derart, daß, wenn man in einem beliebigen Punkte B die Tangente zieht, die GD in L schneidet, und dann auf GD das Lot BC fällt, welches FE in I schneidet, man immer hat

$$\frac{BC}{CL} = \frac{n}{BI}. \text{“} \qquad (1)$$

Diese Aufgabe wurde von Debeaune[1]) dem Descartes vorgelegt, und dieser hat sie in einem seiner Briefe überliefert[2]); dies ist wohl die erste Aufgabe, die dahin zielt, eine Kurve zu finden, die als Tangenten Geraden hat, die einer bestimmten allgemeinen Bedingung genügen sollen; daher besitzt sie ein nicht gewöhnliches historisches Interesse, indem sie den Beginn des sogenannten „calculus tangentium inversus“ bezeichnet.

Um die Gleichung der gewünschten Linien (die man mit Recht Debeaunesche Kurven nennen darf[3])) zu finden, nehmen wir ein rechtwinkliges kartesisches System, dessen x-Achse die Gerade GD, und dessen Anfang ihr Schnitt O mit EF ist. Dann wird — wenn wir den Winkel λ vorläufig beliebig nehmen — die Gleichung der Geraden EF lauten

$$y - x \operatorname{tg}\lambda = 0,$$

und die Gleichung (1) wird dann gleichbedeutend mit folgender

$$\frac{y}{y\frac{dx}{dy}} = \frac{n}{y - x\operatorname{tg}\lambda},$$

---

1) Wir schreiben dem P. Tannery folgend (Bibl. math. 3. Reihe, II, 1901, S. 149) Debeaune, statt, wie man gewöhnlich tut, De Beaune.

2) Brief an Debeaune vom 20. Februar 1639 (*Oeuvres de Descartes,* éd. Adam et Tannery, II, Paris 1898, S. 510—519).

3) Courbe Beauniene schreibt Saverien S. 241 des I. Bd. seines *Dictionnaire universel de mathématique et de physique* (Paris, 1753).

die wir alsdann so schreiben:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{\operatorname{tg}\lambda}{n} x = \frac{y}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Betrachten wir x als Funktion von y, so sehen wir, daß diese eine lineare Differentialgleichung ist, deren allgemeines Integral lautet

$$x = e^{-\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n}} \left(\int \frac{y}{n} e^{-\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n}} \cdot dy + c \right);$$

die teilweise Integration zeigt uns aber, daß

$$\int \frac{y}{n} e^{-\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n}} \cdot dy = \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda} y e^{\frac{\operatorname{tg}\lambda}{n}} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\lambda} e^{\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n} y}$$

und daher

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\lambda} - \frac{n}{\operatorname{tg}^2\lambda} + c e^{-\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der Debeauneschen Kurven. In dem speziellen Falle $\lambda = \frac{\pi}{4}$ vereinfacht sie sich und wird

$$x = y - n + c e^{-\frac{y}{n}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3')$$

in jedem Falle sind die Debeauneschen Kurven transzendent. Die Gl. (2) zeigt, daß die Tangente im Punkte (x, y) die Gleichung hat

$$n(X - x) = (Y - y)(y - x \operatorname{tg}\lambda),$$

und hieraus folgt, wenn man X und Y als gegeben ansieht: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an eine Debeaunesche Kurve ziehen kann, liegen auf einer durch jenen Punkt gehenden Hyperbel;** dies zeigt somit: **Jede Debeaunesche Kurve ist eine panalgebraische Kurve, die einem System mit den Charakteristiken $\mu = \nu = 1$ angehört.**

An der Lösung der Debeauneschen Aufgabe versuchte sich auch, und zwar nicht vergebens, Leibniz[1]); die von ihm gefundene Lösung veröffentlichte er jedoch nicht. Die erste öffentliche Lösung des Problems findet sich in dem Aufsatze *Solution du problème que Monsieur De Beaune proposa autrefois à Mr. Descartes et que l'on trouve dans le 79. de ses Lettres Tome 3. Par Mr. G.* und wurde im Journal des Savants von 1692 veröffentlicht. Ihre Vaterschaft wurde sowohl vom Marquis de l'Hôpital[2]) als auch von Joh. Bernoulli[3])

1) „Hanc curvam — schreibt er am 27. August 1676 an Oldenburg — nec Cartesius nec Beaunius nec quisquam alius (quoad sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, coepi quaerere, statim certa Analysi solvi" (*Leibniz,* ed Gerhardt, I, S. 121). Die Methode, auf welche Leibniz anspielt, ergibt sich aus dem, was er an G. Manfredi unterm 10. August 1708 über die Integration der linearen Differentialgleichungen schrieb (vgl. G. Loria, *Abhandl. zur Geschichte der Math.* IX, 1899, S. 274).

2) S. dessen Brief an Huygens vom 10. September 1692 und vom 12. Februar 1693 (*Oeuvres de Huygens* X, La Haye 1905. S. 312 und 391) und an Leibniz vom 26. April 1693 (Leibniz ed. Gerhardt II, S. 234).

3) *Joh. Bernoulli Opera omnia* I, 1642 S. 63.

beansprucht; in Wirklichkeit aber haben diese beiden Geometer an dieser Lösung gearbeitet.[1]) Es verdient hervorgehoben zu werden, daß der o. a. Aufsatz zeigt, daß diese beiden Geometer eine Asymptote der lösenden Kurve fanden, die parallel der Geraden EF läuft; in der Tat hat die Kurve (3) als Asymptote die Gerade, deren Gleichung

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\lambda} - \frac{n}{\operatorname{tg}^2\lambda}$$

ist; für die Kurve (3') hingegen ist Asymptote die Gerade

$$x = y - n,$$

die tatsächlich parallel zur Geraden EF ist. Derselbe Geometer löste auch Probleme, die die Quadratur der Kurve und die Kubatur der durch ihre Rotation um die x-Achse entstehenden Volumina betreffen; er bemerkte ebenfalls, daß ihre Konstruktion sich unmittelbar ergibt, wenn die (logarithmische, s. Nr. **224**) durch die Gleichung $x = ce^{-\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n}}$ dargestellte Kurve konstruiert vorliegt. Über die Rektifikation sagten sie: „mais comme on a besoin d'une adresse particulière pour rectifier cette courbe, en supposant la quadrature de l'hyperbole, je propose ce problème aux géomètres en leur assurant qu'il mérite leur recherche"; ob diese Ermunterung den gewünschten Erfolg gehabt, wissen wir nicht, gewiß ist aber, daß die angegebene Frage heutigen Tages keine Schwierigkeit mehr bietet; da nämlich

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\lambda} - \frac{2c}{n} e^{-\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n}} + \frac{c^2 \operatorname{tg}^2\lambda}{n^2} e^{-\frac{2y \operatorname{tg}\lambda}{n}}},$$

so genügt es $e^{-\frac{y \operatorname{tg}\lambda}{n}} = \eta$ zu setzen, um für ds einen Ausdruck von der Form $\frac{\sqrt{a + b\eta + c\eta^2}}{\eta} \cdot d\eta$ zu erhalten, der leicht integrierbar ist.

218. In späterer Zeit hat sich noch Joh. Bernoulli verschiedentlich mit der Debeauneschen Aufgabe befaßt.[2]) Sein Bruder Jakob verallgemeinerte sie außerordentlich, indem er ihr folgenden Ausdruck gab: „Gegeben eine beliebige Kurve; eine zweite zu finden derart, daß die Ordinate eines beliebigen ihrer Punkte zur Subtangente in demselben Verhältnisse stehe, wie eine gegebene Konstante n zur Summe oder Differenz der Ordinaten der gegebenen und der gesuchten Kurve; oder auch, daß das erstere Verhältnis gleich dem reziproken

---

1) Brief von de l'Hôpital an Huygens vom 10. August 1693 (*Oeuvres de Huygens* X, S. 484).

2) *Solutio problematis Cartesio propositi a Dno De Beaune* (Acta erud. Mai 1693; Opera I, S. 65—66), *Demonstratio analytica et synthetica suae constructionis curvae Beaunianae* (Acta erud. Februar 1696; Opera I, S. 145—148) und die XI. der *Lectiones mathematicae* (Opera I, S. 423).

des zweiten sei".[1]) Diese Probleme übertragen sich — wenn $y = f(x)$ die Gleichung der gegebenen Kurve ist — in die beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{f(x) \pm y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) \pm y}{n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die erste[2]) gehört einem Typus an, den man nicht in geschlossener Form integrieren kann, es sei denn, daß f eine lineare Funktion von y ist, in welchem Falle man auf die ursprüngliche Debeaunesche Aufgabe zurückkommt; die zweite ist, wenn man x als Funktion von y auffaßt, eine lineare Differentialgleichung, die integriert ergibt:

$$xye^{\pm\frac{x}{n}} + \int e^{\pm\frac{x}{n}} f(x) \cdot dx + c = 0,$$

wo die Quadratur je nach der Natur der Funktion $f(x)$ ausführbar ist oder nicht.[3])

Eine andere Verallgemeinerung desselben Problems[4]) führt zu der Differentialgleichung

$$\frac{y}{y\frac{dx}{dy}} = \frac{n}{F(y - x \operatorname{tg} \lambda)},$$

wo F eine gegebene Funktion ist. Setzt man $y - x \operatorname{tg} \lambda = z$, so wird sie

$$\operatorname{tg} \lambda + \frac{dz}{dx} = \frac{n}{F(z)},$$

und gibt

$$x = \int \frac{dz}{\frac{n}{F(z)} - \operatorname{tg} \lambda}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

womit das Problem auf eine Integration zurückgeführt ist.

Die o. a. Forschungen Johann Bernoullis führten ihn zur Formulierung eines anderen Problems, das er den Mathematikern seiner Zeit vorlegte.[5]) Es ist folgendes: „Eine Kurve aufzufinden, deren

1) *Problema Beauniani universalius conceptum* (Acta erud. Juli 1696; *Jacobi Bernoulli Opera* II, S. 731—799).

2) Vgl. E. Collignon, *Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes* (Nouv. Ann. Math., 3e. Sér., XVIII, 1899 und XIX, 1900).

3) Ausführbar ist sie z. B., wenn $f(x)$ ein ganzes Polynom in x ist, oder gleich $e^{\alpha x}$ usw. ist.

4) V. Riccati et H. Saladini, *Institutiones analyticae* II. (Bononiae, 1767) S. 500.

5) *Problema ab eruditis solvendum* (Acta erud. Mai 1693). Einige Lösungen desselben s. in dem Aufsatze *Ad problema in Actis Eruditorum an. 1693 mense Majo propositum* (*Leibniz*, ed. Gerhardt, V. S. 288—294). M. s. auch de l'Hôpital, *Solution d'un problème de géometrie que l'on a proposé depuis peu dans le Journal de Leipsic* (Mém. Acad. Paris X). Auch Huygens hat sich mit derselben Aufgabe eingehend beschäftigt: vgl. *Oeuvres de Huygens,* X, S. 460, 500, 534 und 550, sowie den Aufsatz C. H. Z. *De problemate Bernoulliano in Actis Lipsiensibus hujus anni proposito* (Acta erud. Oktober 1693).

Subtangente in einem gegebenen Verhältnisse m zur Tangente steht." Es übersetzt sich in folgende Differentialgleichung

$$x \cdot dy - y \cdot dx = my\sqrt{dx^2 + dy^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

da diese homogen ist, so ist ihre Integration auf Quadraturen zurückführbar, die auch in jedem Falle ausführbar sind. Die bezügliche Rechnung ist wegen der auftretenden Wurzelausdrücke umständlich; um jene zu vermeiden, hat Hermann einen Kunstgriff erdacht, der nicht ohne Interesse ist[1]); er schlug vor, zu setzen

$$y = \xi^2 - \eta^2, \quad . \quad . \quad (6) \qquad - y\frac{dx}{dy} = 2\xi\eta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo ξ und η zwei neue Variabelen bedeuten; setzen wir diese Werte in (5) ein, so erhalten wir

$$x = m(\xi^2 + \eta^2) - 2\xi\eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Infolge der Gleichungen (6) und (8) wird Gleichung (7)

$$\frac{\xi \cdot d\xi - \eta \cdot d\eta}{\xi^2 - \eta^2} + \frac{m(\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta) - (\xi \cdot d\eta + \eta \cdot d\xi)}{2\xi\eta} = 0,$$

oder auch
$$\frac{\eta \cdot d\xi - \xi \cdot d\eta}{\xi^2 - \eta^2} = m\frac{\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

oder
$$\frac{d\xi - d\eta}{\xi - \eta} - \frac{d\xi + d\eta}{\xi + \eta} = m\frac{2(\xi \cdot d\xi + \eta \cdot d\eta)}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Integration ist ausführbar, und man findet

$$\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} = \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a}\right)^m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo a die Integrationskonstante ist. Die kartesische Gleichung der Kurve ist nichts anderes als das Resultat der Elimination von ξ und η aus den Gleichungen (6), (8), (9). Setzt man z. B. $m = 1$, so werden die Gleichungen

$$y = (\xi + \eta)(\xi - \eta), \quad x = (\xi - \eta)^2, \quad \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a};$$

aus diesen folgt dann

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a}, \quad y = \xi^2 - \eta^2,$$

daher ist
$$\xi = \sqrt{\frac{ax + y^2}{2y}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{ax - y^2}{2y}}.$$

Da nun $\xi - \eta = \sqrt{x}$, so folgt, daß

$$\sqrt{ax + y^2} - \sqrt{ax - y^2} = \sqrt{2xy}$$

die Gleichung der gesuchten Kurve ist; macht man rational, so wird sie

$$y(x^2 + y^2) = 2ax^2,$$

welches eine Kissoide des Diokles darstellt (Bd. I, S. 38).

---

1) Brief an Leibniz vom 28. Oktober 1705 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, IV S. 286—287).

Die hier erhaltenen Kurven sind, ebenso wie die Debeauneschen, die Integrale von Differentialgleichungen erster Ordnung; von diesem Gesichtspunkte aus stehen sie anderen, die durch Eigenschaften ihres Bogens definiert werden, nahe[1]); bei diesen werden wir jedoch nicht verweilen, da sie wichtiger geometrischer Eigenschaften entbehren, und wenden uns zu anderen, in deren Definition das Krümmungsmaß eintritt.

Fünfzehntes Kapitel.

Die Ribaucourschen Kurven.

219. Dem Johann Bernoulli verdanken wir die Stellung und erste Lösung einer wichtigen Aufgabe, nämlich folgender: „Über einer gegebenen Geraden AG als Achse und durch den Punkt A eine Kurve zu ziehen von der Beschaffenheit, daß der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte B von der Achse in einem gegebenen Verhältnisse geteilt wird, sowie die orthogonalen Trajektorien der obiger Bedingung entsprechenden Kurven zu bestimmen".[2]) Von Leibniz alsdann den englischen Mathematikern vorgelegt, zog sie die Aufmerksamkeit vieler Gelehrten auf sich, besonders in Hinsicht auf die orthogonalen Trajektorien[3]); heute ist sie eines der klassischen Beispiele in den Lehrbüchern über Differentialgleichungen für deren Anwendung auf die Geometrie. Auf die das Problem lösenden Kurven traf A. Ribaucour im Verlauf seiner berühmten Untersuchungen über die Minimalflächen[4]), daher wurden sie Ribaucoursche Kurven genannt; wir werden uns dieser Bezeichnung bedienen, um keine neuen Namen einzuführen, können jedoch nicht verschweigen, daß es richtiger und gerechter gewesen wäre, sie Bernoullische Linien zu nennen.

Nimmt man die Abszisse als unabhängige Variabele, so lautet die Differentialgleichung für das Bernoullische Problem:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{n} y \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

---

1) S. unter anderen folgende Abhandlungen: N. Fuß, *Exercitatio analytico-geometrica circa lineam curvam singulari proprietate praeditam* (Acta Acad. Petrop. pro anno MDCCLXXX Pars II, 1784) und *Disquisitio analytico-geometrica de variis speciebus linearum curvarum singulari proprietate praeditarum* (Das. pro anno MDCCLXXXI, Pars I, 1784); A. Valde, *Ueber die Curven, deren Bogen der Tangente des Leitstrahlwinkels proportional ist, und die damit verwandten Curvenclassen* (Arch. Math. Phys. 2. Ser. XIV, 1895).

2) S. den Brief an Leibniz vom 11. März 1716 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 958).

3) Vgl. *Joh. Bernoulli Opera* II, S. 290—291.

4) *Etude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, §§ 123 bis 128 (Mém. cour. par l'Acad. de Belgique, XLIV, 1880).

oder einfacher
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n}{y}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

In Anwendung allgemeiner Methoden ersetzen wir diese Gleichung durch die beiden folgenden

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{n}{y}(1 + y'^2).$$

Nach Elimination von dx ergibt sich

$$\frac{y'\,dy'}{1 + y'^2} = n\frac{dy}{y},$$

die alsbald integriert ergibt:

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Eine neue Integration liefert — wenn man als Koordinatenanfang den Ausgangspunkt der Kurve nimmt —

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

welches Resultat im wesentlichen schon der Aufgabensteller erhielt.

Aus der Theorie der binomischen Differentiale ergibt sich, daß die angegebene Quadratur ausführbar ist, wenn $\frac{1}{2n} = k$ oder $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = k$, wo k eine ganze Zahl ist, d. h. wenn n die Form $\frac{1}{2k+1}$ oder $\frac{1}{2k}$ hat, also gleich $\frac{1}{h}$ ist, wo h eine beliebige ganze Zahl. Wir setzen nun der Bequemlichkeit halber $n = -\frac{1}{m+1}$, wo m eine neue ganze Zahl und erhalten dann an Stelle von (2)

$$dx = \frac{y^{\frac{1}{m+1}} \cdot dy}{\sqrt{c^{\frac{2}{m+1}} - y^{\frac{2}{m+1}}}};$$

oder auch, wenn man $y^{\frac{1}{m+1}} = \eta$, $c^{\frac{1}{m+1}} = \gamma$ setzt,

$$dx = \frac{(m+1)\,\eta^{m+1} \cdot d\eta}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}}.$$

Setzen wir endlich $\eta = \gamma \sin\varphi$, so sehen wir, daß zur Darstellung der gesuchten Kurven folgendes Gleichungspaar dienen kann:

$$x = (m+1)\,c\int_0^\varphi \sin^{m+1}\varphi \cdot d\varphi, \qquad y = c\,\sin^{m+1}\varphi \quad \ldots \quad (4)$$

und dies bestätigt, daß die angedeutete Quadratur ausführbar ist, wenn m eine ganze Zahl.

Bevor wir die Untersuchung der Gleichung (4) fortsetzen, betrachten wir einige Spezialfälle, die besonderen Werten von m entsprechen:

1) $m = 0$. Die Gleichungen (4) werden dann zu $x = -c\cos\varphi$, $y = c\sin\varphi$ und stellen dann den Kreis dar

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

2) $m = 1$. Wir bekommen

$$x = 2c\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\cdot d\varphi, \qquad y = c\sin^2\varphi,$$

oder
$$x = c\int_0^{\varphi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi, \quad y = \frac{c}{2}(1-\cos 2\varphi),$$

oder endlich

$$x = \frac{c}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{c}{2}(1-\cos 2\varphi),$$

die (vgl. Nr. **198**) eine gemeine Zykloide darstellen.

3) $m = -2$. Aus (4) ergibt sich

$$x = -c\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}, \qquad y = \frac{c}{d\varphi}.$$

oder
$$x = -c\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi, \qquad y = \frac{c}{\sin\varphi}.$$

Nun gibt erstere

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = e^{-\frac{x}{c}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi = e^{\frac{x}{c}}, \quad e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2}{\sin\varphi},$$

und wenn wir dies mit der zweiten kombinieren

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

welche Gleichung — wie wir Nr. **234** sehen werden — einer Kettenlinie angehört.

4) $m = -3$. Die Gleichungen (4) gehen über in

$$x = -2c\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = 2c\operatorname{ctg}\varphi, \qquad y = \frac{c}{\sin^2\varphi},$$

und nach Elimination von φ wird

$$x^2 = 2c(y-c),$$

also die Gleichung einer Parabel.

Diese vier speziellen Kurven dienen als Typen für die vier Kategorien, in die (wie schon Johann Bernoulli bemerkte) die fraglichen Kurven zerfallen, je nachdem m gerade oder ungerade, positiv oder negativ ist. Die Glieder jeder dieser Klassen erfreuen sich besonderer Eigenschaften, wie wir jetzt zeigen wollen.

I. $m+1$ **eine positive ungerade Zahl.** Wird die angegebene Quadratur ausgeführt, so werden die Gleichungen (4)

$$\frac{x}{c} = -\cos\varphi\left\{\sin^m\varphi + \sum_{k=1}^{k=\frac{m}{2}} \frac{m(m-2)\cdots(m-2k+2)}{(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}\sin^{m-2k}\varphi\right\},$$

$$\frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi.$$

Führt man den Parameter $\tau = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ein, so sieht man, daß diese Kurven rational, von der Ordnung $2(m+1)$ und symmetrisch zur x-Achse sind, sowie die unendlich fernen Kreispunkte als $(m+1)$ fache Punkte haben; für $m=0$ gehen sie in einen Kreis über; sie können daher — wie es Ribaucour getan hat — mit dem Namen Kreise höherer Ordnung belegt werden.

II. $m+1$ **eine positive gerade Zahl.** Die Gleichungen (4) liefern dann

$$\frac{x}{c} = -\cos\varphi\left\{\sin^m\varphi + \sum_{k=1}^{k=\frac{m-1}{2}} \frac{m(m-2)\cdots(m-2k+2)}{(m-1)(m-3)\cdots(m-2k+1)}\sin^{m-2k}\varphi\right\}$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdots m}{2\cdot 4\cdots(m+1)}, \qquad \frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi,$$

und diese stellen transzendente Kurven dar, die aus unzählig vielen zykloidenförmigen Wellen bestehen; für $m=1$ findet man wieder die gemeine Zykloide.

III. $m+1$ **eine negative ungerade Zahl.** Die entsprechenden Kurven werden folgendermaßen dargestellt

$$\frac{x}{(m+1)c} = \frac{\cos\varphi}{m+2}\left\{\sin^{m+2}\varphi + \sum_{k=1}^{k=-\frac{m}{2}-1} \frac{(m+3)(m+5)\cdots(m+2k-1)}{(m+4)(m+6)\cdots(m+2k)}\sin^{m+2k}\varphi\right\}$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m+2)}\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi.$$

Auch diese sind transzendent und haben als typische Form die der Kettenlinie.

IV. $m+1$ **eine negative gerade Zahl.** In diesem Falle werden die Gleichungen (4)

$$\frac{x}{(m+1)c} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{m+2}\left\{\sin^{m+3}\varphi + \sum_{k=1}^{k=-\frac{m+1}{2}} \frac{(m+3)(m+5)\cdots(m+2k-1)}{(m+4)(m+6)\cdots(m+2k)}\sin^{m+2k+1}\varphi\right\},$$

$$\frac{y}{c} = \sin^{m+1}\varphi.$$

Sie stellen rationale Kurven von der Ordnung $m+1$ dar, welche, da sie die Parabel als typische Form haben, — nach dem Vorschlage Ribaucours — mit dem Namen Parabeln höherer Ordnung belegt werden könnten.

220. Wir nehmen die Gleichungen (4) wieder auf, um daraus folgenden Ausdruck für den Bogen abzuleiten

$$s = (m+1)\,c\int_0^\varphi \sin^m\varphi \cdot d\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Es folgt daraus, wenn m positiv ist, und wir mit L_m die Länge des zwischen den Punkten $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gelegenen Kurvenbogens bezeichnen, daß

$$L_m = \begin{cases} (m+1)\,c\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdots m}\,\dfrac{\pi}{2}, & \text{wenn } m \text{ gerade,} \\ (m+1)\,c\,\dfrac{2\cdot 4\cdots(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots m}, & \text{wenn } m \text{ ungerade;} \end{cases} \quad \ldots \quad (6)$$

in jedem Falle aber ist

$$\frac{L_m}{L_{m-2}} = \frac{m+1}{m},$$

eine bemerkenswerte von E. Dubois[1]) entdeckte Beziehung. Dieselben Gleichungen (4) geben, m immer als positiv vorausgesetzt,

$$\int y \cdot dx = (m+1)\,c^2 \int \sin^{2(m+1)}\varphi \cdot d\varphi;$$

daher, wenn wir zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ integrieren, und mit A_m die entsprechende Fläche bezeichnen

$$A_m = (m+1)\,c^2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m+2)}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

weshalb $\qquad A_m = A_{m-1} + \frac{1}{2m} A_{m-1}$

ist, eine zweite elegante Relation, die man ebenfalls Dubois verdankt.

Als Ausdruck für den Krümmungsradius R erhält man im allgemeinen

$$R = -(m+1)\,c\,\sin^m\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Eliminiert man φ aus (5) und (8), so bekommt man

$$s = -\frac{1}{m}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{(m+1)\,c}\right)^{-\frac{2}{m}} - 1}}, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

welches die natürliche Gleichung der fraglichen Kurve ist. Setzen wir

$$(m+1)\,c = a, \qquad m = \frac{1-n}{1+n},$$

so nimmt sie folgende bequemere Form an

$$s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.\,^{2)} \quad \ldots \ldots \quad (9')$$

---

1) *Sur une famille des courbes cycloïdales* (Nouv. Corr. Math. VI, 1880).

2) Cesàro-Kowalewski, *Vorl. ü. Natürliche Geometrie,* S. 59.

Vergleichen wir diese mit der natürlichen Gleichung der Sinusspiralen (Bd. I, S. 476)

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - 1}},$$

so sehen wir, daß diese und die Ribaucour'schen Kurven zu einer allgemeinen Kurvenklasse gehören, die folgende natürliche Gleichung hat

$$s = a \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^m - 1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Sind nun R_1 und s_1 Krümmungsradius und Bogen der zugehörigen Evolute, so findet man, da (vgl. Nr. **245**)

$$R_1 = R \frac{dR}{ds}, \quad s_1 = R,$$

$$R_1 = \frac{s_1}{a} \sqrt{\left(\frac{s_1}{b}\right)^m - 1}$$

als natürliche Gleichung der Evolute; nun werden wir (Nr. **235**) sehen, daß dies die natürliche Gleichung einer Kurve ist, bei welcher der Bogen proportional einer Potenz der Abszisse ist: **daher gehören die Sinusspiralen und die Ribaucourschen Kurven zu einer Klasse, die gebildet wird von solchen Kurven, bei deren Evoluten die Abszisse proportional einer Potenz des Bogens ist.**[1])

Bemerkenswert sind diejenigen Ribaucourschen Kurven, bei denen m positiv und ganz ist; sie können nämlich als spezielle trochoidale Hüllkurven aufgefaßt werden. Man betrachte einen Kreis C_0, einen Durchmesser d desselben und eine feste Gerade r; wenn C_0 ohne zu gleiten auf r rollt, so umhüllt der Durchmesser d eine gemeine Zykloide C_1: es ist dies ein interessanter Satz, den Chasles[2]) 1837

1) E. Cesàro, *Sur une Note de géométrie infinitesimale* (Nouv. Ann. Math., 3e. Sér. XIII, 1894). — Dieselben Kurven sind auch besondere Fälle der (nach E. Wölffings Vorschlag) sogenannten Cesàroschen Kurven, bei denen der Krümmungsradius proportional dem vom Inzidenzpunkte an gerechneten Normalabschnitte ist, welchen die in bezug auf einen festen Kreis genommene Polare dieses Punktes abgrenzt.

2) *Aperçu historique*, 2. Aufl. (Paris, 1875) S. 69. — Dieser schöne Satz läßt sich leicht mit Benutzung der Fig. 20 (Taf. II) unter Beibehaltung der in Nr. **198** angewandten Bezeichnungen beweisen. Man erkennt nämlich leicht, daß die Gleichung des Durchmessers $C'O'$ ist

$$x - y \cdot \operatorname{ctg} \varphi = r(\varphi - \operatorname{ctg} \varphi),$$

oder

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = r(\varphi \sin \varphi - \cos \varphi).$$

Wird diese differenziert, so erhält man

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = r(2 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi),$$

welche Gleichung mit der vorigen kombiniert ergibt

$$x = \frac{r}{2}(2\varphi + \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{r}{2}(3 - \cos 2\varphi).$$

entdeckte und den Todhunter ziemlich viel später wiederum auffand.[1]) Läßt man nun die Zykloide C_1 auf der Geraden r rollen, so wird ihre Basisgerade eine neue Kurve C_2 umhüllen. Aus dieser entsteht in ähnlicher Weise eine Kurve C_3, usw. Eine dieser Kurven wird durch die Gleichungen (4) dargestellt. Diese bemerkenswerte Tatsache wurde zum ersten Male durch N. Nicolaïdes[2]) und dann von E. Dubois[3]) veröffentlicht, war aber 1868 schon von Mannheim und Ribaucour beobachtet worden, die ein Verfahren entdeckt hatten, der Reihe nach alle fraglichen Kurven zu erhalten.[4]) — Die in Rede stehenden speziellen Ribaucourschen Kurven gehören einem System an, dessen Charakteristiken $\mu = 2(m+1)$ und $\nu = 2$ sind; daher liegen die Berührungspunkte der von einem Punkte an sie gezogenen Tangenten auf einer Kurve von der Ordnung $2(m+2)$, für die jener Punkt ein $2(m+1)$-facher ist.

Ribaucour'sche Kurven treten auch bei der Lösung mechanischer Probleme auf, wie folgendes Beispiel zeigen möge. Joh. Bernoulli hat vor etwa 200 Jahren folgende Frage aufgeworfen[5]): „In einer Vertikalebene eine Kurve zu finden, von der Art, daß, wenn ein Körper sie infolge seines Eigengewichtes frei durchläuft, er in allen ihren Punkten einen Druck auf sie ausübt, der gleich seinem absoluten Gewichte ist.“ Es ist klar, daß der bewegte Punkt noch einer anderen Kraft unterworfen sein muß außer der Schwerkraft, da sonst die horizontale Gerade die einzige Kurve sein würde, die der Aufgabe genügt. Wenn nun das Gesetz, dem der bewegte Körper unterworfen ist, dies ist, daß die Kraft für alle Punkte der Kurve dieselbe ist, so heißt diese — wenn wir die Namengebung von B. Peirce[6]) benutzen — Barytrope, wenn aber der Druck konstant ist, Tautobaryde. Die Aufgabe Bernoullis war kaum gestellt, als sie auch

---

Wenn man nun setzt

$$\frac{\pi r}{2} - x = x_1, \quad 2r - y = y_1, \quad \pi - 2\varphi = \varphi_1,$$

so gehen diese über in

$$x_1 = \frac{r}{2}(\varphi_1 - \sin\varphi_1), \qquad y_1 = \frac{r}{2}(1 - \cos\varphi_1),$$

welches die kanonischen Gleichungen einer gemeinen Zykloide, erzeugt durch einen Kreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$, sind.

1) Nouv. Corr. Math. Question 203 (gelöst in IV, 1878, S. 65). Vgl. Besant, *Notes on roulettes and glisettes,* 2. Aufl. (Cambridge, 1890) S. 34.

2) *Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques,* 4e Livraison (Athènes, 1871) S. 103ff.

3) S. den S. 141 a. Aufsatz.

4) Nouv. Corr. Math. VI, 1880, S. 224—225. S. auch F. Morley, *On adjustable cycloidal and trochoidal curves* (Amer. Journ. Mathem. XVI, 1894).

5) Acta erud. Suppl. II, S. 291; *Joh. Bernoulli opera* I, S. 141.

6) *Physical and celestial Mechanics,* S. 370.

schon die Aufmerksamkeit hochberühmter Geometer auf sich zog, wie des Marquis de l'Hôpital, Varignons und Eulers; P. Jullien[1]) und C. H. Müller[2]) haben die so erhaltenen Resultate, die weniger der Geometrie als der Mechanik angehören, zusammenfassend dargelegt. Letzterer hat dann insbesondere folgendes Problem eingehend behandelt: „Es sind diejenigen ebenen Kurven zu bestimmen, auf denen sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer treibenden Kraft derart bewegt, daß das Verhältnis (n) zwischen dem durch die Kraftkomponente allein ausgeübten Drucke und dem von der Zentrifugalkraft herrührenden ein bestimmtes sei.“ Als Differentialgleichung der gesuchten Kurven findet sich

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{k(v_0 + 2gy)^{\frac{1}{n}} - 1}};$$

die Kurven sind also, wie angegeben, Ribaucoursche Kurven.

221. Das durch die Ribaucourschen Kurven gelöste Problem bietet eine unbestreitbare Analogie mit folgendem, zu Ende des 18. Jahrhunderts von einem wenig bekannten Mitgliede der Petersburger Akademie behandelten[3]): „Eine Kurve von der Eigenschaft zu finden, daß das Verhältnis des Krümmungsradius R zu S_n ein konstantes ($= m$) ist, wo S_n die Entfernung des Koordinatenanfangs von dem Durchschnittspunkte der Tangente mit der Abszissenachse bedeutet.“ Es läßt sich alsbald leicht lösen, wenn man als unabhängige Variabele den Winkel φ der Normalen mit der x-Achse wählt; nennen wir, wie gewöhnlich, den Kurvenbogen s, so haben wir

$$dx = ds \cdot \sin\varphi, \quad dy = ds \cdot \cos\varphi, \quad S_n = x + y \cdot \operatorname{ctg}\varphi,$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{dx}{\sin\varphi \cdot d\varphi};$$

daher lautet die Bedingung des Problems

$$\frac{dx}{\sin\varphi \cdot d\varphi} = m\,(x + y \operatorname{ctg}\varphi),$$

oder

$$dx = m\,(x \sin\varphi + y \cos\varphi)\,d\varphi. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Dieser Ausdruck ist integrierbar, und liefert, wenn mit a die Integrationskonstante bezeichnet wird,

$$x + a = m\,(y \sin\varphi - x \cos\varphi). \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Eliminieren wir y aus (11) und (12), so erhalten wir

$$dx \sin\varphi - (x + a)\cos\varphi \cdot d\varphi = mx \cdot d\varphi$$

oder

$$dx - x\frac{m + \cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = a \operatorname{ctg}\varphi \cdot d\varphi. \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Setzt man nun

$$\frac{dz}{z} = -\frac{m + \cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

1) *Problèmes de mécanique rationelle* I, S. 405.

2) *Ueber barytrope und tautobaryde Curven* (Diss. Marburg, 1880).

3) M. Platzmann, *Solutio problematis ex methodo tangentium inversa* (Acta Acad. Petrop. pro anno MDCCLXXXI, Pars II, Petropoli 1785).

so hat man $$\log\frac{1}{z} = m \log \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} + \log\sin\varphi,$$

das heißt $$z = \frac{(1+\cos\varphi)^m}{\sin^{m+1}\varphi}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Wegen Gleichung (14) aber wird (13) nun zu
$$dx + x\frac{dz}{z} = a \operatorname{ctg}\varphi \cdot d\varphi,$$

daher ist $$xz = a\int z \operatorname{ctg}\varphi \cdot d\varphi;$$

also wegen (15)
$$x\frac{(1+\cos\varphi)^m}{\sin^{m+1}\varphi} = a\int\frac{(1+\cos\varphi)^m\cos\varphi}{\sin^{m+1}\varphi}\,d\varphi = a\int\frac{\cos\varphi\cdot\sin^{m-2}\varphi}{(1-\cos\varphi)^m}\,d\varphi. \quad . \quad (16)$$

Unter der Voraussetzung, daß $m \neq 1$, erhält man durch Integrieren, wenn man die Integrationskonstante mit b bezeichnet:
$$\frac{x(1+\cos\varphi)^m}{a\sin^{m+1}\varphi} = \frac{1}{2(m-1)}\,\frac{\sin^{m-1}\varphi}{(1-\cos\varphi)^{m-1}} - \frac{1}{2(m+1)}\,\frac{\sin^{m+1}\varphi}{(1-\cos\varphi)^{m+1}} + b$$

oder, wenn wir mit c die willkürliche Konstante ab bezeichnen, und dann (12) anwenden
$$\left.\begin{aligned} x &= c\frac{\sin^{m+1}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m} + a\frac{1-m\cos\varphi}{m^2-1}; \\ y &= c\frac{(1+m\cos\varphi)\sin^m\varphi}{(1+\cos\varphi)^m} + \frac{a\sin\varphi}{m^2-1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Dies ist die analytische Darstellung der gesuchten Kurve, im Falle $m \neq 1$. Offenbar sind diese Kurven algebraisch oder nicht, je nachdem m rational ist oder nicht; wenn m eine ganze Zahl, so sind sie außerdem rational.

In dem bis jetzt ausgeschlossenen Falle $m = 1$ wird Gl. (16)
$$\frac{x}{a}\,\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \int\frac{\cos\varphi\cdot d\varphi}{(1-\cos\varphi)\sin\varphi} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin\varphi\cdot d\varphi}{1-\cos\varphi} - \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi};$$

wird integriert und die Integrationskonstante mit $\frac{c}{2a}$ bezeichnet, so ergibt sich
$$2x + a = c(1-\cos\varphi) - a(1-\cos\varphi)\log\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi},$$
und bei Anwendung der Gleichung (12)
$$2y = c\sin\varphi + a(1-\cos\varphi) - a\sin\varphi\cdot\log\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}. \quad . \quad . \quad (18)$$

Diese Gleichungen stellen die Kurve in dem jetzt betrachteten Falle dar; sie ist im allgemeinen transzendent. — Setzen wir im besonderen $a = 0$, so erhalten wir
$$x = c(1-\cos\varphi), \qquad y = c\sin\varphi;$$
durch Elimination von φ ergibt sich hieraus
$$x^2 + y^2 - cx = 0,$$

die Gleichung eines Kreises. Daß dieser sich unter den gesuchten Kurven befinden mußte, war vorauszusehen; daher ist dies nichts weiter als eine Bestätigung der Rechnung. — Ähnlicherweise verfährt man im Falle $m = -1$; die so entstehenden Kurven sind auch immer transzendent.

Zum Schlusse sei bemerkt: Wenn man in der von Bernoulli (Nr. **219**) gestellten Aufgabe, die durch die Ribaucour'schen Kurven gelöst wird, an Stelle des Verhältnisses das Produkt aus dem Krümmungsradius und der entsprechenden Normalen setzt, so erhält man eine neue Art von Kurven, deren vollständige Bestimmung, die von G. Scheffers[1]) ausgeführt wurde, elliptische Integrale verlangt.

Sechzehntes Kapitel.

Die Spirale von Norwich oder Sturm und die Eulersche Kurve.

222. Ein ziemlich allgemeines Problem, das zuerst von Jacob Riccati gelöst wurde, ist folgendes: „Eine Kurve zu bestimmen, für welche der Ausdruck des Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte als Funktion des zugehörigen Radiusvektor gegeben ist".[2]) Dieses Problem führt zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch eine Quadratur bei folgendem Verfahren integrierbar ist: Sind ϱ, ω die Polarkoordinaten und $R = \varphi(\varrho)$ der Krümmungsradius, so haben wir die Gleichung

$$\frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - 2\varrho\varrho''} = R = \varphi(\varrho) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Man setze $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega} = p$, dann hat man

$$\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = \frac{d\varrho'}{d\varrho}\,\frac{d\varrho}{d\omega} = p\frac{dp}{d\varrho},$$

und daher wird die Gleichung (1)

$$\varphi(\varrho) = \frac{(\varrho^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2p^2 - \varrho p\frac{dp}{d\varrho}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Integriert man diese Gleichung, so erhält man p als Funktion von ϱ und demnach ist, den gemachten Bestimmungen gemäß,

$$\omega + \alpha = \int \frac{d\varrho}{p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

1) *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume* II. Aufl. (Leipzig, 1910) S. 135—143; *Zusammenhang zwischen der Abbildung eines Kreiszylinders und den Rotationsflächen konstanter Krümmung* (Arch. Math. Phys. III. Reihe, VI, 1903).

2) S. *Soluzione generale del problema inverso intorno a' raggi osculatori* (Giorn. de' Letterati d'Italia XI, Venezia 1712). M. s. auch N. Fuß, *Solutio problematis ex methodo tangentium inversa* (Nov. Acta Acad. Petrop. IV. 1788).

Nun setzen wir, um (2) zu integrieren, $\varrho^2 = x$, $\varrho^2 + p^2 = y$, $\varphi(\varrho) = \varphi(\sqrt{x}) = f(x)$, und wir können dann schreiben

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{2}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{y^3}} \frac{dy}{dx},$$

d. h.
$$\frac{1}{f(x)} = 2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right),$$

demnach ist
$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{f(x)}.$$

Setzt man jetzt für x und y wieder ihre Werte ein, so findet man

$$\frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + p^2}} = \int \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\varphi(\varrho)},$$

woraus, wenn man
$$\int \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\varphi(\varrho)} = \psi(\varrho) - c$$

setzt, sich ergibt
$$p = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - [\psi(\varrho) - c]^2}}{\psi(\varrho) - c}.$$

Setzen wir in (3) für p diesen Wert ein, so ergibt sich

$$\omega + \alpha = \int \frac{\psi(\varrho) - c}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - [\psi(\varrho) - c]^2}} \cdot d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist die Polargleichung der Kurve[1]); aus dieser folgt nun, daß

$$s = \int \frac{R \cdot dR}{\sqrt{R^2 - [\psi(R) - c]^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die natürliche Gleichung derselben ist. Wenden wir nun die Formeln an (vgl. Nr. **251**), welche die Elemente R und s mit den entsprechenden der Evolute verknüpfen, nämlich $R_1 = R\frac{dR}{ds}$, $s_1 = R$, so erhalten wir

$$R_1 = \sqrt{s_1^2 - [\psi(s_1) - c]^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als natürliche Gleichung der Evolute von (1).

Mehr als ein Jahrhundert nach Riccati zog ein Spezialfall dieses Problems — der einfachste — die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich, nämlich der Fall, daß der Krümmungsradius gleich dem Radiusvektor ist. Von ihm spricht C. Sturm 1857 in einer Note zu seinem *Cours d'analyse*[2]), daher der Name Sturmsche Spirale, den man dieser Kurve beigelegt hat[3]); elf Jahre später beschäftigte sich J. Sylvester mit ihr während des 1868 zu Norwich abgehaltenen Kongresses der British Association for the Advancement of Science; daher der Name Spirale von Norwich, den man der Kurve gegeben

1) Die Gl. (4) findet sich ohne Beweis im II. Bd. des *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis* von O. Schlömilch, 2. Aufl. (Leipzig, 1874) S. 340.

2) Vgl. 6. Aufl. (Paris, 1880) II, S. 106.

3) Nicolaïdes, *Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques*, S. 136 (Athènes, 1872).

hat[1]); ein Jahr darauf lieferte dieselbe Kurve Stoff zu einer Abhandlung von O. Schlömilch.[2]) — Die Polargleichung der neuen Kurve erhält man aus (4), wenn man $\varphi(\varrho) = \varrho$ und demnach auch $\psi(\varrho) = \varrho$ setzt; sie ist demnach

$$\omega + \alpha = \int \frac{(\varrho - c)\, d\varrho}{\varrho\sqrt{2c\varrho - \varrho^2}};$$

nach Ausführung der angegebenen Integration ergibt sich dann

$$\omega + \alpha = \sqrt{\frac{2\varrho - c}{c}} - 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2\varrho - c}{c}} \quad \ldots \quad (7)$$

oder auch, wenn wir $c = 2a$ setzen,

$$\omega + \alpha = \sqrt{\frac{\varrho - a}{a}} - 2 \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \cdot \quad \ldots \quad (7')$$

Die natürliche Gleichung lautet dagegen

$$s = \frac{R + c}{3}\sqrt{\frac{2R - c}{c}}, \quad \ldots \quad (8)$$

oder, wenn man wieder $c = 2a$ setzt,

$$s = \frac{R + 2a}{3}\sqrt{\frac{R - a}{a}}. \quad \ldots \quad (8')$$

Die natürliche Gleichung der Evolute hingegen ergibt sich, wenn man in Gl. (6) $\psi(s_1) = s_1$ setzt, und ist daher

$$R_1^2 = 2cs_1 - c^2. \quad \ldots \quad (9)$$

Schreiben wir diese in der Form

$$R_1^2 = 2c\left(s_1 - \frac{c}{2}\right),$$

so erkennt man (vgl. Nr. **211**), daß diese eine gemeine Kreisevolvente darstellt. **Die Spirale von Sturm ist demnach die Evolvente der Kreisevolvente, d. h. die zweite Evolvente eines Kreises.** Einen Teil der Kurve zeigt die Fig. 34 auf Taf. III; die Kurve windet sich in schnell größer werdenden Windungen um den Kreis herum, ist symmetrisch zur x-Achse und hat auf dieser unzählig viele Doppelpunkte.

Wir wollen hier zugleich bemerken, daß die Gleichung (7′) Ähnlichkeit mit folgender hat

$$\omega = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{a} + \arcsin \frac{\frac{a}{2}}{\varrho}, \quad \ldots \quad (10)$$

die eine Kurve darstellt, die in der angewandten Mathematik vorkommt, und die von Sylvester[3]), weil sie durch Rollen eines

---

1) *Note on the successive evolute to a circle* (Phil. mag. 4. Ser. XXXVI, 1868); *Outline trace of the Theory of reducible Cyclodes* (Proc. London math. Soc. II, 1869).

2) *Über eine Spirale* (Zeitschr. Math. Phys. XIV, 1869).

3) M. s. die oben zitierten Aufsätze.

Kreises erzeugt werden kann, Konvolute des Kreises[1]) genannt wurde.

223. Wenn man die Polarkoordinaten ϱ, ω einer ebenen Kurve als Funktionen einer unabhängigen Variabelen t ansieht und ihren Bogen mit s, ihren Krümmungsradius mit R bezeichnet, so hat man, wie leicht zu beweisen ist,

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\varrho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 + 2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2\frac{d\omega}{dt} - \varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\frac{d\varrho}{dt}\frac{d^2\omega}{dt^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wird im besonderen vorausgesetzt, daß man als Variabele t den Radius vector ϱ nimmt, so hat man

$$R = \frac{\left[\left(\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho\left(\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^3 + 2\frac{d\omega}{d\varrho} + \varrho\frac{d^2\omega}{d\varrho^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Nennen wir nun den Winkel zwischen Tangente und Radius vector μ, und die Länge des vom Anfang auf die Tangente gefällten Lotes p, so haben wir

$$\operatorname{tg}\mu = \varrho\frac{d\omega}{d\varrho}, \qquad p = \varrho\sin\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und daher ist

$$p = \frac{\varrho^2\frac{d\omega}{d\varrho}}{\sqrt{\left(\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2 + 1}}, \qquad \frac{dp}{d\varrho} = \frac{2\varrho\frac{d\omega}{d\varrho} + \varrho^2\frac{d^2\omega}{d\varrho^2} + \varrho^3\left(\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^3}{\left\{\left(\varrho\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

und infolgedessen

$$R = \varrho\frac{d\varrho}{dp}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dieser eleganten Beziehung bediente sich Euler — in einer der Petersburger Akademie am 20. Aug. 1781 vorgelegten Abhandlung[2]) — um die Aufgabe zu lösen (von der wir die Lösung Riccatis in der vorigen Nummer dargelegt haben), nämlich „eine Kurve zu finden, bei welcher der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte eine Funktion des Abstandes jenes Punktes von einem festen Punkte O ist". Nehmen wir O als Pol, so wird R eine Funktion von ϱ sein, also

$$R = f(\varrho).$$

Demnach gibt (14)

$$p = \int\frac{\varrho\cdot d\varrho}{f(\varrho)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

1) Es möge hier bemerkt werden, daß Barrow in seinen *Lectiones geometricae* sich schon des Ausdruckes Konvolute, jedoch in einem ganz anderen Sinne bedient hat: s. *The mathematical Works of J. Barrow ed. Whewell* (Cambridge, 1860) S. 295—297.

2) *De curvis, quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus* (Mém. Acad. St. Pétersbourg, IX, 1824).

Da überdies der Winkel μ der Kathete p in dem rechtwinkligen Dreiecke, das ϱ zur Hypotenuse hat, gegenüberliegt, so ist

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{p}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}},$$

und also wegen der ersten der Gleichungen (13)

$$\varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{p}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}.$$

Setzen wir hierin für p seinen Wert aus (15), so erhalten wir nach einer Integration

$$\omega = \int \frac{p \cdot d\varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - p^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und dies ist die allgemeine Gleichung der gesuchten Kurve.

In dem einfachsten Falle, in welchem $f(\varrho) = \frac{\varrho}{\mu}$, wird (15) zu $p = \mu\varrho + c$, wo c eine Konstante bedeutet; die Gl. (16) wird demnach

$$\omega = \int \frac{(\mu\varrho + c) \cdot d\varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - (\mu\varrho + c)^2}},$$

eine Quadratur, der elementar ausführbar ist.[1]) Wenn insbesondere $c = 0$, so hat man

$$\omega = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \log \frac{\varrho}{a}, \quad \text{oder} \quad \varrho = a e^{\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \omega},$$

weshalb die gesuchte Kurve eine logarithmische Spirale ist.

Komplizierter ist der Fall $f(\varrho) = \frac{\varrho^2}{a}$, mit dem Euler sich befaßt hat; dann werden die Gleichungen (15), (16) zu

$$p = a \int \frac{d\varrho}{\varrho} = a \log \frac{\varrho}{c}, \qquad \omega = \int \frac{a \log \frac{\varrho}{c} \cdot d\varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - \left(a \log \frac{\varrho}{c}\right)^2}} \quad . \quad . \quad (17)$$

Diese Integration ist nicht ausführbar. Dennoch hat Euler gezeigt, wie man nichtsdestoweniger die erhaltene Kurve in ihre kleinsten Einzelheiten hinein diskutieren kann. Wir wollen ihm darin nicht folgen, sondern uns darauf beschränken, eine besondere Eigenschaft, die die Eulersche Kurve besitzt, anzuführen. Aus der Gl. (17) folgt

$$\frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{a \log \frac{\varrho}{c}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - \left(a \log \frac{\varrho^2}{c}\right)^2}}, \quad \text{ferner ist} \quad \frac{ds}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \left(a \log \frac{\varrho}{c}\right)^2}}, \quad . \quad (18)$$

1) Daß diese Kurven Evolventen zyklischer Kurven sind, hat E. Wölffing in dem Aufsatze *Ueber eine besondere Klasse transcendenter Kurven* (Arch. Math. Phys., III. Reihe IV, 1902) gezeigt.

daher $$ds - a \cdot d\omega = d\sqrt{\varrho^2 - \left(a \log \frac{\varrho}{c}\right)^2}$$
und wenn integriert wird,
$$s = a\omega + \sqrt{\varrho^2 - \left(a \log \frac{\varrho}{c}\right)^2} + Const.$$
Nun gibt $\sqrt{\varrho^2 - \left(a \log \frac{\varrho}{c}\right)^2}$ die Projektion q des Radius vector auf die Tangente, also ist
$$s = a\,\omega + q + Const.,$$
welche elegante Beziehung sich leicht in einem Satze aussprechen läßt. Beachten wir schließlich, daß der Voraussetzung gemäß $\varrho = \sqrt{aR}$, und setzen wir $b = \frac{c^2}{a}$, so wird Gleichung (18)
$$s = \sqrt{a} \int \frac{dR}{\sqrt{4R - a\left(\log \frac{R}{b}\right)^2}};$$
und dies ist die natürliche Gleichung der Kurve.

Die Formeln (14)—(16) sind es, die man in der Regel herbeizuziehen hat, wenn es sich um die Untersuchung solcher Kurven handelt, die durch eine Beziehung zwischen dem Krümmungsradius R und dem Abstande p der entsprechenden Tangente von einem festen Punkte definiert sind. Nehmen wir einmal an, daß diese Beziehung folgende sei
$$R = kp^n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$
wo k und n gegebene Konstanten sind. Wegen (14) kann man dann schreiben
$$\varrho \cdot d\varrho = kp^n \cdot dp,$$
die integriert ergibt $$\varrho^2 = \frac{2k}{n+1} p^{n+1} - c, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$
und zur Darstellung aller fraglichen Kurven dienen kann. Ihre Evoluten erfreuen sich einer eleganten Eigenschaft, die wir jetzt darlegen wollen[1]). Zu dem Zwecke beachten wir, daß aus den Beziehungen, welche die natürlichen Kurvenelemente R und s mit denen der Evolute verknüpfen (Nr. **251**), sich ergibt, daß
$$R_1 = \frac{R \cdot dR}{ds}.$$

---

1) Sie bildet den Gegenstand der Question 493 der *Nouv. Ann. de Math.*, die so lautet: „P sei ein Punkt einer Kurve **A**, C das Krümmungszentrum für P, O ein fester Punkt als Ausgangspunkt der Radienvektoren; CD sei senkrecht zu CP und D der Schnittpunkt von CD mit dem Vektor PO bezw. seiner Verlängerung. Wenn der Krümmungsradius der Kurve **A** proportional einer beliebigen Potenz n des von O auf die Kurventangente gefällten Lotes ist, so ist der Krümmungsradius der Evolute von **A**, der dem Punkte C entspricht, gleich $n \cdot CD$"; eine Lösung derselben, die von der im Texte gegebenen verschieden ist, findet sich im I. Bd. (1862) der II. Reihe dieser Zeitschrift (S. 321—322); sie rührt von G. Sacchi her.

Nun kann man aus Gleichung (16) der Reihe nach ableiten:

$$\varrho \cdot d\omega = \frac{p \cdot d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}, \qquad ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2 = \frac{\varrho^2 \cdot d\varrho^2}{\varrho^2 - p^2},$$

$$ds = \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}};$$

hieraus und aus (19) folgt

$$R_1 = nkp^{n-1}\sqrt{\varrho^2 - p^2}.$$

Wenn man nun durch das Krümmungszentrum C eines beliebigen Kurvenpunktes P die Parallele zur Tangente zieht, und deren Schnitt D mit dem Radius vector OP bestimmt, so hat man

$$CD = R \cdot \operatorname{ctg} \mu;$$

setzt man für R seinen Wert kp^n, und für $\operatorname{ctg} \mu$ den Ausdruck $\frac{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}{p}$, so kann man schreiben

$$CD = kp^{n-1}\sqrt{\varrho^2 - p^2}.$$

Folglich ist

$$R_1 = n \cdot CD,$$

welche Beziehung die oben angedeutete elegante Eigenschaft ausdrückt und die Krümmungsradien der Evoluten aller durch die Gleichung (19) dargestellter Kurven zu konstruieren lehrt. Unter diesen befinden sich, wie wir hinzufügen wollen, viele uns schon bekannte Kurven; man erkennt dies, wenn man die Formeln (15) und (16) anwendet, indem man berücksichtigt, daß nach Elimination von p aus (19) und (20) man erhält

$$R = k\left[\frac{n+1}{2k}\,\varrho^2 + c\right]^{\frac{n}{n+1}},$$

weshalb man im vorliegenden Falle in diesen Formeln zu setzen hat

$$f(\varrho) = k\left[\frac{n+1}{2k}\,\varrho^2 + c\right]^{\frac{n}{n+1}}.$$

Für $n = 0$ erhält man ersichtlich einen Kreis; für $n = 1$ erhält man, wenn $k \neq 1$, der Reihe nach

$$f(\varrho) = \sqrt{k}\,\sqrt{\varrho^2 + c}, \qquad p = \frac{\sqrt{\varrho^2 + c}}{\sqrt{k}}, \qquad \omega = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + c} \cdot d\varrho}{\varrho\sqrt{(k-1)\varrho^2 - c}};$$

erinnern wir uns der Gleichung (14) auf S. 102, so sehen wir, daß, wenn wir hierin

$$c = -\frac{r^2}{n^2}, \qquad k = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}$$

setzen, sie eine Epi- oder Hypozykloide darstellen. In dem ausgeschlossenen Falle, $k = 1$, hat man hingegen

$$\sqrt{-c} \cdot \omega = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + c} \cdot d\varrho}{\varrho} = \sqrt{\varrho^2 - c} + \sqrt{-c} \arcsin \frac{\sqrt{-c}}{\varrho};$$

setzen wir hierin $c = -a^2$, so sieht man, daß die dargestellte Kurve eine Kreisevolvente ist. — Einige andere Kurven erhält man,

indem man $c = 0$ setzt und dem n verschiedene Werte erteilt, wie wir kurz noch vermerken wollen:

	$n =$	$f(\varrho) =$	$p =$	$\omega =$	Gleichung	Kurve
1.	1	$\frac{\varrho}{\sqrt{k}}$	$\frac{\varrho}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k-1}} \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$	$\varrho = \varrho_0 e^{\sqrt{k-1} \cdot w}$	Logarithm. Spirale.
2.	3	$\sqrt{\frac{8\varrho^3}{k}}$	$\sqrt{\frac{k\varrho}{2}}$	$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\varrho - \frac{k}{2}}}{\sqrt{\frac{k}{2}}}$	$\varrho = \frac{k}{1 + \cos \omega}$	Parabel.
3.	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3} k \varrho}$	$\sqrt{\frac{2\varrho^3}{k}}$	$\operatorname{arc} \sin \frac{4\varrho - k}{k}$	$\varrho = \frac{k}{4}(1 + \sin \omega)$	Kardioide.
4.	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3k^2}{\varrho}$	$\frac{\varrho^3}{9k^2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{\varrho^2}{9k^2}$	$\varrho^2 = 9k^2 \sin 2\omega$	Bernoullische Lemniskate.
5.	-3	$-\frac{\varrho^3}{k^2}$	$\frac{k^2}{\varrho}$	$-\frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{k^2}{\varrho^2}$	$xy + \frac{k^2}{2} = 0$	gleichseitige Hyperbel.

Dem Leser überlassen wir es, zu verifizieren, daß, wenn $c \neq 0$, für $n = -3$ die entsprechende Kurve ein zentrischer Kegelschnitt ist.

Siebzehntes Kapitel.

Die logarithmische Kurve und einige verwandte.

224. Die Gleichung

$$y = b \cdot {}^{B}\!\log \frac{x}{a} \qquad (1)$$

stellt bei Variation der Konstanten a (immer positiv vorausgesetzt, was erlaubt ist), b, B unendlich viele Kurven dar, von denen jede eine logarithmische Kurve oder Logistica genannt wird. Schreiben wir (1) in folgender Weise

$$x = aB^{\frac{y}{b}}, \qquad (2)$$

so sehen wir, daß es anderseits berechtigt ist, sie mit dem von Leibniz und anderen gebrauchten Namen Exponentialkurve zu belegen.[1])

---

1) Man könnte augenscheinlich dieselben Namen den Kurven

$$y = ce^{h\alpha}$$

geben, wo α der Winkel ist, welchen die Tangente mit der Abszissenachse bildet; solche Kurven besitzen mehrere bemerkenswerte geometrische und mechanische Eigenschaften, die E. Collignon im Aufsatze *Problème de géometrie* (Ass. fr. XXXII, 1904) ausführlich erörtert hat.

Da die Logarithmen entdeckt wurden, als die graphische Darstellung der Funktionen schon bekannt war, so mußte der Begriff der logarithmischen Kurve sowohl eine zeitgemäße als auch eine leichte Sache sein; kein Wunder daher, daß der Ursprung dieser Kurve nicht genau bestimmt ist. M. Cantor bemerkt bei dieser Gelegenheit, daß Huygens, der die schönsten Eigenschaften dieser Kurve entdeckt hat[1]), von ihr als einer schon bekannten Linie spricht[2]); und in der Tat erwähnt Montucla[3]) ihr Vorkommen in dem Werke J. Gregorys, *Geometriae pars univesralis* (Venetiae, 1667), während E. Torricelli von ihr in einem Briefe an Michelangelo Ricci vom 24. Aug. 1644[4]) spricht — woselbst die kürzlich veröffentlichte[5]) Abhandlung *De hemihyperbola logarithmica* zitiert wird — und schließlich löst sie eine von Debeaune 1638 dem Descartes vorgelegte Aufgabe[6]). Es geht hieraus hervor, daß die Vaterschaft dieser Kurve eine ungewisse oder mehrfache ist; als Geburtsdatum kann man aber das Dezennium 1635—1645 annehmen.

Da $B = e^{ln B}$, so kann Gleichung (2) auch geschrieben werden

$$x = a \cdot e^{\frac{ln B}{b} y},$$

und man sieht, daß die wesentlichen Konstanten in (1) und (2) nur zwei sind, und man kann daher immer annehmen, daß $B = e$ sei. Wenn wir daher zugeben, daß nur die Neperschen Logarithmen in Betracht kommen sollen, so können wir die (1) schreiben

$$y = b \log \frac{x}{a}; \qquad (3)$$

demnach ist

$$x = a e^{\frac{y}{b}}. \quad ^{7)} \qquad (4)$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt weiter, daß

$$y' = \frac{b}{x} \;^{8)}, \quad \text{und daß} \quad \frac{Y-y}{X-x} = \frac{b}{x} \qquad (5)$$

---

1) S. die Abh. *De la cause de la pesanteur*, gelesen vor der Pariser Akademie den 28. August 1669 und veröffentlicht 1690 als Anhang zum *Traité de la lumière*.

2) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* III. (2. Aufl. Leipzig 1901) S. 232.

3) *Histoire des mathématiques*, Nouv. éd. II. (Paris, 1799) S. 85.

4) G. Ghinassi, *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli precedute dalla vita di lui* (Faenza, 1864) S. 17.

5) G. Loria, *Le ricerche inedite di Evangelista Torricclli sopra la curva logaritmica* (Bibl. math., 3. Ser. I, 1900).

6) Vgl. auch eine Note v. P. Tannery im *Intermédiaire* VII, 1900, S. 94—95.

7) Schreibt man die Gleichung (3) in der Form

$$\frac{y}{b} = \log \frac{b}{a} + \log \frac{x}{b},$$

so sieht man, daß die Annahme $b = a$ nur einer besonderen Wahl des Koordinatenanfanges entspricht.

8) Somit ist die Kurve der natürlichen Logarithmen ($a = b = 1$) dadurch ausgezeichnet, daß sie die Abszissenachse unter einem Winkel von 45° schneidet.

die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) ist. Wenn wir hierin $X = 0$ setzen, so zeigt sich: **Die Subtangente in bezug auf die y-Achse ist bei der logarithmischen Kurve konstant,** nämlich gleich b.

Es ist dies — wie leicht zu zeigen — eine für diese Kurve charakteristische Eigenschaft, die zuerst von E. Torricelli und dann von Huygens[1]) bemerkt worden ist. Wenn man in (5) X und Y als gegeben ansieht, so zeigt sie: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte an die logarithmische Kurve gezogenen Tangenten liegen auf einem Kegelschnitte, der durch jenen Punkt geht; folglich ist jede derartige Kurve eine panalgebraische Kurve, die einem System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 1$ angehört.**

Die Gleichung (4) liefert für $y = 0$ $x = a$, daher geht die Kurve immer durch den Punkt $(a, 0)$ (s. Taf. IV, Fig. 36); sie zeigt ferner, daß für $x = 0$ $y = \pm \infty$ wird, je nachdem $b \lesseqgtr 0$; außerdem folgt aus ihr

$$y' = \frac{b}{x}, \quad y'' = -\frac{b}{x^2}, \quad yy'' = -\frac{by}{x^2}.$$

Hieraus ersieht man, daß

$yy'' > 0$, die Kurve also konvex gegen die x-Achse ist, wenn y und b entgegengesetzte Vorzeichen haben;

$yy'' < 0$, die Kurve konkav gegen die x-Achse ist, wenn y und b dasselbe Vorzeichen haben.

Je nach dem Vorzeichen von b hat also die Kurve einen kontinuierlichen Zweig auf der positiven Seite der x-Achse, entweder von der Gestalt a) oder b) in Fig. 36.[2])

Wenn nun
$$\frac{y}{b} = \pm \frac{2h+1}{2k}$$
ist, wo h und k ganze Zahlen sind, so liefert Gleichung (4)
$$x = \pm a \sqrt[2k]{e^{2h+1}},$$
und wenn man nun, was ja natürlich ist, zuläßt, daß alle Punkte, deren Koordinaten die Funktion $f(x, y)$ zu Null machen, auch der Kurve $f(x, y) = 0$ angehören, so müßte man den Schluß ziehen, daß die logarithmische Linie auch eine Reihe diskontinuierlicher Punkte besäße, die sich in Abständen befinden, die kleiner als eine beliebig gegebene Zahl sind. Diese würden also einen diskontinuierlichen punktierten Zweig bilden, der symmetrisch zu dem vorigen in bezug

---

1) Die von Huygens bloß ausgesprochenen Theoreme wurden zuerst von G. Grandi 1701 bewiesen (*Geometrica demonstratio theorematum Hugeniorum circa logisticam seu logarithmicam,* Firenze) M. s. auch G. Fontana, *Sopra il centro di gravità della logistica finita od infinitamente lunga* (Mem. Acc. Torino X u. XI).

2) Die Unterscheidung dieser beiden Fälle wird im allgemeinen übersehen; daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Angabe in Salmon-Fiedler, *Analyt. Geometrie d. höh. eb. Kurven* (Leipzig, II. Aufl., 1882) S. 374 zu modifizieren.

auf Oy liegt (Fig. 36c, d); „unde vides curvam Logarithmicam habere suam comparentem ut ex. gr. Hyperbola".[1])

Es ergibt sich dann weiter aus denselben Gleichungen

$$\int_{y_0}^{Y} x \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} a e^{\frac{y}{b}} dy = \left| ab\, e^{\frac{y}{b}} \right|_{y_0}^{Y} = b\,(X - x_0).$$

Es verhalten sich also die Flächen, gelegen zwischen der Kurve, der Asymptote und zwei Ordinaten, wie die Differenzen dieser Ordinaten, da sie durch das Produkt dieser Differenzen und der Subtangente gemessen werden[2]). Setzen wir z. B. voraus, daß $b > 0$ sei und im speziellen $x_0 = 0$, $y_0 = \infty$, so wird die rechte Seite der obigen Gleichung bX, folglich: **Die zwischen der Kurve, der Asymptote und einer Abszisse gelegene unbegrenzte Fläche ist gleich der Hälfte des Rechtecks, welches diese Abszisse und die Subtangente zu Seiten hat.**

Diese eleganten Sätze über die Quadratur rühren von Torricelli und Huygens her; auch mit Fragen über die Kubatur haben diese sich befaßt und erhielten bemerkenswerte Resultate.

Wenn die Fläche zwischen Kurve, Asymptote und der zu y gehörenden Ordinate um die Asymptote rotiert, so erzeugt sie das Volumen

$$V = \pi \int_{\infty}^{y_0} x \cdot dy = \pi a^2 \int_{\infty}^{y_0} e^{\frac{2y}{e}} dy = \left| \frac{\pi a^2 b}{2} e^{\frac{2y}{e}} \right|_{\infty}^{y_0} = \left| \frac{1}{2} \pi b x^2 \right|_{0}^{x_0} = \frac{3}{2} \frac{\pi b x_0^2}{3},$$

d. h. **ein Volumen gleich $\frac{2}{3}$ desjenigen Kegels, der zur Höhe die Subtangente und als Grundkreisradius jene Ordinate hat.** Lassen wir dieselbe Fläche um die Abszissenachse rotieren, so bekommen wir einen anderen Ausdruck U für das erzeugte Volumen; nehmen wir nämlich jene Ordinate als y-Achse, so sehen wir mittels teilweiser Integration, daß, wenn $b > 0$, jenes Volumen ausgedrückt wird durch

$$U = \pi \int_{y=\infty}^{y=0} y^2 dx = \pi \left| (y^2 - 2yb + b^2)\, e^{\frac{y}{b}} \right|_{\infty}^{0} = 2\pi a b^2 = 6 \frac{\pi a b^2}{3};$$

es ist also sechsmal so groß als der Kegel, dessen Höhe jene Ordinate und dessen Grundkreisradius die Subtangente ist. Aus den

---

1) So schrieb Joh. Bernoulli an Leibniz am 25. Mai 1712 (Leibniz ed. Gerhardt III S. 887) gelegentlich der berühmten Frage über die Existenz der negativen Zahlen. Über diese Frage s. m. auch W. Heymann, *Die Logarithmen negativer Zahlen bei der Auflösung transzendenter Gleichungen* (Zeitschr. math. Unterr. XXXII, 1901). Gegen die im Texte angenommene Auffassung wurde von E. Wölffing (Württemb. Mitt., II. Reihe VI, 1904, S. 34) geltend gemacht, daß die Exponentialfunktion eine eindeutige Funktion ist; daher entsteht der punktierte Zweig aus einer Verwechselung der Funktion $e^{\pm\frac{2h+1}{2k}}$ mit der Funktion $\sqrt[2k]{e^{\pm 2h+1}}$.

2) S. auch Craig, *The quadrature of logarithmic curve* (Phil. Trans. n°. 242, 1698).

beiden vorigen Sätzen ergibt sich durch eine zweimalige Anwendung der Pappus-Guldinschen Regel, daß der Schwerpunkt des ersteren **Flächenstücks (begrenzt von der Kurve, Asymptote und der Ordinate) von der Asymptote einen Abstand gleich ein Viertel der Ordinate und von der Ordinate den Abstand gleich der Subtangente hat.**

Die Rektifikation der logarithmischen Kurve kann vermittelst Logarithmen aufgeführt werden. Dies hat der Marquis de l'Hôpital in zwei Briefen, welche er den 26. Juli und den 10. September 1692 an C. Huygens schrieb,[1]) bemerkt; die bezügliche Rechnung wurde bald darauf mittels eines anderen Verfahrens durch Huygens[2]) ausgeführt und von Côtes in seiner *Harmonia mensurarum* mitgeteilt (zugleich mit der Berechnung des durch Rotation der Kurve um die Asymptote erzeugten Volumens): das so erhaltene Resultat kann man in eine bemerkenswert elegante Form bringen durch Einführung der hyperbolischen Funktionen.[3]) Ohne uns jedoch mit den Einzelheiten hierüber aufzuhalten, wollen wir einen beachtenswerten Satz betreffend die Rektifikation der logarithmischen Kurve beweisen.[4])

Bezeichnet s wie gewöhnlich den Bogen der Kurve (4), so findet man

$$ds = \frac{dy}{b}\sqrt{b^2 + a^2 e^{\frac{2y}{b}}},$$

daher

$$b\,(s - y) = \int dy \left(\sqrt{b^2 + a^2 e^{\frac{2y}{b}}} - b\right)$$

Um die Integration auszuführen, setzen wir

$$\sqrt{b^2 + a^2 e^{\frac{2y}{b}}} - b = z$$

und erhalten

$$s - y = \int \frac{b+z}{2b+z}\, dz = z - b \log(2b + z) + Const.$$

Integriert man nun, wenn $b > 0$, zwischen $y = 0$ und $y = \infty$, oder

1) Oeuvres de Huygens X (La Haye, 1905) S. 305 und 307; vgl. auch den Brief vom 14. Dezember 1692, womit der Briefwechsel zwischen de l'Hopital und Leibniz begann (Leibniz ed. Gerhardt II, S. 216). Betreffs anderer Fragen über dieselbe Kurve, welche Huygens und de l'Hopital behandelt haben, sei auf den Aufsatz von G. Loria *Curve speciali nel carteggio di C. Huygens* (Bibl. math., III Reihe, VII, 1906) verwiesen.

2) *Construction d'un problème de géométrie: Trouver une ligne droite égale à une portion donnée de ligne logarithmique* (Hist. des Ouvrages des Savants, Février 1693).

3) Barsotti, *Determinazione del centro di gravità di alcune linee piane, coll' uso delle funzioni iperboliche* (Annali di Tortolini II, 1851). Vgl. Günther, *Die Theorie der gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S. 1881) S. 241.

4) P. Fuß, *Quantum differat longitudo arcus curvae ab asymptota, utraque in infinitum usque protensa, inquiritur* (Mém. Acad. St. Pétersb. IX, 1824).

was dasselbe ist wegen der vorvorigen Gleichung, zwischen $z=\sqrt{a^2+b^2}-b$ und $z=0$, so erhält man

$$\lim_{x=\infty}(s-y)=\sqrt{a^2+b^2}-b+b\log\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}+b}.$$

Demnach strebt die Differenz zwischen einem Bogen der log. Kurve und seiner Projektion auf die Asymptote einem endlichen Grenzwerte zu, wenn der eine Endpunkt des Bogens sich unbegrenzt der Asymptote nähert. In dem speziellen Falle $a=b=1$ liefert die Gleichung

$$\lim_{x=\infty}(x-s)=\sqrt{2}-1+\log\frac{2}{\sqrt{2}+1},$$

wie zuerst P. Fuß gefunden hat.[1])

Ferner wollen wir bemerken, daß man die Kurve leicht punktweise konstruieren kann. Setzt man nämlich in Gleichung (4) der Reihe nach ein $y=y_1,\ 2y_1,\ 3y_1,\ \ldots\ldots,\ ny_1$ und bezeichnet mit $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ die zugehörigen Werte von x, so erhält man

$$x_1=be^{-\frac{y_1}{a}},\quad x_2=be^{-\frac{2y_1}{a}},\ \ldots,\quad x_{n-1}=be^{-\frac{(n-1)y_1}{a}},\quad x_n=be^{-\frac{ny_1}{a}},$$

und daraus ergibt sich

$$x_n=\frac{x_1\cdot x_{n-1}}{b},$$

wenn man also den Punkt (x_1, y_1) kennt, kann man die übrigen vermittels ähnlicher Dreiecke konstruieren.[2])

Ist die logarithmische Kurve konstruiert, so hat man damit einen Weg, auch andere Kurven zu zeichnen; z. B. lassen die Gleichungen ((3) in Nr. **215**), durch welche wir die Debeauneschen Kurven darstellten, erkennen, daß diese konstruiert werden können, indem man die entsprechenden Ordinaten einer Geraden und einer Exponentialkurve addiert. Dasselbe kann man sagen in bezug auf die Visoria, eine durch die Gleichung

$$y=\frac{q}{p}\,x+\frac{bx}{a}\log\frac{2x-a}{2p-a}$$

dargestellte Kurve, welcher E. Saavedra begegnete[3]), indem er die folgende Aufgabe löste: „Die Form und die Größe der Stufen eines Amphitheaters zu bestimmen, damit alle Zuschauer einen bestimmten Punkt des Saales klar sehen können." Ähnlich kann man

1) Dasselbe Resultat scheint schon früher erhalten zu sein, und zwar von Johann Albrecht, dem ältesten Sohne Leonhard Eulers; s. die *Adversaria mathematica*, veröffentlicht im I. Bande von *L. Euleri Opera postuma mathematica et physica* (Petropoli, 1862).

2) Der Leser wird die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes der logarithmischen Kurve im § II des Aufsatzes von J. Sobotka, *Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plankurven* finden (Prager Ber. 1898).

3) *Anales de la construction y de la industria* (Madrid 1886, S. 329—332). Einige Eigenschaften der Kurve wurden durch F. Gomes Teixeira (*Obras* V, S. 10—11) hervorgehoben.

schließlich Kurven erhalten, deren Ordinaten die figurierten Zahlen darstellen;[1]) halten wir nämlich daran fest, daß in dem Ausdrucke

$$\frac{m^{n+p}-m^{p-1}}{(m-1)^{p+1}}\,a-\sum_{i=1}^{i=p}\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{i!}\,\frac{m^{p-i}a}{(m-1)^{p-i+1}}$$

a, m, p Konstante seien, n aber variiere, so erhalten wir die Kurve

$$y=\frac{m^{x+p}-m^{p-1}}{(m-1)^{p+1}}\,a-\sum_{i=1}^{i=p}\frac{x(x+1)\ldots(x+i-1)}{i!}\,\frac{m^{p-1}a}{(m-1)^{p-i+1}},$$

zu der man offenbar gelangen kann durch Addition entsprechender Ordinaten einer logarithmischen und einer parabolischen Kurve.

Stellen wir uns ein räumliches kartesisches Koordinatensystem vor mit den drei zueinander senkrechten Achsen Ox, Oy, Oz, und legen durch Ox eine beliebige Ebene σ, so können wir die Punkte derselben auf zwei Achsen, die O als Anfangspunkt haben, beziehen, auf Ox als Abzissenachse und die Senkrechte in O dazu als Ordinatenachse. Sind nun x_1, y_1 die Koordinaten eines Punktes P_1 von σ, x, y die des Punktes P, welcher die Orthogonalprojektion von P_1 auf die xy-Ebene ist, so haben wir

$$x=x_1,\qquad y=y_1\cdot\cos\alpha,$$

wenn α der Winkel der Ebene σ gegen die xy-Ebene ist. Betrachten wir jetzt in der Ebene σ die Kurven mit den Gleichungen bzw.

$$\frac{x_1}{a}=\log\frac{y_1}{b},\qquad \frac{y_1}{b}=\log\frac{x_1}{a},$$

so werden diese als Projektionen die Kurven haben

$$\frac{x}{a}=-\log\cos\alpha+\log\frac{y}{b},\qquad \frac{y}{b\cdot\cos\alpha}=\log\cos\alpha+\log\frac{x}{a\cos\alpha}\cdot$$

Nun stellt die erste eine zur ursprünglichen gleiche Kurve dar, die zweite eine der entsprechenden affine, und somit schließen wir auf folgenden Doppelsatz:

Die Projektion der logarithmischen Kurve auf eine jede Ebene, welche $\left.\begin{matrix}\text{durch die Asymptote}\\\text{eine zur Asymptote senkr. Achse}\end{matrix}\right\}$ geht, ist eine ihr $\left\{\begin{matrix}\text{kongruente}\\\text{affine}\end{matrix}\right\}$ Kurve.[2])

1) Das Problem, die Kurve zu finden, deren Ordinaten die Dreieckzahlen sind, wurde in den *Mémoires de Trevoux* vom September bis Oktober 1701 gestellt und alsbald von Carré gelöst (*Histoire de l'Acad. Royale des Sciences,* Année MDCCI) und dann von Fontenelle (*Eléments de la géométrie de l'infini,* Paris 1727, Sect. VII, Prop. II) für alle Polygonalzahlen verallgemeinert. Die im Texte aufgeworfene allgemeine Frage wurde von Girolamo und Giuseppe Rinaldis behandelt in *Saggio di una nuova teoria dei numeri figurati* (Raccolta di opusculi scientifici e filologici, XXXVIII, 1748; vgl. G. Loria, *Abh. zur Gesch. der Mathem.* IX. Heft, 1899, S. 265).

2) Dem Verfasser brieflich mitgeteilt (1901) von Oberlehrer J. Finsterbusch in Zwickau.

Exkurs über eine allgemeine Aufgabe.[1]) Der letzte Satz führt auf das folgende

Problem. Gegeben seien zwei sich schneidende Ebenen; es sollen in der ersten Ebene alle Kurven ermittelt werden, welche sich durch beliebig festgelegte Parallelprojektion auf die zweite Ebene ohne Änderung ihrer Gestalt abbilden.

Es stelle (Taf. IV, Fig. 37) das Rechteck $MNOP$ die erste Ebene, das Rechteck M_1N_1OP die Projektionsebene, OP die Spur beider Ebenen vor. M_1, N_1 seien die orthogonalen Projektionen der Punkte M, N auf die Projektionsebene, so daß $\sphericalangle MOM_1 = \sphericalangle NPN_1 = \omega$ der Neigungswinkel beider Ebenen ist. Die Kurven der ersten Ebene (Hauptebene) mögen in einem orthogonalen Koordinatensystem der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ betrachtet werden, dessen $\mathfrak{x}$-Achse in die Spur beider Ebenen fällt; O sei der Nullpunkt des Systems, OP die positive $\mathfrak{x}$-Achse, OM die positive $\mathfrak{y}$-Achse. Die Kurven in der Projektionsebene werden auf dasjenige orthogonale System der x, y bezogen, welches die orthogonale Projektion des $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ Systems auf die zweite Ebene ist; dieses System hat also wieder O zum Nullpunkt, und die Spur zur x-Achse; OP sei die positive x-Achse, OM_1 die positive y-Achse. Ist nun $\mathfrak{A}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ irgend ein Punkt in der Hauptebene $MNOP$, so sei — für schiefwinklige Parallelprojektion — der Punkt A (xy) die Projektion von $\mathfrak{A}(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ auf M_1N_1OP. Der projizierende Strahl $p \equiv \mathfrak{A}A$ treffe die Ebene M_1N_1OP unter dem Neigungswinkel $\sphericalangle \mathfrak{A}AB = \vartheta$, und seine Orthogonalprojektion AB auf die Ebene M_1N_1OP schließe mit der positiven Richtung OP der Spur den $\sphericalangle DAB = \varphi$ ein. Bei dieser so vorgegebenen schiefwinkligen Parallelprojektion sind alsdann für alle möglichen Strahlen $\mathfrak{A}A$ die Winkel ϑ und φ zwei vorgegebene Konstanten. Die Koordinaten x, y von A werden dann durch die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{A}$ wie folgt ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{x} - \mathfrak{c}\mathfrak{y} \\ y &= \qquad \mathfrak{c}'\mathfrak{y}, \\ \text{wobei} \quad \mathfrak{c} &= \sin\omega \cdot \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \mathfrak{c}' &= \cos\omega - \sin\omega \cdot \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

zur Abkürzung gesetzt ist. Diese Formeln (6) geben bei der durch die Konstanten ϑ, φ eindeutig fixierten Parallelprojektion die Relationen zwischen den Koordinaten projektiv zugeordneter Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ und (xy). Dabei ist

$$\mathfrak{c}' \gtrless 0 \qquad (6')$$

festzusetzen; denn ist $\mathfrak{c}' = 0$, so sind die projizierenden Parallelstrahlen der Hauptebene $MNOP$ parallel, was hier auszuschließen ist.

---

1) Resumé einer Abhandlung von M. E. Burckardt, *Allgemeine Bestimmung derjenigen Kurven, welche ähnliche (kongruente) Projektionskurven besitzen*, die im Arch. Math. Phys. demnächst veröffentlicht werden wird.

Es sei (in Parameterdarstellung)

$$\mathfrak{x} = F(\tau), \qquad \mathfrak{y} = G(\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

irgendeine die Aufgabe lösende Kurve, wobei τ den variablen Parameter bezeichnet; alsdann wird den Formeln (6) zufolge die Projektionskurve der Kurve (7) in Beziehung auf das (xy) System analytisch vermerkt durch

$$x = F(\tau) - \mathfrak{c}\, G(\tau), \qquad y = \mathfrak{c}' G(\tau). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Gleiche Werte des Parameters τ in (7) und (8) liefern projektiv zugeordnete Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ und (xy). Soll jetzt die Projektionskurve (8) eine der Kurve (7) ähnliche Kurve sein, so muß in der Ebene $M_1 N_1 OP$ ein ganz bestimmtes Koordinatensystem der ξ, η existieren, in bezug auf welches die Kurve (8) genau dieselbe Lage hat, wie die Kurve (7) in $MNOP$ zum $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ System, so daß folglich in Beziehung auf dieses besondere $(\xi\eta)$ System die Kurve (8) analytisch vermerkbar wird durch

$$\xi = \varkappa\, F(\sigma), \qquad \eta = \varkappa\, G(\sigma), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo $\varkappa$ eine Konstante (den Ähnlichkeitsfaktor), und σ den Parameter bezeichnet. Gleiche Werte von τ und σ in (7) und (8) liefern in Hinsicht auf die Ähnlichkeit der beiden Kurven homologe Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ und $(\xi\eta)$; solche homologe Punkte sind aber im allgemeinen nicht mehr auch projektiv zugeordnet. Nun seien $a, b, \sphericalangle A$ die Daten des soeben definierten $(\xi\eta)$ Systems für dessen Lagebestimmung im (xy) System, dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a + \gamma\xi + \alpha\eta \\ y &= b - \alpha\xi + \gamma\eta \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} \alpha = -\sin A = -s \\ \gamma = \cos A = c \end{bmatrix}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 + \gamma x - a y \\ \eta &= b_1 + \alpha x + \gamma y \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} a_1 = -\gamma a + \alpha b \\ b_1 = -\alpha a - \gamma b \end{bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Setzt man die Ausdrücke (8), (9) in die Gleichungen (10) ein, so resultieren die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \varkappa F(\sigma) &= a_1 + \gamma F(\tau) + \delta\, G(\tau) \\ \varkappa G(\sigma) &= b_1 + \alpha F(\tau) + \beta\, G(\sigma) \end{aligned} \text{ wo } \left\{ \begin{aligned} &\alpha = -\sin A, \ \gamma = \cos A \\ &\beta = -\alpha\mathfrak{c} + \gamma\mathfrak{c}', \ \delta = -\gamma\mathfrak{c} - \alpha\mathfrak{c}' \\ &a_1 = -\gamma a + \alpha b, \ b_1 = -\alpha a - \gamma b \end{aligned} \right\} \ (12)$$

Man hat folglich einerseits die Funktionen F und G, sowie anderseits den Parameter σ als Funktion von τ, also $\sigma = f(\tau)$, so aufzufinden, daß dabei die Gleichungen (12) identisch erfüllt werden. Der Herleitung gemäß liefert dann diese Gleichung

$$\sigma = f(\tau)$$

die Relation, welche zwischen solchen Parameterwerten σ, τ besteht, denen projektiv zugeordnete Punkte $(\xi\eta)$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ der beiden ähnlichen Kurven (9) und (7) entsprechen.

Man übersieht, daß die Auflösung des Systems (12) (theoretisch wenigstens) nicht nur auf eine, sondern auf mannigfache Weisen möglich sein wird. Denn nimmt man z. B. für σ irgendeine bestimmte Funktion von τ vorweg an, so werden im allgemeinen erst nach einer solchen Festsetzung die beiden Funktionen F und G durch die beiden Gleichungen (12) bestimmt sein. Dabei ist für die weitere Analyse der Gleichungen (12) die Tatsache zu beachten, daß bei Parameterdarstellung (7)

$$\mathfrak{x} = F(\tau), \qquad \mathfrak{y} = G(\tau)$$

einer ebenen Kurve entweder die eine der beiden Funktionen F, G beliebig festgesetzt, oder daß eine irgendwie zweckmäßige Beziehung zwischen $F(\tau)$ und $G(\tau)$ vorgeschrieben werden kann. Nimmt man demgemäß z. B. für F eine bestimmte Funktion an, so wird durch die beiden Gleichungen (12) im allgemeinen sowohl die Funktion G, als auch σ als Funktion von τ bestimmt sein.

Zunächst werde der folgende leicht zu beweisende Satz hervorgehoben:

Die Aufgabe hat die Eigenart, daß **durch Superposition zweier (oder mehrerer) partikularer Lösungen wiederum eine partikulare Lösung der Aufgabe hervorgeht.** Es seien nämlich

$$\mathfrak{x} = F(\tau), \qquad \mathfrak{y} = G(\tau) \quad \ldots \ldots \quad (A)$$

$$\mathfrak{x}_1 = F_1(\tau), \qquad \mathfrak{y}_1 = G_1(\tau) \quad \ldots \ldots \quad (B)$$

zwei partikulare Lösungen in der Art, daß bei beiden die geometrischen Daten $\varkappa$, ω, ϑ, φ, A bezüglich übereinstimmen, **und daß beidemal auch** σ **genau dieselbe Funktion von** τ sei, daß aber der Nullpunkt des $(\xi\eta)$ Systems im (xy) System bei der Lösung (A) der Punkt (ab), bei der Lösung (B) jedoch der Punkt $(a'b')$ sei. Alsdann ist (unter λ, μ zwei unbestimmte Multiplikatoren verstanden) die durch die Superposition

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_2 &= \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{x}_1 = \lambda\, F(\tau) + \mu F_1(\tau) \\ \mathfrak{y}_2 &= \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{y}_1 = \lambda\, G(\tau) + \mu\, G_1(\tau) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (C)$$

gebildete Kurve (C) ebenfalls eine partikuläre Lösung der Aufgabe, bei welcher $\varkappa$, ω, ϑ, φ, A dieselben Werte haben wie bei (A) und (B), während der Nullpunkt $(a''b'')$ des $(\xi\eta)$ Systems im (xy) System sich durch

$$a'' = \lambda a + \mu a', \qquad b'' = \lambda b + \mu b' \quad \ldots \quad (D)$$

bestimmt, d. h. der Punkt $(a''b'')$ ist aus (ab) und $(a'b')$ superponiert.

Bei der Analyse der Gleichungen (12) muß man die nötigen Transformationen nach Möglichkeit so einzurichten suchen, daß die auf solche Weise zu gewinnenden Resultate Geltung haben **bei ganz beliebiger Vorgabe der sieben geometrischen Daten**

$$\varkappa,\ \omega,\ \vartheta,\ \varphi,\ A,\ a,\ b$$

des Problems. Nur so kann man sicher sein, wirklich alle Kurven ohne jede Ausnahme aufzufinden, welche die geforderte Eigenschaft besitzen. Halten wir diesen Gesichtspunkt fest, so wird sich nun aber zeigen, daß es nicht möglich ist, die allgemeine Lösung der Aufgabe durch ein einziges allumfassendes Formelsystem

$$\mathfrak{x} = F(\tau), \qquad \mathfrak{y} = G(\tau)$$

zu geben. Vielmehr gabelt sich — bei ganz beliebiger Vorgabe der sechs Daten ω, ϑ, φ, A, a, b, — die Analyse der Gleichungen (12) in die beiden gesondert zu behandelnden Fälle

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &\gtrless \tfrac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right) \\ \varkappa &= \tfrac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}\right\}, \text{ wo hier und im folgenden } \Delta = (\beta - \gamma)^2 + 4\alpha\delta.$$

Tatsächlich zeigt sich dann an den finalen Resultaten, daß die Kurven, für welche $\varkappa = \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right)$ ist, von etwas anderem analytischen Charakter sind als die ersteren.

Allgemeine Lösung der Aufgabe unter der Annahme, daß $\varkappa$, ω, ϑ, φ, A, a, b gemäß den Bedingungen

$$\varkappa \gtrless \tfrac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right)$$

vorgegeben sind.

Bei beliebiger Vorgabe der sieben Daten $\varkappa$, ω, ϑ, φ, A, a, b wurde die allgemeine Lösung

$$\mathfrak{x} = F(\tau), \qquad \mathfrak{y} = G(\tau)$$

der Aufgabe geliefert durch Auflösung der Gleichungen (12), nämlich

$$\begin{aligned} \varkappa F(\tau) &= a_1 + \gamma F(\tau) + \delta G(\tau) \\ \varkappa G(\sigma) &= b_1 + \alpha F(\tau) + \beta G(\tau) \end{aligned} \text{ wo } \left\{\begin{aligned} &\alpha = -\sin A = -s,\ \gamma = \cos A = c \\ &\beta = s\mathfrak{c} + c\mathfrak{c}',\ \delta = -c\mathfrak{c} + s\mathfrak{c}' \\ &\mathfrak{c} = \sin\omega \operatorname{cotg}\vartheta \cos\varphi \\ &\mathfrak{c}' = \cos\omega - \sin\omega \operatorname{cotg}\vartheta \sin\varphi \\ &a_1 = -\gamma a + \alpha b,\ b_1 = -\alpha a - \gamma b. \end{aligned}\right\} (12^*)$$

Man führe statt der Funktionen $F(\tau)$, $G(\tau)$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = F(\tau) = A + \mathfrak{F}(\tau), \qquad \mathfrak{y} = G(\tau) = B + \mathfrak{G}(\tau) \quad . \quad . \quad (13)$$

die Funktionen $\mathfrak{F}(\tau)$, $\mathfrak{G}(\tau)$ ein, welche sich von ersteren nur um additive Konstanten A, B unterscheiden. Durch (13) erhält man aus (12*)

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\,\mathfrak{F}(\tau) &= (\gamma - \varkappa)\,A + \delta\,B + a_1 + \gamma\,\mathfrak{F}(\tau) + \delta\,\mathfrak{G}(\tau) \\ \varkappa\,\mathfrak{G}(\tau) &= \alpha\,A + (\beta - \varkappa)\,B + b_1 + \alpha\,\mathfrak{F}(\tau) + \beta\,\mathfrak{G}(\tau), \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14)$$

d. h. es resultieren die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa \mathfrak{F}(\tau) &= \gamma\, \mathfrak{F}(\tau) + \delta\, \mathfrak{S}(\tau) \\ \varkappa \mathfrak{S}(\tau) &= \alpha\, \mathfrak{F}(\tau) + \beta\, \mathfrak{S}(\tau), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

wenn die Konstanten A, B den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} (\gamma - \varkappa)\, A + \delta\, B + a_1 &= 0 \\ \alpha\, A + (\beta - \varkappa)\, B + b_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15')$$

gemäß bestimmt werden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} & A = \frac{(\varkappa - \beta)\, a_1 + \delta\, b_1}{N} = \frac{(\mathfrak{c}' - \varkappa c)\, a + (\mathfrak{c} - \varkappa s)\, b}{N} \\ & B = \frac{\alpha a_1 + (\varkappa - \gamma)\, b_1}{N} = \frac{\varkappa s a + (1 - \varkappa c)\, b}{N}, \\ & \text{wobei der Nenner } N \text{ der Ausdruck} \\ & N = (\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma) - \alpha\delta = \left[\varkappa - \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma + \varDelta^{\frac{1}{2}}\right)\right] \\ & \cdot \left[\varkappa - \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma - \varDelta^{\frac{1}{2}}\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16)$$

ist, und folglich

$$\varkappa \gtrless \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \varDelta^{\frac{1}{2}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (16')$$

festzusetzen ist, damit N nicht verschwindet.

Hiermit sind für den Fall (16′) die Gleichungen (12*) auf (15) zurückgeführt. Hinsichtlich der Auflösung des Systems (15) aber sind genau dieselben Bemerkungen am Platze, welche Seite 161 über das System (12) zu machen waren. Die allgemeine Lösung der Gleichung (12) läßt sich in einfachster Weise geben, wenn man den Quotienten $\frac{\mathfrak{S}(\tau)}{\mathfrak{F}(\tau)}$ mit dem Parameter τ identifiziert, d. h. die beiden Funktionen $\mathfrak{F}(\tau)$, und $\mathfrak{S}(\tau)$ an die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{S}(\tau)}{\mathfrak{F}(\tau)} = \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

bindet. Denn alsdann resultiert durch Division der beiden Gleichungen (15) die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{S}(\tau)}{\mathfrak{F}(\tau)} = \frac{\alpha + \beta \frac{\mathfrak{S}(\tau)}{\mathfrak{F}(\tau)}}{\gamma + \delta \frac{\mathfrak{S}(\tau)}{\mathfrak{F}(\tau)}}, \text{ also mit Rücksicht auf (17)}$$

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

womit σ in Form einer linear gebrochenen Funktion von τ bestimmt ist, während anderseits jede der beiden Gleichungen (16) in die eine Funktionalgleichung

$$\mathfrak{F}(\tau) = \frac{1}{\varkappa}(\gamma + \delta\tau)\, \mathfrak{F}(\tau) \qquad \left(\sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right) \cdot \; \ldots \quad (19)$$

übergeht. Damit ist das folgende erste allgemeine Resultat erreicht:

Werden die sieben Daten $\varkappa$, ω, ϑ, φ, A, a, b beliebig, doch so vorgegeben, daß die Ungleichung

$$\varkappa \gtrless \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right)$$

statthat, so wird die Aufgabe allgemein gelöst durch jede Kurve

$$\mathfrak{x} = A + F(\tau), \qquad \mathfrak{y} = B + \tau\,\mathfrak{F}(\tau),$$

insofern $\mathfrak{F}(\tau)$ jede Funktion bezeichnet, welche die Funktionalgleichung

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right) = \frac{1}{\varkappa}(\gamma + \delta\tau)\,\mathfrak{F}(\tau)$$

befriedigt; dabei haben die Konstanten A, B, α, β, γ, δ, die unter (16), (17) angegebene Bedeutung.

Man findet

$$\beta\gamma - \alpha\delta = \mathfrak{c}' \gtrless 0 \qquad \text{(vergleiche } 6'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

woraus sich ergibt, daß die lineare Substitution $\left(\tau_1 \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right)$ stets existent ist.

Das vorige Resultat verlangt die Auffindung aller die Funktionalgleichung

$$\mathfrak{F}(\sigma) = \frac{1}{\varkappa}(\gamma + \delta\tau)\,\mathfrak{F}(\tau) \qquad \left(\sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

auflösenden Funktionen $\mathfrak{F}(\tau)$. Im Spezialfalle $\delta = 0$ sind die $\mathfrak{F}(\tau)$ automorphe Funktionen; aber auch im Falle

$$\delta \gtrless 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

sind die $\mathfrak{F}(\tau)$ auf automorphe Funktionen zurückführbar. Multipliziert man nämlich (19) mit σ, so erhält man

$$\sigma\,\mathfrak{F}(\tau) = \frac{1}{\varkappa}(\alpha + \beta\tau)\,\mathfrak{F}(\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und weiter, wenn man von (23) die mit einer beliebigen Konstanten λ multiplizierte Gleichung (21) subtrahiert,

$$(\sigma - \lambda)\,\mathfrak{F}(\tau) = \frac{1}{\varkappa}\left[\alpha + \beta\tau - \lambda\,(\gamma + \delta\tau)\right]\mathfrak{F}(\tau),$$

oder $\quad (\sigma - \lambda)\,\mathfrak{F}(\tau) = \frac{\beta - \delta\lambda}{\varkappa}\left(\tau - \frac{-\alpha + \gamma\lambda}{\beta - \delta\lambda}\right)\mathfrak{F}(\tau);$

d. h. man erhält

$$(\sigma - \lambda)\,\mathfrak{F}(\tau) = \frac{\beta - \delta\lambda}{\varkappa}(\tau - \lambda)\,\mathfrak{F}(\tau) \qquad \left(\text{wo } \sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right), \quad . \quad (24)$$

sobald man die freiverfügbare Konstante λ an die Bestimmung

$$\frac{-\alpha + \gamma\lambda}{\beta - \delta\lambda} = \lambda, \text{ d. h. an } \delta\lambda^2 - (\beta - \gamma)\,\lambda - \alpha = 0 \quad . \quad . \quad (25)$$

bindet. Die letzte Gleichung liefert

$$\lambda = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25')$$

d. h. man erhält

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \mathfrak{B}, \text{ resp.} = \mathfrak{A}, \text{ indem (wie stets im folgenden)} \\ \mathfrak{A} = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma - \Delta^{\frac{1}{2}}\right), \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma + \Delta^{\frac{1}{2}}\right) \text{ bezeichnet wird.}\end{array}\right\} \quad (25'')$$

Führt man jetzt in (21) an Stelle von $\mathfrak{F}(\tau)$ die Funktion

$$A(\tau) = (\tau - \lambda)\,\mathfrak{F}(\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

ein, so resultiert für $A(\tau)$ die Funktionalgleichung

$$A\left(\frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right) = CA(\tau), \text{ wo } C = \frac{\beta - \delta\lambda}{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Hiermit sind die Funktionen $\mathfrak{F}(\tau)$ der Gleichung (21) auf wohlstudierte Funktionen zurückgeführt, und findet man nunmehr [indem $\lambda = \mathfrak{A}$ (vergleiche (25'')) gesetzt wird] den folgenden Satz:

«Werden die sieben Daten $\varkappa$, ω, ϑ, φ, A, a, b beliebig, doch mit Einhaltung der drei Bedingungen

$$\delta \gtrless 0, \qquad \varkappa \gtrless \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right)$$

vorgegeben, so werden sämtliche die Aufgabe lösenden Kurven angegeben durch die Formeln

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{F}(\tau) = A + \frac{A(\tau)}{\tau - \mathfrak{A}}, \qquad \mathfrak{y} = G(\tau) = B + \frac{\tau A(\tau)}{\tau - \mathfrak{A}}, \quad . \quad . \quad (I)$$

in welchen τ den variablen Parameter bezeichnet, und $A(\tau)$ jede Funktion vorstellt, welche die Funktionalgleichung

$$A\left(\frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right) = C\,A(\tau), \qquad \text{wo } C = \frac{\beta + \gamma + \Delta^{\frac{1}{2}}}{2\varkappa} \quad . \quad . \quad (II)$$

löst; dabei sind A, B, $\mathfrak{A}$, C, α, β, γ, δ die folgenden Funktionen der sieben Daten:

$$A = \frac{(\mathfrak{c}' - \varkappa c)\,a + (\mathfrak{c} - \varkappa s)\,b}{N}, \qquad B = \frac{\varkappa s a + (1 - \varkappa c)\,b}{N},$$

$$N = (\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma) - \alpha\delta = \left[\varkappa - \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma + \Delta^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[\varkappa - \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma - \Delta^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma - \Delta^{\frac{1}{2}}\right), \qquad C = \frac{\beta + \gamma + \Delta^{\frac{1}{2}}}{2\varkappa}, \qquad \Delta = (\beta - \gamma)^2 + 4\alpha\delta,$$

$$\alpha = -\sin A = -s, \quad \gamma = \cos A = c, \quad \beta = s\mathfrak{c} + c\mathfrak{c}', \quad \delta = -c\mathfrak{c} + s\mathfrak{c}',$$

$$\mathfrak{c} = \sin\omega \operatorname{cotg}\vartheta \cos\varphi, \qquad \mathfrak{c}' = \cos\omega - \sin\omega \operatorname{cotg}\vartheta \sin\varphi.$$

Der Parameter τ hat die einfache geometrische Bedeutung

$$\tau = \frac{\mathfrak{y} - B}{\mathfrak{x} - A}.$$

Die der Kurve (I) ähnliche Projektionskurve wird in bezug auf das $(\xi\eta)$ System analytisch durch

$$\xi = \varkappa\left[A + \frac{A(\sigma)}{\sigma - \mathfrak{A}}\right], \qquad \eta = \varkappa\left[B + \frac{\sigma A(\sigma)}{\sigma - \mathfrak{A}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (I')$$

in der Art dargestellt, daß je zwei Punkte $(\xi\eta)$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ projektiv zugeordnet sind, sobald die zugehörigen Parameter σ, τ die Relation

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}$$

einhalten; die lineare Substitution $\left(\tau_1, \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}\right)$ ist stets existent, da $\beta\gamma - \alpha\delta = \mathfrak{c}' \gtrless 0$ ist.

Aus dieser independenten Parameterdarstellung (I) der Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ der Kurve folgt die direkte Gleichung zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$

$$\mathfrak{y} - B - \mathfrak{A}(\mathfrak{x} - A) = A\left(\frac{\mathfrak{y} - B}{\mathfrak{x} - A}\right), \quad \ldots \ldots \quad (III)$$

und aus letzterer erhält man im System derjenigen Polarkoordinaten r, Φ, dessen Pol im $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ System der Punkt $(\mathfrak{x} = A$, $\mathfrak{y} = B)$, und dessen Anfangsstrahl $\Phi = 0$ mit der Spur beider Ebenen parallel läuft und mit der Achse der positiven $\mathfrak{x}$ gleichgerichtet ist, die Kurvengleichung

$$r = \frac{A(\operatorname{tg}\Phi)}{\sin\Phi - \mathfrak{A}\cos\Phi}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (IV)$$

welche den Radiusvektor r der Kurve als explizite Funktion der Amplitude Φ unmittelbar liefert. Das dem (r, Φ)-System in der Projektionsebene entsprechende Polarkoordinatensystem der ϱ, Θ hat zum Pol den Punkt $(\xi = \varkappa A$, $\eta = \varkappa B)$, und der Anfangsstrahl $\Theta = 0$ ist mit der Achse der positiven ξ gleichgerichtet. In diesem (ϱ, Θ)-System hat die Projektionskurve der Kurve (IV) die Gleichung

$$\varrho = \frac{\varkappa A(\operatorname{tg}\Theta)}{\sin\Theta - \mathfrak{A}\cos\Theta}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (IV')$$

und für projektiv zugeordnete Punkte (ϱ, Θ), (r, Φ) der beiden Kurven (IV'), (IV) gilt [entsprechend $\sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}$ bei der Parameterdarstellung] die Relation

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\alpha + \beta\operatorname{tg}\Phi}{\gamma + \delta\operatorname{tg}\Phi}.$$

Es ist leicht, die Gleichungen (I) an den Gleichungen (12) zu verifizieren. Die im vorigen Satze zusammengestellten Resultate sind die finalen jedoch nur für den Fall, wo die Diskriminante

$$\Delta = (\beta - \gamma)^2 + 4\alpha\delta$$

eine positive Größe ist. Denn liegt anderseits

$$\Delta < 0$$

vor, so erscheinen die Auflösungsformeln (I)

$$\mathfrak{x} = A + \frac{A(\tau)}{\tau - \mathfrak{A}}, \qquad \mathfrak{y} = B + \frac{\tau A(\tau)}{\tau - \mathfrak{A}}$$

in imaginärer Form, indem erstens $\mathfrak{A} = \frac{1}{2\delta}\left[\beta - \gamma - i(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\right]$, und

zweitens die durch (II) definierte automorphe Funktion $A(\tau)$ ebenfalls ein komplex imaginärer Ausdruck $A(\tau; i)$ wird. Es liefern folglich im Fall $\varDelta < 0$ die Formeln (I) nur dann wirklich Kurven des Problems, wenn es gelingt, die durch (II) definierte automorphe Funktion $A(\tau; i)$ gerade so zu bestimmen, daß $\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}$ ein (für reale Werte von τ) realer Ausdruck wird.

Diese zunächst schwer erscheinende Frage erledigt sich nun überraschend einfach, wenn man den Satz (a. S. 162) über die **Bildung neuer Lösungen aus bekannten durch Superposition** mit zu Hilfe nimmt. Es liefern nämlich die Formeln (I, II) für jede spezielle Funktion $A(\tau)$, welche man gerade benutzen will, immer gleich zwei Kurven, da man ja den Wert der in

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma - \varDelta^{\frac{1}{2}}\right) \text{ und } C = \frac{\beta + \gamma + \varDelta^{\frac{1}{2}}}{2\varkappa}$$

eingehenden zweiwertigen Größe $\varDelta^{\frac{1}{2}}$ zu fixieren hat. Liegt nun $\varDelta < 0$ vor, so notiere man die Formeln (I, II) zweimal, indem man dabei beide Werte von $\varDelta^{\frac{1}{2}}$ in Evidenz setzt, nämlich erstens

$$\mathfrak{x}_1 = A + \frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{y}_1 = B + \frac{\tau A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}, \quad \ldots \quad (a)$$

$$\text{wo} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma - \varDelta^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma - i(-\varDelta)^{\frac{1}{2}}\right):$$

und
$$A\left(\frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}; i\right) = \frac{\beta + \gamma + i(-\varDelta)^{\frac{1}{2}}}{2\varkappa} A(\tau; i), \quad \ldots \quad (a')$$

und zweitens
$$\mathfrak{x}_2 = A + \frac{A(\tau; -i)}{\tau - \mathfrak{B}}, \quad \mathfrak{y}_2 = B + \frac{\tau A(\tau; -i)}{\tau - \mathfrak{B}}, \quad \ldots \quad (b)$$

wo $\mathfrak{B} = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma + \varDelta^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma + i(-\varDelta)^{\frac{1}{2}}\right)$ [vergleiche 27″], und

$$A\left(\frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}; -i\right) = \frac{\beta + \gamma - i(-\varDelta)^{\frac{1}{2}}}{2\varkappa} A(\tau; i)\,. \quad \ldots \quad (b')$$

Zur Unterscheidung dieser beiden Lösungen (a), (b) sind die Koordinaten mit Indizes versehen; der zu $A(\tau; i)$ konjugiert komplexe Ausdruck $A(\tau; -i)$ löst offenbar die Gleichung (b'), sobald $A(\tau; i)$ die Gleichung (a') löst. Der erste der a. S. 162 angegebenen Sätze ist auf die Lösungen (a), (b) anwendbar, und es resultiert durch die Superposition beider [indem die darin auftretenden Multiplikatoren λ, μ gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt werden] die folgende reale Lösung der Aufgabe:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) = A + \tfrac{1}{2}\left[\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}} + \frac{A(\tau; -i)}{\tau - \mathfrak{B}}\right] = A + \Re\left[\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}\right], \\ \mathfrak{y} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2) = B + \tfrac{\tau}{2}\left[\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}} + \frac{A(\tau; -i)}{\tau - \mathfrak{B}}\right] = B + \tau\Re\left[\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}\right], \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

wo das Zeichen $\Re$ bedeuten soll, daß der reale Teil des komplexen Ausdrucks $\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}$ zu nehmen ist.

Diese so für $\varDelta < 0$ erhaltene Lösung (c) stellt nunmehr eine reelle Kurve vor. Dabei haben die sieben Daten $\varkappa$, ω, ϑ, φ, A, a, b wieder genau dieselben Werte, welche ihnen bezüglich bei Aufstellung der Formeln (a), (b) erteilt wurden, denn aus den Formeln (D) (S. 162)

$$a'' = \lambda a + \mu a', \qquad b'' = \lambda b + \mu b'$$

ergeben sich im vorliegenden Falle, wegen $a' = a$, $b' = b$ [in den Formeln (b)], und wegen $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, auch für a'', b'' wieder die Werte $a'' = a$, $b'' = b$.

Man übersieht leicht, daß man im Falle $\varDelta < 0$ auf die angegebene Weise (c) auch wirklich zu sämtlichen real existenten Kurven des Problems gelangt, insofern $A(\tau; i)$ jede Lösung von (a') vorstellt. Aus (c) lassen sich wieder leicht die den Gleichungen (III), (IV) entsprechenden herleiten; man erhält das folgende finale Resultat: **Werden die sieben Daten $\varkappa, \omega, \vartheta, \varphi, A, a, b$ beliebig, jedoch mit Einhaltung der drei Bedingungen**

$$\delta \gtrless 0, \qquad \varkappa \gtrless \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \varDelta^{\frac{1}{2}}\right)$$

vorgegeben, und liegt dabei

$$\varDelta < 0$$

vor, so werden sämtliche die Aufgabe lösenden Kurven durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$\mathfrak{x} = A + \Re\left[\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}\right], \qquad \mathfrak{y} = B + \tau\Re\left[\frac{A(\tau; i)}{\tau - \mathfrak{A}}\right], \qquad (I)$$

wo das Zeichen $\Re$ bedeuten soll „realer Teil von".

Der variable Parameter τ hat wieder die einfache geometrische Bedeutung

$$\tau = \frac{\mathfrak{y} - B}{\mathfrak{x} - A};$$

$A(\tau; i)$ stellt jede Funktion vor, welche die Funktionalgleichung

$$A\left(\frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}; i\right) = \frac{\beta + \gamma + i(-\varDelta)^{\frac{1}{2}}}{2\varkappa} A(\tau; i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

löst. Der Zusammenhang zwischen den Größen $A, B, \mathfrak{A}, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ und den sieben Daten $\varkappa, \omega, \vartheta, \varphi, A, a, b$ wird vermittelt durch die Relationen

$$A = \frac{(\mathfrak{c}' - \varkappa\mathfrak{c})\,a + (\mathfrak{c} - \varkappa s)\,b}{(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma) - \alpha\delta}, \qquad B = \frac{\varkappa s a + (1 - \varkappa c)\,b}{(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma) - \alpha\delta},$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\delta}\left(\beta - \gamma - i(-\varDelta)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad \varDelta = (\beta - \gamma)^2 + 4\alpha\delta \text{ [negativ]},$$

$$\alpha = -\sin A = -s,\ \gamma = \cos A = c,\ \beta = s\mathfrak{c} + c\mathfrak{c}',\ \delta = -c\mathfrak{c} + s\mathfrak{c}',$$

$$\mathfrak{c} = \sin\omega \operatorname{cotg}\vartheta \cos\varphi,\ \mathfrak{c}' = \cos\omega - \sin\omega \cdot \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \sin\varphi.$$

Die der Kurve (I) ähnliche Projektionskurve wird im (ξ, η) System durch

$$\xi = \varkappa\left(A + \Re\left[\frac{A(\sigma; i)}{\sigma - \mathfrak{A}}\right]\right), \qquad \eta = \varkappa\left(B + \sigma\Re\left[\frac{A(\sigma; i)}{\sigma - \mathfrak{A}}\right]\right) \quad . \quad (I')$$

in der Art dargestellt, daß je zwei Punkte (ξ, η), $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der beiden Kurven (I'), (I) projektiv zugeordnet sind, sobald die zugehörigen Parameterwerte σ, τ an die Relation

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}$$

gebunden werden. Aus (I) folgt durch Elimination von τ

$$\Re\left[\frac{A\left(\frac{\mathfrak{y} - B}{\mathfrak{x} - A}; i\right)}{\mathfrak{y} - B - \mathfrak{A}(\mathfrak{x} - A)}\right] = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

und analog für die Projektionskurve aus (I')

$$\varkappa\Re\left[\frac{A\left(\frac{\eta - \varkappa B}{\xi - \varkappa A}; i\right)}{\eta - \varkappa B - \mathfrak{A}(\xi - \varkappa A)}\right] = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III')$$

während (bei dieser Elimination von σ resp. τ) die Relation

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau} \quad \text{in} \quad \frac{\eta - \varkappa B}{\xi - \varkappa A} = \frac{\alpha + \beta\frac{\mathfrak{y} - B}{\mathfrak{x} - A}}{\gamma + \delta\frac{\mathfrak{y} - B}{\mathfrak{x} - A}} \quad \text{übergeht.}$$

Betrachtet man die Kurve (III) wieder im System derjenigen Polarkoordinaten r, Φ, dessen Pol im $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$-System der Punkt $(\mathfrak{x} = A$, $\mathfrak{y} = B)$ ist, und dessen Anfangsstrahl $\Phi = 0$ mit der Achse der positiven $\mathfrak{x}$ parallel und gleichgerichtet ist, so ist $\mathfrak{x} - A = r\cos\Phi$, $\mathfrak{y} - B = r\sin\Phi$ in (III) einzusetzen, und man erhält die explizite Kurvengleichung

$$r = \Re\left[\frac{A(\operatorname{tg}\Phi; i)}{\sin\Phi - \mathfrak{A}\cos\Phi}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Dem $(r\Phi)$-System entspricht in der Projektionsebene das $(\varrho\Theta)$-System, dessen Pol im $(\xi\eta)$ System der Punkt $(\xi = \varkappa A$, $\eta = \varkappa B)$ ist, und dessen Anfangsstrahl $\Theta = 0$ mit der Achse der positiven ξ parallel und gleichgerichtet ist, so daß $\xi - \varkappa A = \varrho\cos\Theta$, $\eta - \varkappa B = \varrho\sin\Theta$ zu setzen ist; das liefert aus (III') für die Projektionskurve die Gleichung

$$\varrho = \varkappa\Re\left[\frac{A(\operatorname{tg}\Theta; i)}{\sin\Theta - \mathfrak{A}\cos\Theta}\right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV')$$

projektiv zugeordnete Punkte $(r\Phi)$, $(\varrho\Theta)$ der beiden Kurven (IV), (IV') sind an die Relation

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\alpha + \beta\operatorname{tg}\Phi}{\gamma + \delta\operatorname{tg}\Phi}$$

gebunden.

Nunmehr werde das für den Fall $\varkappa \gtrless \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \varDelta^{\frac{1}{2}}\right)$ gültige allgemeine Resultat S. 169 auch für den speziellen Fall weitergeführt, wo $\delta = 0$ vorliegt Alsdann wird

$$\varDelta = (\beta - \gamma)^2 + 4\alpha\delta = (\beta - \gamma)^2, \qquad \varDelta^{\frac{1}{2}} = \pm(\beta - \gamma);$$

$$\frac{1}{2}\left(\beta + \gamma \pm \varDelta^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}[\beta + \gamma \pm (\beta - \gamma)] = \beta, \text{ resp } \gamma;$$

d. h. die beiden obigen Bedingungen sind alsdann die folgenden

$$\varkappa \gtrless \beta, \qquad \varkappa \gtrless \gamma.$$

Demnach ist jetzt die Aufgabe für den besondern Fall

$$\delta = 0, \qquad \varkappa \gtrless \beta, \qquad \varkappa \gtrless \gamma$$

zu behandeln. Schreibt man $A(\tau)$ statt $\mathfrak{F}(\tau)$, indem für $\delta = 0$ bereits $\mathfrak{F}(\tau)$ als automorphe Funktion definiert ist, so lautet für diesen Fall unser erstes allgemeines Resultat (S. 166):

Werden die sieben geometrischen Daten $\varkappa, \omega, \vartheta, \varphi, A, a, b$ unter Einhaltung der drei Festsetzungen

$$\delta = 0, \qquad \varkappa \gtrless \beta, \qquad \varkappa \gtrless \gamma$$

irgendwie vorgegeben, so wird die Aufgabe allgemein gelöst durch jede Kurve

$$\mathfrak{x} = A + A(\tau), \qquad \mathfrak{y} = B + \tau A(\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

wo $A(\tau)$ jede Funktion vorstellt, welche die Gleichung

$$A(\tau) = \frac{\gamma}{\varkappa} A(\tau) \qquad \left(\sigma = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}\tau\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

befriedigt. Dabei gelten die Relationen

$$A = \frac{(\mathfrak{c}' - \varkappa c)\, a + (\mathfrak{c} - \varkappa s)\, b}{(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)}, \qquad B = \frac{\varkappa s a + (1 - \varkappa c)\, b}{(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)},$$

$$\alpha = -\sin A = -s, \; \gamma = \cos A = c, \; \beta = s\mathfrak{c} + c\mathfrak{c}', \; \delta = -s\mathfrak{c} + s\mathfrak{c}' = 0,$$

$$\mathfrak{c} = \sin\omega \cdot \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \cos\varphi, \qquad \mathfrak{c}' = \cos\omega - \sin\omega \cdot \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \sin\varphi.$$

Die der Kurve (I) ähnliche Projektionskurve wird in bezug auf das $(\xi\eta)$-System durch

$$\xi = \varkappa[A + A(\tau)], \quad \eta = \varkappa[B + \sigma A(\tau)] \quad . \quad . \quad . \quad (I')$$

dargestellt; zwei Punkte $(\xi\eta)$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ der beiden Kurven (I'), (I) sind projektiv zugeordnet, sobald zwischen den zugehörigen Parameterwerten σ, τ die Relation

$$\sigma = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\tau$$

besteht. Aus der direkten Gleichung zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$

$$\mathfrak{x} - A = A\left(\frac{\mathfrak{y} - B}{\mathfrak{x} - A}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

ergibt sich [durch $\mathfrak{x} - A = r \cos \Phi$, $\mathfrak{y} - B = r \sin \Phi$] die Polargleichung

$$r = \frac{A(\operatorname{tg} \Phi)}{\cos \Phi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

der Kurve (I, III) im $(r\Phi)$ System. Aus der direkten Gleichung zwischen ξ und η

$$\xi - \varkappa A = \varkappa A \left(\frac{\eta - \varkappa B}{\xi - \varkappa A}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III')$$

ergibt sich [durch $\xi - \varkappa A = \varrho \cos \Theta$, $\eta - \varkappa B = \varrho \sin \Theta$] die Polargleichung

$$\varrho = \varkappa \frac{A(\operatorname{tg} \Theta)}{\cos \Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV')$$

der Projektionskurve im $(\varrho\Theta)$ System, in der Art, daß projektiv zugeordnete Punkte $(\varrho\Theta)$, $(r\Phi)$ der beiden Kurven (IV'), (IV) an die Relation

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \operatorname{tg} \Phi$$

gebunden sind.

Die einfachsten Kurven mit der geforderten Eigenschaft sind offenbar diejenigen, bei welchen $A(\tau)$ sich auf eine bloße Konstante reduziert, oder eine rationale Funktion von τ ist; dem entspricht dann eine gewisse Klasse algebraischer Kurven vom Geschlechte 0.

225. Ebenso wie die trigonometrischen Kurven zur Betrachtung der hypertrigonometrischen (S. 16) führten, so wurde man auch von der logarithmischen Kurve zur Betrachtung anderer ähnlicher oder komplizierterer geführt; solche sind z. B. die mit den Gleichungen

$$y = b e^{\frac{a}{x}}, \qquad y^2 = x^2 \log \frac{a^2}{x^2},$$

die O. Schlömilch betrachtet hat, wobei er die erste die reziproke logarithmische Linie, die zweite die logarithmische Lemniskate benannte[1]); auch gehören hierher die durch Joh. Bernoulli[2]) betrachteten Kurven

$$x^y = a, \quad x^x = a^y, \quad x^x + x^c = x^y + y.$$

Dann die Wahrscheinlichkeitskurve[3])

$$y = e^{-mx^2}, \quad (m > 0)$$

deren Spezialfall

$$y = e^{-x^2} \quad \text{sowie die verwandte} \quad y = e^{-x^4},$$

bei der Bestimmung der relativen Häufigkeit eines Fehlers die

1) *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. Bd., 5. Aufl. (Leipzig, 1904) S. 117.

2) *Principia calculi exponentialium seu percurrentium* (Acta Erud. 1697 oder *Opera* I. S. 186). Über die erstere sehe man G. Loria, *Sulla topologia delle superficie trascendenti* (Giorn. di matem. III. Reihe, I 1910).

3) Vgl. C. Burali-Forti, *Sulle curva della probabilità* (Atti. Acc. Torino XLI, 1906).

wichtige Rolle der „Fehlerkurven"[1]) spielen; letztere ist auf Taf. IV in Fig. 38 wiedergegeben.

Ferner gehören hierher die Kurven

$$y = x^x, \qquad y = \sqrt[x]{x},$$

deren erste Maria Gaetana Agnesi vermittels der logarithmischen Kurve zu konstruieren lehrte[2]), während die andere wiederum ein Beispiel einer punktierten Kurve liefert[3]); dahin gehört ferner die von Gregor Fontana[4]) zu analytischen Zwecken definierte glockenförmige Kurve mit der Gleichung $y = (-\log x)^{\frac{1}{2}}$, sowie die durch

$$y^x = x^y$$

dargestellte Kurve, mit der sich zu beschäftigen selbst Euler[5]) nicht unter seiner Würde hielt; sondert man die Gerade $x = y$ ab, so besteht sie aus einem hyperbelartigen Zweige, dessen Asymptoten die Geraden $x = 1$ und $y = 1$ sind. Ferner wurden die Kurven

$$xy = e^x, \qquad y = e^{e^x}, \qquad x^y = e$$

von G. Bidone[6]) erforscht, und die mit der Gleichung

$$y = \log \frac{1+x}{1-x}$$

von Haas[7]). Schließlich erwähnen wir noch die Additions- und Subtraktions-logarithmischen Kurven (logarithmique d'addition et de subtraction der Franzosen), die durch die Gleichungen

$$x = \log t, \qquad y = l \log \left(1 \pm \frac{1}{t}\right)$$

definiert werden und sich in Fragen der angewandten Mathematik als

---

1) K. Schwering, *Lehrbuch der kleinsten Quadrate* (Freiburg, 1909) S. 70 ff. Fig. 2 und 3.

2) *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù* II. (Milano, 1748) S. 839.

3) Hessel, *Über das merkwürdige Beispiel einer zum Teil punktiert gebildeten Kurve, das der Gleichung entspricht* $y = \sqrt[x]{x}$ (Arch. Math. Phys. XIV, 1850); H. Scheffler, *Über die durch die Gleichung* $y = \sqrt[x]{x}$ *dargestellten Kurven* (Das. XVI, 1851). Vgl. auch A. Baruch; das. III. Reihe, X, 1906, S. 102.

4) *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale e il nulla immaginario* (Mem. Soc. Ital. Scienze VIII, 1799).

5) S. Kap. 21 des 2. Teiles der *Introductio in Analysin infinitorum* (Lausannae, 1748); daselbst ist die Kurve vermittelst der folgenden, eleganten parametrischen Darstellung untersucht worden:

$$x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}.$$

6) *Recherches sur la nature de la transcendente* $\int \frac{dz}{\log z}$ (Mém. Acad. de Turin. 1805—08).

7) Kelyer, *Lehrbuch der Differentialrechnung*, III. T. (Stuttgart, 1894) S. 116.

nützlich erweisen[1]), und die Kurve der logarithmischen Sinus, dargestellt durch die Gleichung

$$y = \log \sqrt{1 - x^2},$$

von der auch die Evolute bestimmt worden ist[2]). Weiter auf diese Art von Kurven einzugehen verbietet uns die Überfülle des Stoffes.

Desgleichen erwähnen wir nur die hypergeometrische Kurve, die durch $y = x!$ definiert ist, der Euler eine seiner kleineren Abhandlungen widmete[3]), und die nicht zu verwechseln ist mit der Kurve gleichen Namens, durch welche Multedo[4]) geometrisch die Theorie der faktoriellen Funktionen von Kramp und Vandermonde[5]) illustrierte; da die hypergeometrische Kurve durch die Gleichung $y = \Gamma(x + 1)$ definiert werden kann, so liefert sie eine geometrische Darstellung der Eulerschen Integrale zweiter Gattung[6]). In dieser Hinsicht hat sie Ähnlichkeit mit einer Kurve, von der häufig in dem gelehrten Briefwechsel Huygens[7]) die Rede ist, woselbst sie als die Wallissche Kurve[8]) bezeichnet wird. Es ist eine Kurve, von der man dazumal nur einzelne Punkte gezeichnet, und deren Gleichung man vergeblich gesucht hatte. Diese läßt sich aber in folgender Weise auffinden:

Die Wallissche Kurve ist durch den Umstand definiert, daß die Punkte derselben mit Abszissen 1, 2, 3, 4, ... als bezügliche Ordinaten die Größen $1, \frac{2 \cdot 3}{1}, \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2}, \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 7}{3}, \ldots\ldots$ haben. Wenn man das erste Wertepaar ausscheidet, so kann man auch sagen, daß die Wallissche Kurve durch Punkte mit folgenden Koordinaten geht

$$x = \xi + 1, \qquad y = \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \ldots\ldots \frac{2(2\xi + 1)}{\xi} = \frac{2^\xi \cdot 3 \cdot 5 \ldots. (2\xi + 1)}{\xi!},$$

wo ξ ganzzahlig und $\geqq 1$ ist. Beachtet man nun, daß

$$(2\xi + 1)! = 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots. (2\xi + 1) \cdot 2^\xi \cdot \xi!,$$

---

1) R. Mehmke, *Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten numerisch aufzulösen* (Zivilingenieur, 2. Reihe, XXXV, 1889) und M. d'Ocagne, *Traité de nomographie* (Paris, 1899) S. 384.

2) L. G. Barbour, *Evolute to the curve of logarithmic sines* (The Analyst IV, 1872).

3) *De curva hypergeometrica hac aequatione expressa* $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. x$ (Novi Comment. Petropolit. XIII, 1769).

4) *Memoria sulle curve hypergeometriche* (Mem. Accad. Genova, III, 1814).

5) S. z. B. den Artikel „Factorielle" im *Dictionnaire des Sciences math.* (Bruxelles, 1838) von Montferrier.

6) Serret-Harnack-Scheffers, *Differential- und Integralrechnung* II (Leipzig, 1907) S. 208.

7) S. die unter der Rubrik „courbe de Wallis" angeführten Stellen im I. B. der *Oeuvres complètes de C. Huygens,* insbesondere S. 210.

8) Berechtigt ist dieser Name, weil die Kurve in der Prop. CXCII der *Arithmetica infinitorum* (1655) betrachtet wird.

so kann man schreiben

$$y = \frac{(2\xi + 1)!}{(\xi!)^2}.$$

Führt man nun die Gammafunktion ein, so erhält man

$$y = \frac{\Gamma(2\xi + 2)}{\Gamma^2(\xi + 1)}, \quad \text{oder } y = \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung; sie gilt für alle positiven Werte von x; da im allgemeinen

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)},$$

so kann man (12) auch schreiben

$$y = \frac{1}{B(x, x)},$$

folglich kann die Wallissche Kurve zur geometrischen Darstellung der Eulerschen Integrale erster Gattung benutzt werden.

Verwandt mit diesen Kurven ist die Binomialkurve von Quételet[1]), die in der Statistik eine Rolle spielt und die wahrscheinliche Häufigkeit der Abweichungen von einer gewissen Norm graphisch darstellt. Sie kann durch $y = \binom{n}{x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n-x+1)}$ dargestellt werden.

Achtzehntes Kapitel.

Die außerordentlichen Kurven.

226. Der Gedanke, eine Funktion graphisch darzustellen, hat zu vielen neuen Kurven geführt, von denen die hervorragendsten in den Kapiteln II, XVI und XVII dieses Abschnittes definiert wurden; Kurven, die, so verschieden sie auch in ihrem Bau waren, dennoch den allgemeinen Ideen, die man von einer Kurve zu haben pflegt, entsprechen. Mit den Fortschritten der mathematischen Analysis wurde der Begriff der Funktion stufenweise erweitert und modifiziert; man entdeckte so Funktionen, die ganz unerwartete Eigentümlichkeiten zeigten, und indem man zu ihrer geometrischen Darstellung überging, gelangte man zur Betrachtung von Kurven, die Eigenheiten zeigen, die in offenem Widerspruch mit den bisher erhaltenen allgemeinen Eigenschaften der Kurven stehen. Die Hauptbedeutung, die diese sogenannten außerordentlichen Kurven (crinkly curves der englischen und amerikanischen Mathematiker[2])) für den Geometer haben, liegt darin, daß sie die Notwendigkeit klargelegt haben, bei

1) *Sur la théorie des probabilités* (Bruxelles, 1845).
2) E. H. Moore, *On certain crinkly curves* (Trans. Amer. math. Soc. 1. 1900).

dem Wortlaut einiger Theorien gewisse Einschränkungen zu machen. Die bemerkenswertesten unter diesen Kurven verdienen daher in einem geometrischen Werke wie dem vorliegenden wenigstens einen Hinweis[1]).

I. Die älteste und berühmteste ist die durch die Gleichung

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos \pi (a^n x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dargestellte Kurve, wo a eine ganze, gerade Zahl > 1, und b eine reelle positive Größe < 1 ist. Es läßt sich zeigen, daß die linke Seite eine immer kontinuierliche Funktion von x ist, daß jedoch, wenn das Produkt ab eine gewisse Grenze überschreitet, sie in keinem Punkte eine bestimmte Abgeleitete hat. Es ist dies eine analytische Tatsache von außerordentlicher Wichtigkeit, durch deren Mitteilung Weierstraß[2]) ein altes Vorurteil, daß jede kontinuierliche Funktion eine Abgeleitete besitze, beseitigte. Die durch Gleichung (1) dargestellte Weierstraßsche Kurve läßt daher, obwohl sie kontinuierlich verläuft, dennoch in allen Punkten keine bestimmte Tangente zu. Chr. Wiener[3]) hat versucht aufzuklären, wie das möglich sei; aus seinen Untersuchungen geht hervor, daß diese Kurve innerhalb jedes endlichen Intervalles unzählig viele Oszillationen ausführt[4]).

II. Dieses Beispiel einer kontinuierlichen Kurve, die ohne Tangenten ist, befriedigt den Geist vom Standpunkte des Geometers keineswegs, da es nicht möglich ist, sich von der Gestalt der Weierstraßschen Kurve einen Begriff zu machen und zwar nicht einmal einen angenäherten. Frei von diesem Übelstande ist eine in neuerer

---

1) Die soeben über diese absonderlichen Kurven im allgemeinen gemachten Bemerkungen geben uns Gelegenheit, zu bemerken, daß Plateau ein Verfahren angegeben hat, um die Gleichungen von unzählig vielen Kurven anzugeben, die einen point saillant oder einen der von ihm so genannten point de dédoublement haben. M. s.: Plateau, *Quelques exemples curieux de discontinuité en analyse* (Bull. Acad. Belgique, 2e Sér., XLIII, 1877); Mansion, *Sur les points de dédoublement de* M. J. Plateau (Bull. sc. math. astr. 2e Sér. II, 1878) und *Sur les nouveaux points singuliers des courbes planes* (Mathésis III, 1883); Vogel *Note über die Diskontinuitäten bei Kurven* (Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 1881).

2) P. du Bois-Reymond, *Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente* (Crelles Journ. LXXIX, 1874, S. 29).

3) *Geometrische und analytische Untersuchungen der Weierstraßschen Funktion* (Das. XC, 1881).

4) In gewisser Hinsicht analog zur Weierstraßschen Kurve ist diejenige, deren Konstruktion A. Köpke in den Aufsätzen *Über Differentiierbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Funktionen* (Math. Ann. XXIX, 1897) und *Über eine durchaus differentiierbare stetige Funktion mit Oszillationen in jedem Intervalle* (Das. XXXIV, 1897) bekannt gab.

Zeit von H. v. Koch[1]) erdachte Kurve, deren Erzeugung und hauptsächliche Eigenschaften wir hier klarlegen wollen. Es sei (Fig. 35. Taf. IV) AB eine beliebige Strecke in der Ebene π; wir teilen sie durch die Punkte C und D in drei gleiche Teile. Über der mittleren Strecke CD errichten wir das gleichseitige Dreieck CED. Um alle Zweideutigkeiten zu vermeiden, wollen wir annehmen, daß 1. auf der Geraden der positive Sinn von A nach B sei; 2. als positives Gebiet der Ebene π soll immer das gelten, welches einem die Gerade in positiver Richtung durchlaufenden Beobachter zur Linken liegt; 3. daß das Dreieck CDE sich in dem positiven Gebiete von π befinde. Bezeichnen wir nun die Operation, die von der Strecke AB zu dem gebrochenen Linienzuge $ACEDB$ führt, mit Ω und stellen uns vor, daß wir die Operation Ω dann für jeden der vier Teile AC, CE, ED, DB wiederum ausführen, so bekommen wir einen Linienzug, der aus 4^2 Seiten besteht und $4^2 + 1$ Ecken hat. Verfahren wir auf dieselbe Weise mit diesen Seiten, so bekommen wir einen dritten Linienzug, der aus 4^3 Stücken besteht mit $4^3 + 1$ Eckpunkten, wie ihn gerade unsere Figur zeigt. Fahren wir in dieser Weise fort, unendlich oft die Operation Ω anwendend, so gelangen wir zu einer kontinuierlichen Reihe von Punkten, die eben die v. Kochsche Kurve bilden.

Diese Kurve hat keine Tangente und erfreut sich überdies noch der besonderen Eigentümlichkeit, daß einer ihrer Bogen zwischen zwei beliebigen Punkten von unendlicher Länge ist; dagegen ist die Fläche zwischen einem Bogen und der zugehörigen Sehne von endlicher Größe. Außerdem ist die Kurve in allen ihren Teilen sich selber ähnlich. — Man kennt verschiedene analytische Darstellungen derselben, nämlich ihre kartesische Gleichung sowie auch verschiedene parametrische Darstellungen, alle mit Hilfe analytischer Funktionen.

III. Dieselbe Eigenschaft, keine bestimmte Tangente zu besitzen, hat die sogenannte H-Kurve von Boltzmann[2]), die, weil sie empirisch definiert wird und bis jetzt noch keine analytische Darstellung gefunden hat, eigentlich nicht dem Gebiete angehört, das wir hier durchforschen.

---

1) *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géometrique élémentaire* (Archiv for Math., Astron. och Fys. I, 1904, S. 681—702) und *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certains questions de la théorie des courbes planes* (Acta math. XXX, 1906, S. 145—174). Man sehe außerdem: E. Cesàro, *Remarques sur les courbes de von Koch* (Mem. Acc. Napoli, 2e Ser., XII, 1905) und *Fonctions continues sans derivé* (Arch. Math. Phys. 3e Ser., X, 1906); A. Broglio, *Studio analitico della curva del sig. Helge von Koch* (Giorn. di Matem. Bd. XLIV, 1906); A. Sellerio, *Le curve limiti di poligonali che si definiscono con legge assegnata* (Rend. Circ. mat. Palermo XXVIII, 1909)

2) L. Boltzmann, *Über die sogenannte H-Kurve* (Math. Ann. L, 1898).

IV. G. Peano[1]) hat gelehrt, zwei Funktionen φ und ψ zu konstruieren, die eindeutig und stetig sind, für eine reelle Variable t derart, daß, wenn t innerhalb des Intervalles $(0 \ldots . 1)$ variiert, φ und ψ alle Wertepaare innerhalb desselben Intervalles annehmen; daher stellen die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

eine Kurve dar, die durch die sämtlichen Punkte eines Quadrates hindurchgeht, und somit die ganze Fläche desselben ausfüllt.

V. Schließlich hat Grave[2]) den Namen polygonale Linien denjenigen gegeben, die durch die Gleichung

$$y = \int_0^x f(x)\,dx$$

dargestellt werden, wenn $f(x)$ eine gewisse arithmetische Funktion ist, die für unzählig viele Werte von x keine Abgeleitete besitzt, während sie für gewisse andere Werte gleich Null ist. Solche Kurven bestehen dann aus unendlich vielen geradlinigen Teilen; sie haben in jedem Punkte eine bestimmte, aber von Punkt zu Punkt wechselnde Tangente; für sie hört der gewöhnliche Begriff der Krümmung auf, da für unendlich viele Werte von x nicht die Gleichung besteht

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x).$$

Neunzehntes Kapitel.

Die W-Kurven von Klein und Lie.

227. Kehren wir auf ein rein geometrisches Gebiet zurück, indem wir dieses Kapitel sowie das folgende gewissen Kurven widmen, die ihre Herkunft der Theorie der Korrespondenzen und Abbildungen verdanken.

Wir betrachten eine projektive Transformation $\mathfrak{T}$ mit drei getrennten Ordnungspunkten A_0, A_1, A_2.[3]) Sie kann als durch folgende Gleichungen definiert aufgefaßt werden

$$\varrho x'_0 = a_0 x_0, \quad \varrho x'_1 = a_1 x_1, \quad \varrho x'_2 = a_2 x_2, \quad \ldots \quad (1)$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist. Setzt man

$$\frac{x_1}{x_0} = x, \quad \frac{x_2}{x_0} = y; \quad \frac{x'_1}{x'_0} = x', \quad \frac{x'_2}{x'_0} = y'; \quad \frac{a_1}{a_0} = a, \quad \frac{a_2}{a_0} = b,$$

1) *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane* (Das. XXXVI, 1890). Vgl. Hilbert, *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (Das. XXVIII, 1891) und E. Cesàro, *Sur la représentation analytique des regions et des courbes qui les remplissent* (Bull. Sc. math. astr, 2e Sér., XXI, 1897).

2) *Sur les lignes composées de parties rectilignes* (C. R. CXXVII, 1898).

3) Die Fälle, in denen die Fundamentalpunkte nicht getrennt sind, würden sich in ähnlicher Weise behandeln lassen; sie führen jedoch nicht zu neuen Kurven, wie im allgemeinen Falle.

so können jene drei Gleichungen durch die beiden folgenden ersetzt werden

$$x' = ax, \quad y' = by. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es sei nun der Punkt $P'(x', y')$ der transformierte von $P(x, y)$; wenden wir auf ihn von neuem die Transformation $\mathfrak{T}$ an, so erhalten wir den Punkt $P''(x'', y'')$, dessen Koordinaten sind

$$x'' = a^2 x, \quad y'' = b^2 y.$$

Verfahren wir ebenso wieder mit dem Punkte P'' und fahren in derselben Weise fort, so gelangen wir nach n Operationen zu einem Punkte $P^{(n)}$, dessen Koordinaten sind

$$x^{(n)} = a^n x, \quad y^{(n)} = b^n y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ist nun die durch $\mathfrak{T}$ bewirkte Transformation eine unendlich kleine, so werden die Punkte $P, P', P'', \ldots\ldots, P^{(n)}, \ldots\ldots$ in unendlich kleinen Abständen aufeinander folgen, d h. sie werden eine Linie bilden. Sie ist die Trajektorie der eingliedrigen Transformationsgruppe, die durch die unendlich kleine Transformation $\mathfrak{T}$ erzeugt wird; daher wird sie durch alle Transformationen jener Gruppe in sich selbst transformiert werden[1]). Dem Beispiele von F. Klein und S. Lie[2]) folgend, welche diese Linie von Grund aus zuerst untersucht haben, wollen wir sie die **W**-Kurve (nach dem Anfangsbuchstaben des Wortes Wurf) nennen und $A_0 A_1 A_2$ das Fundamentaldreieck. Um die Gleichung derselben zu finden, beachten wir, daß bei der vorliegenden Annahme die Konstanten a und b sich von der Einheit nur um eine unendlich kleine Größe unterscheiden dürfen; daher werden $\log a$ und $\log b$ unendlich klein von derselben Ordnung sein. Da nun

$$a^n = e^{n \log a} = 1 + n \log a + \cdots\cdots,$$
$$b^n = e^{n \log b} = 1 + n \log b + \cdots\cdots,$$

so können wir die Gleichung (3) auch schreiben

$$x^{(n)} - x = (n \log a + \cdots\cdot)x, \quad y^{(n)} - y = (n \log b + \cdots\cdot)y;$$

wegen der gemachten Voraussetzungen darf man nun setzen

$$x^{(n)} - x = dx, \quad y^{(n)} - y = dy; \quad n \log a = \alpha \cdot d\lambda, \quad n \log b = \beta \cdot d\lambda,$$

wo α und β endliche Größen sind. Vernachlässigen wir nun die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung, so haben wir demnach

$$dx = x \cdot \alpha \cdot d\lambda, \quad dy = y \cdot \beta \cdot d\lambda,$$

1) Wir benutzen hier die Begriffe und Benennungen der Theorie der Gruppen von Lie, da diese heutzutage allgemein üblich sind.

2) S. die Abh. *Über diejenigen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von unendlich vielen vertauschbaren Transformationen in sich übergehen* (Math. Ann. IV, 1871). Die W-Kurven finden sich schon bei Jacobi (Crelles Journ. XXIV, 1842, S. 1 ff; Werke IV, S. 147 ff.), ferner in den Schriften von G. Battaglini, *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di seconda specie* (Atti Accad. Napoli, II, 1865) von A. Clebsch und P. Gordan, *Über biternäre Formen mit kontragredienten Variabeln* (Math. Ann. I, 1868).

folglich ist
$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} \quad \text{. . . . . (4)}$$
die Differentialgleichung der W-Kurve. Durch Integration derselben bekommt man
$$\frac{\log x - \log \xi}{\alpha} = \frac{\log y - \log \eta}{\beta},$$
wo ξ und η die Koordinaten des Ausgangspunktes der Kurve sind, oder auch
$$\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha} = \left(\frac{y}{\eta}\right)^{\beta}. \quad \text{. . . . . (5)}$$
Schreiben wir nun für x und y wieder ihre Werte und setzen der größeren Symmetrie wegen
$$-\alpha = c_1, \quad \beta = c_2, \quad \alpha - \beta = c_0,$$
weshalb dann
$$c_0 + c_1 + c_2 = 0$$
ist, so wird die Gleichung (4) werden zu
$$x_0^{c_0} \cdot x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} = Const. \quad \text{. . . . . (6)}$$
und auch diese Gleichung kann in gleicher Weise wie (4) als allgemeine Gleichung der W-Kurve gelten.

Wenn die Seite $A_2 A_3$ des Fundamentaldreiecks im Unendlichen liegt (auf welchen Fall man die Kurve immer durch Projektion zurückführen kann), so sind x und y die gewöhnlichen kartesischen Koordinaten, und infolge von Gleichung (4) werden die W-Kurven zu Parabeln oder Hyperbeln, gewöhnlichen oder interszendenten, je nachdem die Exponenten α, β rational oder irrational sind, und da man also diesen speziellen Fall durch Projektion immer herbeiführen kann, so folgt: **Jede W-Kurve ist die Projektion einer im allgemeinen interszendenten Parabel oder Hyperbel.** Wegen Gl. (4) lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve (5) im Punkte (x, y)
$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{\beta y}{\alpha x}. \quad \text{. . . . . (7)}$$
Hieraus können wir verschiedene Folgerungen ziehen. Sehen wir X, Y als gegeben an, so folgt: **Die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte der Ebene an eine interszendente Parabel oder Hyperbel ziehen kann, liegen auf einem durch diesen Punkt gehenden Kegelschnitte.** Da diese Eigenschaft durch Projektion erhalten bleibt, so können wir im allgemeinen schließen: **Jede W-Kurve gehört einem Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 1$ an**[1]; leicht läßt sich hieraus folgern, daß jene die allgemeinsten von dieser Beschaffenheit sind.[2]

---

1) Fouret, *Sur quelques propriétés des systèmes de courbes* ($\mu = 1$, $\nu = 1$) und *Interprétation géométrique de l'équation* $L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$, *dans laquelle L, M, N désignent des fontions linéaires de x, y* (C. R. LXXVIII, 1874).

2) Wir sagen „leicht", weil ein System mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 1$ durch eine Differentialgleichung vom Typus (vgl. Nr. 171)
$$L(x\,dy - y\,dx) - (M\,dy + N\,dx) = 0$$

Bezeichnen wir einen Kurvenpunkt (x, y) mit P, die Schnitte der zugehörigen Tangente mit den Koordinatachsen mit S, T und den unendlich fernen Punkt derselben mit U und bezeichnen durch Akzente die Projektionen dieser Punkte auf Ox von dem unendlich fernen Punkte von Oy aus, so haben wir

$$(PSTU) = (P'SOU') = \left(x, \frac{\alpha-\beta}{\alpha}x, 0, \infty\right) = \frac{\alpha-\beta}{\beta}.$$

Folglich ist das Doppelverhältnis $(PSTU)$ konstant, und verallgemeinern wir diese Eigenschaft durch Projektion für alle W-Kurven, so können wir sagen: **Für jede W-Kurve ist das Doppelverhältnis eines Kurvenpunktes und der drei Schnittpunkte der zugehörigen Tangente mit den Seiten des Fundamentaldreieckes konstant.** Dieser Satz begründet den Namen „W-Kurven" (S. 179), sowie den „anharmonische Kurven", der von Halphen[1]) den hier betrachteten Kurven beigelegt wurde; es gibt auch einen hierzu dualen Satz, da man leicht erkennt, daß die Tangentialgleichung der W-Kurve dieselbe Form hat, wie die Punktgleichung.[2])

228. Unter den W-Kurven gibt es eine spezielle, uns schon bekannte: Die logarithmische Spirale (s. S. 67, Gleichung (7)); in diesem Falle liegen zwei von den Ecken des Fundamentaldreieckes in den Kreispunkten, und die betrachteten projektiven Transformationen sind Rotationen um die dritte Ecke. Diese fundamentale Bemerkung dient zur Erklärung, wie diese Kurve sich durch eine so große Zahl von Transformationen immer wieder selbst erzeugt[3]), und kann (und ist

---

definiert werden kann, wo L, M, N lineare Funktionen der Koordinaten sind; diese ist nach einer heute als klassisch geltenden, von Jacobi erfundenen Methode integrierbar (Crelles Journ. XXIV; s. z. B. Boole, *Differential Equations* 4. Aufl. 1877, S. 85). — Die Untersuchung derjenigen Systeme, deren Charakteristiken $\mu = 1$, $\nu = 2$ sind, ist ähnlicherweise gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung

$$Ap^2 + Bp\alpha + C\alpha^2 + Dp + E\alpha + F = 0, \qquad \text{wo } p = \frac{dy}{dx}, \text{ und } \alpha = y - px,$$

ferner $A, \ldots, F$ lineare Funktionen der Koordinaten x, y sind. Sie wurde von A. Legoux ausgeführt (*Étude analytique et géométrique d'une famille des courbes représentée par une équation différentielle du premier ordre.* Thèse, Paris 1878) und führte zur Entdeckung der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{2} = C\frac{(x+a)^{n+1}}{(y-a)^{n-1}} + \frac{(y+na)^2}{2(n^2-1)a^2}$$

dargestellten Kurven; diese sind offenbar algebraisch oder transzendent, je nachdem n eine rationale Zahl ist oder nicht.

1) M. s. z. B. *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* (Paris, 1883) S. 53.

2) Andere Sätze dieser Art, die mehrere W-Kurven betreffen, findet man bei K. Ogura, *Note on W-Curves* (Tôkyô mathematico-physical Society, II. Ser. V. 1909).

3) Zum erstenmal dargelegt und ausführlich entwickelt in der oben angeführten Abhandlung von Klein und Lie.

auch schon) benutzt werden, neue Eigenschaften derselben zu entdecken.

Unter den **W**-Kurven befindet sich ferner eine neue Kurve, die der Untersuchung wert erachtet und mit einem besonderen Namen belegt wurde: in baryzentrischen Koordinaten x_0, x_1, x_2 wird sie durch die Gleichung

$$\frac{x_0}{a_0^{\lambda}} = \frac{x_1}{a_1^{\lambda}} = \frac{x_2}{a_2^{\lambda}} \quad \text{. . . . . (8)}$$

dargestellt, wo λ ein Parameter ist, und a_0, a_1, a_2 die Seiten des Fundamentaldreiecks sind; nach einem Vorschlage von G. de Longchamps[1]) heißt sie die Dreieckspotentialkurve (Potentielle triangulaire) oder Potenzkurve.[2]) Zum Beweise, daß sie eine **W**-Kurve ist, nehmen wir an, daß $a_0 > a_1 > a_2$, und setzen

$$\log \frac{a_1}{a_2} = c_0, \quad \log \frac{a_2}{a_0} = c_1, \quad \log \frac{a_0}{a_1} = c_2,$$

weshalb zwischen den Konstanten c noch die Relation $c_0 + c_1 + c_2 = 0$ besteht. Aus (8) folgt nun

$$\log \left(\frac{x_1}{x_0}\right) = -\lambda c_2, \quad \log \left(\frac{x_2}{x_0}\right) = \lambda c_1$$

und durch Elimination von λ

$$c_1 \log \left(\frac{x_1}{x_0}\right) + c_2 \log \left(\frac{x_2}{x_0}\right) = 0$$

oder

$$x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} = x_0^{c_1 + c_2}, \quad \text{. . . . . (9)}$$

oder, da $c_0 + c_1 + c_2 = 0$,

$$x_0^{c_0} \cdot x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} = 1. \quad \text{. . . . . (9')}$$

Da nun diese vom Typus (6) ist, so ist der ausgesprochene Satz bewiesen. — Schreibt man die Gleichung (9) in folgender Weise:

$$x_1^{\frac{c_1}{c_2}} \cdot x_2 = x_0^{1 + \frac{c_1}{c_2}},$$

so sieht man, daß die Dreieckspotentialkurve eine algebraische Kurve wird, wenn eines der Verhältnisse zwischen den Konstanten c ein rationales ist. — Im allgemeinen zeigen die Gleichungen (8), daß die Dreieckspotentialkurve durch viele bemerkenswerte Punkte des Fundamentaldreiecks hindurchgeht: für $\lambda = 0$ bekommen wir den Schwerpunkt desselben, für $\lambda = 1$ den Mittelpunkt des Inkreises, für $\lambda = 2$ den Lemoineschen Punkt, usw. Man beachte ferner, daß aus $a_0 > a_1 > a_2$ sich ergibt

$$\lim_{\lambda = \infty} \frac{x_2}{x_0} = \lim_{\lambda = \infty} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda = \infty} \frac{x_1}{x_0} = \lim_{\lambda = \infty} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\lambda} = 0,$$

$$\lim_{\lambda = -\infty} \frac{x_0}{x_2} = \lim_{\lambda = +\infty} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda = -\infty} \frac{x_1}{x_2} = \lim_{\lambda = \infty} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\lambda} = 0,$$

1) S. die Abh. *Sur la potentielle triangulaire* (Mathésis VI, 1886).

2) Cesàro-Kowalewski, *Vorlesungen über Natürliche Geometrie* S. 132.

und dies zeigt: **Die Dreieckspotenzialkurve geht durch die beiden Ecken des Fundamentaldreiecks, die der größten und der kleinsten Seite gegenüberliegen.** Sie berührt in diesen Punkten die Seite von der mittleren Länge. — Diese Eigenschaften mögen genügen, die Wichtigkeit der betrachteten Kurve für die moderne Geometrie des Dreiecks klarzulegen.

Eine andere bemerkenswerte Kategorie der W-Kurven wird gebildet von denjenigen Linien, die in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung
$$x^\lambda \cdot y^\mu = a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$
dargestellt werden unter der Bedingung, daß
$$\lambda + \mu = 1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$
Sie erhielten den Namen polytropische Kurven, welcher von Zeuner in seiner klassischen *Technischen Thermodynamik* 1887—89 zunächst den Kurven $x^n y = C$ gegeben war. Einige interessante Eigenschaften derselben sollen hier mitgeteilt werden.[1]) Die beiden Koordinatachsen sind die Asymptoten der Kurve. Die allgemeine Gleichung der Tangente lautet
$$Y - y + \frac{\lambda y}{\mu x}(X - x) = 0,$$
daher wird der Winkel τ der Tangente mit der x-Achse gegeben durch
$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{\lambda y}{\mu x}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$
Sind nun (Taf. V, Figur 45) die Schnitte der Tangente mit den Koordinatachsen A_1 und A_2, so findet man alsbald
$$OA_1 = \frac{x}{\lambda}, \quad OA_2 = \frac{y}{\mu} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$
und da man wegen (11) setzen kann:
$$\lambda = \cos^2 a, \quad \mu = \sin^2 a, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$
so hat man weiterhin
$$OA_1 = \frac{x}{\cos^2 \alpha}, \quad OA_2 = \frac{y}{\sin^2 \alpha}, \quad \ldots \ldots \quad (15)$$
und wenn man die Strecke $A_1 A_2$ mit t bezeichnet,
$$t^2 = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = \frac{x^2}{\cos^4 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^4 \alpha}, \quad \ldots \ldots \quad (16)$$
Ist nun P der Berührungspunkt der Tangente $A_1 A_2$, so sieht man, daß
$$PA_1 = \frac{y}{\sin \tau}, \quad PA_2 = -\frac{x}{\cos \tau}, \quad \text{daher} \quad \frac{PA_1}{PA_2} = \frac{\lambda}{\mu},$$
woraus folgt:
$$PA_1 = \mu t, \quad PA_2 = \lambda t. \quad \ldots \ldots \quad (17)$$
Ziehen wir nun den dem Dreiecke OA_1A_2 umbeschriebenen Kreis und zeichnen in ihm die durch P zu A_1A_2 senkrechte Sehne B_1B_2, so haben wir:
$$\overline{PB_1}^2 = \overline{PB_2}^2 = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2},$$

---

1) F. Kosch, *Normale und Krümmungsmittelpunkt der polytropischen Kurven* (Zeitschr. Math. Phys. XLV, 1900).

daher wegen (17) $PB_1 = PB_2 = t\sqrt{\lambda\mu}$. . . . . (18)
Ziehen wir nun die Geraden OB_1 und OB_2, so ist

$$\operatorname{tg} B_1 A_2 P = \operatorname{tg} B_2 A_2 P = \frac{PB_1}{PA_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun ist $\sphericalangle B_1 A_2 P = \sphericalangle B_1 A_2 A_1 = \sphericalangle B_1 O A_1$

und $\sphericalangle B_2 A_2 P = \sphericalangle B_2 A_2 A_1 = \sphericalangle B_2 O A_1$;

folglich $\sphericalangle B_1 O A_1 = A_1 O B_2 = \alpha$,

und daher sind die Geraden $OB_1 = l_1$, $OB_2 = l_2$ unabhängig von dem Punkte P der Kurve; man nennt sie die Achsen der polytropischen Kurve.

Mit Benutzung dieser Bezeichnung kann man die obigen Ausführungen in folgende Sätze zusammenfassen: 1) **Das zwischen den Achsen gelegene Stück der Normalen einer polytropischen Kurve wird von der Kurve selbst halbiert.** 2) **Das von einer Tangente und den beiden Asymptoten, sowie das von der zugehörigen Normale und den beiden Achsen gebildete Dreieck sind beide demselben Kreise einbeschrieben.**

Wir wollen denjenigen Punkt S der Kurve, in welchem sie von der Achse l_2 geschnitten wird, den Scheitel der Kurve nennen. Da die Gleichung der Achse $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$ ist, so hat man für den Punkt S wegen der Gl. (12) $\operatorname{tg} \tau = -\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; daher schneidet die Kurve diese Achse senkrecht.

Wir fällen jetzt vom Punkte P die Lote auf die Asymptoten, welche die Achsen bzw. in D_1 und D_2 treffen mögen. Man erkennt alsbald, daß die in diesen Punkten errichteten Senkrechten die Asymptoten in A_1 bzw. A_2 schneiden; alsdann hat man

$$\left.\begin{aligned} OB_1 &= \frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = OD_1 - OD_2, \\ OB_2 &= \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\cos\alpha} = OD_1 + OD_2. \end{aligned}\right\} \quad . . . \quad (19)$$

Für den Krümmungsradius R findet man leicht den Wert

$$R = \frac{\lambda^2 \mu^2 t^3}{xy};$$

wegen (13) und (17) kann man diesen nun schreiben

$$R = \frac{\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} \cdot t}{OA_1 \cdot OA_2};$$

wenn man nun OH senkrecht zu $A_1 A_2$ zieht, so erkennt man, daß

die Fläche des Dreiecks OA_1A_2 gegeben wird, sowohl durch $\frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2$ als auch durch $\frac{1}{2} \overline{PH} \cdot t$; infolgedessen ist

$$R = \frac{PA_1 \cdot PA_2}{PH}.$$

Dies zeigt: Der dem Dreiecke HA_1A_2 umschriebene Kreis geht durch den zum Kurvenpunkte P zugehörenden Krümmungsmittelpunkt; es ist daher nichts leichter als diesen Punkt zu konstruieren.[1])

Zwanzigstes Kapitel.

Die Linien von Mercator oder Sumner.

229. Auf einer Kugel vom Radius Eins sei ein gewöhnliches geographisches Koordinaten-System festgelegt; mit ϑ bezeichnen wir die Breite, mit ξ die Länge eines beliebigen Punktes P der Kugeloberfläche (Taf. V, Figur 46). Wir denken uns nun um die Kugel einen Zylinder beschrieben, der diese längs des Äquators berührt. Als Koordinaten eines beliebigen Punktes M desselben können dienen die Länge ξ und der Abstand η vom Äquator. Wir stellen jetzt zwischen der Kugel und dem Zylinder eine eindeutige Beziehung her, indem wir dem Punkte $P(\xi, \vartheta)$ den Punkt $M(\xi, \eta)$ entsprechen lassen, und zwar so, daß

$$\operatorname{tg} \vartheta = \mathfrak{Sin}\, \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder auch

$$\frac{1}{\cos \vartheta} = \mathfrak{Cos}\, \eta, \qquad \sin \vartheta = \mathfrak{Tg}\, \eta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Denken wir uns nun den Zylinder längs einer seiner Erzeugenden aufgeschnitten und in eine Ebene abgewickelt, so entsteht eine eindeutige Korrespondenz zwischen der Kugel und der Ebene: es ist die (zylindrische) Mercator-Projektion. Wir wollen jetzt untersuchen, was für eine Linie in der Ebene dem Schnitte der Kugel mit einer beliebigen Ebene

$$\alpha + \beta z = \gamma x + \delta y$$

entspricht. Da für die Punkte der Kugel

$$x = \cos \vartheta \cdot \cos \xi, \quad y = \cos \vartheta \cdot \sin \xi, \quad z = \sin \vartheta,$$

so kann jener Schnitt auch aufgefaßt werden als dargestellt durch die Gleichung

$$\alpha + \beta \sin \vartheta = \cos \vartheta \cdot (\gamma \cos \xi + \delta \sin \xi);$$

---

1) Ein anderes Verfahren findet man bei F. Dingeldey, *Konstruktion des Krümmungsradius bei Kurven mit der Gleichung $y = cx^n$ (polytropische Kurven)* (Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 1906).

folglich wird die entsprechende Kurve in der Ebene zufolge der Gleichungen (1) und (1') dargestellt durch

$$\alpha + \beta \,\mathfrak{Tg}\, \eta = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, \eta} (\gamma \cos \xi + \delta \sin \xi),$$

oder
$$\alpha \,\mathfrak{Cos}\, \eta + \beta \,\mathfrak{Sin}\, \eta = \gamma \cos \xi + \delta \sin \xi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die so erhaltenen Kurven wurden von G. Holzmüller[1]) Mercatorsche Kurven und von Greenhill[2]) Sumners Linien (zum Andenken an den amerikanischen Kapitän, der zuerst ihren Nutzen für die Schiffahrt dargetan hatte) genannt. Die Gleichung (2) kann auf verschiedene einfachere Formen reduziert werden, je nach den relativen Werten der in ihr auftretenden Konstanten α und β[3]).

1. Fall, $\alpha^2 > \beta^2$. Wir können $\alpha = r_0 \,\mathfrak{Cos}\, \eta_0$, $\beta = - r_0 \,\mathfrak{Sin}\, \eta_0$ setzen; daher ist $r_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Wir setzen außerdem noch

$$\gamma = \varrho_0 \cos \xi_0, \qquad \delta = \varrho_0 \sin \xi_0; \qquad \text{daher ist } \varrho_0 = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Die Gleichung (2) wird alsdann zu

$$r_0 \,\mathfrak{Cos}\, (\eta - \eta_0) = \varrho_0 \cos (\xi - \xi_0),$$

oder, wenn $\frac{\varrho_0}{r_0} = m$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{Cos}\, (\eta - \eta_0) = m \cos (\xi - \xi_0).$$

Diese Gleichung kann durch eine einfache Verschiebung der Achsen vereinfacht werden und wird dann

$$\mathfrak{Cos}\, \eta = m \cos \xi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bezüglich der Konstanten m möge eine Bemerkung nicht unterbleiben: damit die betrachtete Ebene die Kugel tatsächlich schneidet, muß sein

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}} < 1, \quad \text{oder } \gamma^2 + \delta^2 > \alpha^2 - \beta^2;$$

wenn nun $\alpha^2 \leqq \beta^2$, so ist diese Bedingung immer erfüllt; wenn aber $\alpha^2 > \beta^2$, so geht sie über in $\varrho_0{}^2 > r_0{}^2$, d. h. $|m| > 1$. **Daher stellt die Gleichung (3) nur dann eine reelle Mercatorsche Linie dar, wenn der absolute Wert der Konstanten m größer ist als Eins.**

2. Fall, $\alpha^2 < \beta^2$. Wir setzen $\alpha = - r_0 \,\mathfrak{Sin}\, \eta_0$, $\beta = r_0 \,\mathfrak{Cos}\, \eta_0$; daher ist $r_0 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$; außerdem $\gamma = - \varrho_0 \sin \xi_0$, $\delta = \varrho_0 \cos \xi_0$; dann wird (2)

$$r_0 \,\mathfrak{Sin}\, (\eta - \eta_0) = \varrho_0 \sin (\xi - \xi_0).$$

---

1) *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1882) S. 242.

2) *Sumner's Lines on Mercator's chart* (Mess. of math. XVI, 1887), *Sumner lines on Mercator and stereographic chart* (Das. XXV. 1890) und *The application of elliptic functions* (London, 1892) S. 89—92.

3) H. E. Timerding, *Über die Mercatorsche Projektion* (Zeitschr. Math. Phys. XLIII, 1898).

Durch eine Verschiebung der Achsen kann sie auf die Form gebracht werden
$$\mathfrak{Sin}\,\eta = n \sin \xi.\text{[1]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

3. Fall, $\alpha^2 = \beta^2$. Bezeichnen wir mit ε die positive oder negative Einheit, so dürfen wir $\beta = \varepsilon\,\alpha$ setzen. Setzen wir noch $\gamma = \varrho_0 \cos \xi_0$, $\delta = \varrho_0 \sin \xi_0$, so wird Gleichung (2)
$$\alpha\,(\mathfrak{Cos}\,\eta + \varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta) = \varrho_0 \cos (\xi - \xi_0)$$
und hat dann die Form
$$e^{\varepsilon\eta} = p \cos (\xi - \xi_0);$$
durch einfache Verschiebung der Achsen wird sie
$$\eta = \varepsilon \log \cos \xi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Es gibt somit drei verschiedene Typen der Sumnerschen Linien, und die Gleichungen (3), (4), (5) können als kanonische Gleichungen derselben gelten. Die Kurven vom ersten Typus sind periodisch und bestehen aus unendlich vielen kongruenten Teilen; einen derselben erhält man, wenn man ξ von $-\pi$ bis $+\pi$ variieren läßt; sie sind symmetrisch in bezug auf die ξ-Achse und auf die ∞^1 Geraden $\xi = 2k\pi$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$; sie schneiden die Achsen in unendlich vielen reellen Punkten, die zugehörigen Tangenten sind parallel zur anderen Achse; sie haben keine Wendepunkte und bestehen daher aus unendlich vielen kongruenten Ovalen. — Die Kurven vom zweiten Typus sind auch periodisch und besitzen unzählige Mittelpunkte (die Punkte $\xi = k\pi$, $\eta = 0$), die Wendepunkte sind. Für Werte von ξ zwischen $2k\pi$ und $(2k + 1)\pi$ bekommt man einen oberhalb der ξ-Achse gelegenen Zweig, während für Werte zwischen $(2k - 1)\pi$ und $2k\pi$ man einen solchen unterhalb der ξ-Achse erhält; die Punkte mit den Abszissen $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ sind Kulminationspunkte. — Auch die Kurven vom dritten Typus sind periodisch; sie besitzen keine Wendepunkte, haben aber unzählig viele Asymptoten $\left(\text{die Geraden } \xi = k\frac{\pi}{2}\right)$ sowie unendlich viele Symmetrieachsen, deren erste die Ordinatenachse ist.

Die Rektifikation der Sumnerschen Linien der beiden ersten Typen erfordert elliptische Integrale, während die vom dritten Typus elementar rektifizierbar sind. Man findet nämlich aus Gleichung (5) $ds = \frac{d\xi}{\cos \xi}$; beachtet man ferner, daß $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{\varepsilon}{\cos^2 \xi}$, so gelangt man

---

[1] Schreibt man die Gleichung (7) Nr. 223 in der Form $\mathfrak{Sin}\,y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, so sieht man, **daß die Lemniscatrix als eine spezielle Sumnersche Linie angesehen werden kann.** — Die durch die Gleichung $\sin \alpha \cdot \sin \xi + \sin \beta \cdot \mathfrak{Sin}\,\eta = 0$ dargestellte Kurve, der E. Beltrami (*Intorno ad una formola integrala,* Rend. Ist. Lomb. 2. Ser. XII, 1879) begegnete, gehört augenscheinlich auch zur Kategorie der Kurven (4).

zu folgendem Ausdruck für den Krümmungsradius: $R = -\frac{\varepsilon}{\cos \xi}$. Eliminiert man ξ aus diesem Ausdrucke und aus dem für ds, so findet man $ds = \frac{dR}{\sqrt{R^2-1}}$, und daher $R = \mathfrak{Cos}\,(s+c)$ als natürliche Gleichung der Kurve (vgl. Nr. **236**).

Da die hier untersuchten Kurven durch eine homogene Gleichung ersten Grades in $\sin \xi$, $\cos \xi$, $\mathfrak{Sin}\,\eta$, $\mathfrak{Cos}\,\eta$ dargestellt werden, so könnte man diese Mercatorsche oder Sumnersche Linien erster Ordnung nennen; in analoger Weise könnte man die höherer Ordnung betrachten; jedoch scheinen diese bis heute keine besondere Wichtigkeit zu haben.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Die Traktrix-Kurven.

230. Die transzendenten Kurven, mit denen wir uns nunmehr zu beschäftigen haben, wurden im Verlaufe mathematischer Untersuchungen von Naturerscheinungen erdacht, gehören daher zu der großen Klasse der physikalisch-mathematischen; zu dieser Klasse gehören aber auch algebraische bzw. nichtalgebraische Kurven, die wir schon kennen: so die semikubische Parabel als 'curva decensus aequabilis' betrachtet (Bd. I, S. 311), die Lissajousschen Kurven (Das. S. 482), die Zykloide, betrachtet als Tautochrone oder Brachistochrone (Nr. **200**), die Ribaucourschen Kurven als Lösende eines Bernoullischen Problemes für einen Spezialfall (Nr. **218** Schluß) usw. Bei der folgenden Betrachtung dieser Kurven werden wir uns nicht auf Einzelheiten einlassen, die physikalische Fragen betreffen, sondern uns auf die geometrischen Eigenschaften, deren sie sich erfreuen, beschränken.

Claudius Perrault, ein gelehrter Arzt, der 1613—1688 zu Paris lebte, stellte einigen Mathematikern und zuletzt Leibniz die Aufgabe, die Kurve aufzusuchen, die in einer horizontalen Ebene von einem schweren Punkte beschrieben wird, der an dem Ende eines gespannten Fadens befestigt ist, dessen anderes Ende eine in dieser Ebene gelegene Gerade durchläuft. Leibniz erkannte alsbald, daß die gesuchte Kurve durch die Eigenschaft charakterisiert ist, daß für sie auf jeder Tangente das Stück vom Berührungspunkte bis zum Schnitte mit einer festen Geraden konstant ist.[1]) Huygens beschäftigte sich

---

1) *Supplementum geometriae dimensoriae seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione* (Acta erud., 1593; *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 294 ff.). Vgl. auch einen Brief an Huygens vom 1./11. Oktober 1693 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, II, S. 164).

gleichzeitig und selbständig mit derselben Kurve[1]), verallgemeinerte sie und gab den sie lösenden Kurven den Namen Traktorien[2]); dieser Name wird noch heutigentags angewandt. In allgemeinerem Gebrauche ist aber der Name Traktrix (oder Zuglinie), welchem wir den Vorzug geben; andere gebrauchen den Namen Huygenssche Traktorien oder Traktrix-Spiralen, während Ribaucour den Namen Alyssoide vorgeschlagen hat.[3])

Wenn wir für die Traktrix und die logarithmische Spirale die folgenden beiden Definitionen wählen:

Die Traktrix ist der Ort eines Punktes von der Beschaffenheit, daß die Strecke auf der Tangente desselben, vom Berührungspunkte bis zum Schnitt mit einer festen Geraden gemessen eine konstante Länge hat,	Die logarithmische Spirale ist die Enveloppe einer Geraden von der Beschaffenheit, daß der Winkel, den sie mit der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit einem festen Punkt bildet, eine konstante Größe hat,

so sehen wir, daß, von einem gewissen Standpunkte betrachtet, die beiden Linien als korrelativ gelten können.[4])

Werden die (zu der festen Geraden senkrecht genommenen) Ordinaten einer Traktrix in einem konstanten Verhältnisse vergrößert oder verkleinert, so erhält man die Bianchische verlängerte bzw. verkürzte Traktrix[5]), Kurven, welche in Fragen der Infinitesimalgeometrie auftreten.[6])

Die Gleichung der Traktrix erhält man leicht, wenn man die feste Gerade als x-Achse wählt; in solchem Falle ist sie „**die Kurve, für welche die Länge der Tangente konstant ist**“; daher ist ihre Differentialgleichung folgende:

$$y^2 + y^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

diese ist leicht zu integrieren und gibt

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy}{y}.$$

---

1) Siehe einen an Basnage de Beauval gerichteten und in der *Histoire des ouvrages des savants* (Dezember 1692 bis Februar 1693) veröffentlichten Brief; vgl. *Oeuvres de Huygens* X, S. 407—417.

2) S. einen Brief an Leibniz vom 17. September 1693 (*Leibniz,* ed. Gerhardt, II, S. 161).

3) *Etude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (Mém. cour. par l'Acad. de Belgique, XLIV, 1880).

4) E. Cesàro, *Sur la tractrice* (Mathésis II, 1881).

5) L. Bianchi, *Über die Flächen mit konstanter negativer Krümmung* (Math. Ann. XVI, 1880).

6) Vgl. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* III. (Paris, 1894) S. 393.

Um die angedeutete Quadratur auszuführen, ist es zweckmäßig, $y = a \sin \omega$ zu setzen; dann erhält man

$$x = a \int \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} d\omega = a \left(\int \frac{d\omega}{\sin \omega} - \int \sin \omega \cdot d\omega \right).$$

Nehmen wir nun an, daß die Kurve vom Punkte $A(0, a)$ ausgeht, so muß für $\omega = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ werden, und alsdann dienen zur Darstellung der Traktrix der beiden Gleichungen

$$x = a \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + a \cos \omega, \qquad y = a \sin \omega. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wenn man hierin ω in $\pi - \omega$ verwandelt, so ändert nur x das Vorzeichen, während y unverändert bleibt: **Die Traktrix ist symmetrisch zur y-Achse** (aber nicht zur x-Achse, wie man geglaubt hat[1]): der Punkt A ist eine Spitze mit der y-Achse als Spitzentangente. Die gewöhnliche kartesische Gleichung derselben ist offenbar das Resultat der Elimination von ω aus (2), lautet daher

$$\left.\begin{aligned} x &= a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \;{}^{2)} \\ \text{oder} \quad y e^{\frac{x - \sqrt{a^2 - y^2}}{a}} &= a - \sqrt{a^2 - y^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus dieser geht hervor, daß (die x-Achse, d. h.) **die feste Gerade eine Asymptote der Traktrix ist.** Ferner folgt, **daß die Enveloppe der ∞^1 durch die Gleichung $x + y \operatorname{Sin} \frac{\delta}{a} = \delta$ dargestellten Geraden, wo δ ein Parameter ist, eine Traktrix ist.**[3] Dagegen ergibt sich aus der Differentialgleichung (1) daß

$$\frac{X - x}{Y - y} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) ist. Nehmen wir hierin X und Y als gegeben an und erheben ins Quadrat, so folgt: **Die Be-**

---

1) Kleyer-Haas, *Differentialrechnung,* III. T. (Stuttgart, 1894) S. 64—65; Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Kurven,* II. Aufl. (Leipzig, 1882) S. 378.

2) Diese Gleichung, unter der folgenden Form

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2} + a \log \frac{y}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}},$$

findet man wohl zum erstenmal in einer Abhandlung von Lord Brougham, die in den Philos. Transactions R. Soc. of London 1798 veröffentlicht wurde. Sie beweist, daß die Traktrixkurve einer von J. Duran-Loriga (*Intermédiaire,* IV, 1897 S. 148) betrachteten Kurvenklasse angehört, deren allgemeine Gleichung

$$x = -\frac{y}{2} \cos \theta \pm \left[\frac{c}{q} \sqrt{q^2 - y^2} - c \log \frac{q + \sqrt{q^2 - y^2}}{y} \right], \text{ wo } q^2 = \frac{4c^2}{4 - \cos^2 \theta}$$

ist. Die Traktrix entspricht dem Werte $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3) E. Beltrámi, *Teorema di geometria pseudosferica* (Giorn. di Matem. X, 1872; *Opere matematiche* II, S. 392).

rührungspunkte der von einem festen Punkte an die Traktrix gezogenen Tangenten liegen auf einer Kurve vierter Ordnung, die zweimal durch jenen Punkt hindurchgeht; liegt der feste Punkt aber auf der Asymptote ($Y = 0$), so zerfällt jene Kurve vierter Ordnung in die doppelt zu zählende Asymptote selbst und einen Kreis mit dem Radius a. Aus obigem Satze erhält man als Folge: **Jede Traktrix ist eine panalgebraische Kurve und gehört einem System an mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$.**

Eine einfache Anwendung bekannter Formeln zeigt, daß die zwischen der Traktrix und ihrer Asymptote gelegene Fläche gegeben wird durch $F = \frac{\pi a^2}{2}$, während der durch Rotation um dieselbe erzeugte Körper das Volumen $V = \frac{2\pi a^3}{3}$ und die Fläche $4\pi r^2$ hat[1]), d. h.: **Der durch Rotation der Traktrix um die Asymptote erzeugte Körper hat dieselbe Oberfläche und das halbe Volumen wie die Kugel, deren Radius gleich der Länge der Tangente a ist.**[2]) — Wichtiger ist eine Folgerung, zu der uns die Rektifikation der Kurve führt. Gleichung (1) liefert nämlich

$$\frac{ds}{dy} = \frac{a}{y};$$

daher ist

$$s = a \log \frac{a}{y}. \quad \ldots \quad (7)$$

Lassen wir die Bogen im Punkte $A(x = 0, y = a)$ beginnen, wo also die Kurve die y-Achse berührt, so kann man auch schreiben

$$s = -a \log \sin \omega, \quad x = a \log (1 - \cos \omega) - a \log \sin \omega + a \cos \omega; \quad (7')$$

daher ist

$$s - x = -a \cos \omega - a \log (1 - \cos \omega);$$

setzen wir hierin $\omega = \pi$, so wird $x = \infty$, und wir haben dann

$$\lim_{x=\infty} (s - x) = a (1 - \log 2); \quad \ldots \quad (8)$$

da nun die Kurve symmetrisch zur y-Achse, so drückt diese Beziehung folgenden Satz von Beltrami aus[3]): **Die Differenz zwischen der (unendlichen) Länge der durch die Konstante a bestimmten Traktrix und ihrer Asymptote ist eine endliche Größe, und zwar gleich $2a(1 - \log 2)$.**

Bezeichnet R den Krümmungsradius der Traktrix, so findet man leicht aus der Gleichung (3)

$$R = a \operatorname{ctg} \omega; \quad \ldots \quad (9)$$

---

1) *Oeuvres de Huygens,* X, S. 418–421.

2) E. Beltrami, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione* (Annali di Matem. VI, 1864, S. 276 oder *Opere matematiche* I, S. 204). Zwar sagt Beltrami, daß die beiden betrachteten ganzen Volumina gleich seien; daß dies nicht richtig, wurde dem Verf. brieflich mitgeteilt von Prof. F. Dingeldey den 2. Februar 1910.

3) Daselbst.

wird nun ω aus den Gleichungen (7') und (9) eliminiert, so erhält man

$$R = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als natürliche Gleichung der Traktrix. Bezeichnen wir, wie gewöhnlich, den Bogen und den Krümmungsradius der Evolute mit s_1 und R_1, und bedienen uns der Formeln (Nr. **245**) $s_1 = R$, $R_1 = R\frac{dR}{ds}$, so erhalten wir

$$s_1 = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}, \quad R_1 = ae^{\frac{2s}{a}},$$

demnach durch Elimination von s

$$R_1 = \frac{s_1^2}{a} + a; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

dies ist nun die natürliche Gleichung der ersten im folgenden Kapitel behandelten Kurve; wir sehen also: **Die Traktrix ist die Evolvente einer Kettenlinie.**

231. Die Gleichung (10) führt uns zur Betrachtung von allgemeineren Kurven, nämlich der durch eine Gleichung von der Form

$$R = b\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

dargestellten, es sind die Pseudotraktrices nach E. Cesàro[1]); zur natürlichen Gleichung ihrer Evoluten gelangt man durch ein ähnliches Rechnungsverfahren wie vorhin; sie ist

$$R_1^2 = \frac{s_1^2}{a} + c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wobei $ac = b^2$; es sind die sog. Pseudokatenarien, denen wir im folgenden Kapitel begegnen werden.

Älteren Datums ist eine andere Verallgemeinerung der Traktrix, auf die wir hier hinweisen wollen. Nach einem Vorschlage von V. Riccati[2]) wird mit dem Namen Syntraktrix der Ort der Punkte P bezeichnet, welche die Tangenten MT einer gewöhnlichen Traktrix in einem gegebenen Verhältnisse teilen. Um die Gleichung derselben zu finden, bezeichnen wir mit x, y die Koordinaten von M, mit x' y' die von P und setzen $MP = h$, $TP = k$, so daß also $h + k = a$ ist. Dann haben wir

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{k}, \quad \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{dy}{dx};$$

1) *Natürliche Geometrie* S. 18.

2) Siehe die Abh. *De natura et proprietatibus quarundam curvarum, quae simul cum tractoria generantur, quaeque proinde syntractoria nominabantur* (Comment. Inst. Bonon. III, 1755).

kombinieren wir diese mit (1), so finden wir

$$y = \frac{ay'}{k}, \qquad x = x' + \frac{h}{k}\sqrt{k^2 - y'^2};$$

setzen wir diese Werte in (3) ein, so bekommen wir

$$x' - \sqrt{k^2 - y'^2} = a \log \frac{k - \sqrt{k^2 - y'^2}}{y'}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

dies ist die Gleichung der Syntraktix; für $k = a$ stimmt sie mit (3) überein, wie vorauszusehen war An Stelle der Gleichung (14) können auch folgende beiden treten

$$x' = k \cos \omega + a \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \qquad y' = k \sin \omega.^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Viel natürlicher und weiter gehend ist die Verallgemeinerung der Traktrix, die entsteht, wenn man die feste Gerade durch eine beliebige Kurve ersetzt; man gelangt so zu dem Begriffe der Traktrix einer beliebigen Kurve[2]), welchen man schon bei Huygens und Leibniz begegnet, und zu einer bemerkenswerten Beziehung zwischen zwei Kurven, die man in folgender Weise präzisieren kann: „Trägt man auf den Tangenten einer gegebenen Kurve Γ von den Berührungspunkten aus eine konstante Länge ab, so bildet der Ort der Endpunkte eine neue Kurve E, welche man die Äquitangentialkurve von Γ nennt[3]), während Γ die Traktrix von E heißt (welch letztere alsdann die Basis der Traktrix genannt wird)."[4]) Solche Kurvenpaare kommen in Fragen der angewandten Mathematik vor[5]).

Ist die Kurve Γ gegeben, so läßt sich ihre Äquitangentialkurve durch einfache Differentiationen bestimmen. Sind nämlich $x = x(s)$, $y = y(s)$ die Ausdrücke für die Koordinaten der Punkte von Γ in

1) Zur Familie der Syntraktrices gehört eine Kurve, welche M. d'Ocagne in seinem Aufsatze *Sur une courbe définie par la loi de sa rectification* (Nouv. Ann. mathém., 3e Sér., X. 1891) erforscht hat.

2) Vgl. auch A. Poulain, *Les aires de tractrices et le stang-planimètre* (Journ. math. spéc. 4e Sér. IV, 1895).

3) H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques; Partie complémentaire* (Bar-le-Duc, 1899) S. 58. Ist z. B. Γ ein Kegelschnitt, so wird E eine Kurve 8. Ordnung sein, die A. Schrader eingehend untersucht hat *(Über den Ort der Endpunkte, die man erhält, wenn man auf jeder Tangente eines Kegelschnittes nach beiden Seiten hin vom Berührungspunkte aus eine konstante Strecke abträgt;* Progr. Paderborn, 1904).

Die Äquitangentialen i. allgem. wurden vom Abt Aoust in seiner *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris, 1873) genauer untersucht. Dieselben Kurven wurden von G. Scheffers *Tangentialen* genannt, da er den von uns gebrauchten Namen in einer anderen Bedeutung nahm; vgl. die schöne Abhandlung *Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen* (Math. Ann. LX, 1905).

4) Über die Traktrixkurven im allgemeinen sehe man L. Kleritj *Traktoriograph und Konstruktion der transzendenten Zahlen „π" und „e", sowie Konstruktion der n-seitigen dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Polygone* (Dinglers polyt. Journ. Bd. 305, 1897).

5) Bourlet, *Nouveau traité des bicycles et des bicyclettes* (2. Aufl. Paris, 1898).

Funktionen des Bogens, und l die konstante Länge, so werden die Koordinaten des zugehörigen Punktes von E sein

$$X = x + l\frac{dx}{ds}, \quad Y = y + l\frac{dy}{ds}.$$

Bezeichnen wir nun den Bogen von E mit S und beachten, daß der Krümmungradius R von Γ durch die Gleichung

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

bestimmt wird, so folgt

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = 1 + \frac{l^2}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

eine bemerkenswerte Beziehung zwischen Γ und E.

Eine weitere Beziehung kann folgendermaßen ausgesprochen werden: **Die Normale im Punkte P von E, der Äquitangentialkurve von Γ, welcher dem Punkte M dieser letzteren entspricht, geht durch den zu M gehörenden Krümmungsmittelpunkt von Γ.** Um diesen Satz zu beweisen, beachten wir, daß die Koordinaten dieses Krümmungszentrums sind

$$x_0 = x + R\frac{dy}{ds}, \quad y_0 = y - R\frac{dx}{ds},$$

während — wenn ξ, η die laufenden Koordinaten bedeuten — die Gleichung der Normalen in M zur Kurve E lautet

$$(\xi - X)\frac{dX}{ds} + (\eta - Y)\frac{dY}{ds} = 0;$$

setzen wir nun in die linke Seite dieser Gleichung für X und Y ihre Werte ein und alsdann $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, so erhält man als Resultat:

$$l\left[R\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds}\right) - 1\right] = 0,$$

in Übereinstimmung mit obigem Satze. — Die Bedeutung dieses Satzes liegt vornehmlich darin, daß sie uns gestattet, das Krümmungszentrum für einen beliebigen Punkt von Γ zu konstruieren, wenn man die Normalen der beiden Kurven Γ, E konstruieren kann. Im speziellen ergibt sich aus ihm: **Um das Krümmungszentrum für einen beliebigen Punkt M der gewöhnlichen Traktrix, die als Basis die Gerade Ox hat, zu konstruieren, hat man den Schnittpunkt der Normalen in M zur Kurve mit der zur Basis im Treffpunkt der Tangente errichteten Senkrechten aufzusuchen.**[1]) Ähnlich hat man: **Um das Krümmungszentrum für den Punkt M einer Traktrix zu finden, die als Basis einen Kreis hat, hat man den Schnittpunkt der Normalen in M mit demjenigen Radius des Kreises aufzufinden, der durch den dem Punkte M entsprechenden Punkt der Peripherie geht.**

1) Eine praktisch wichtige Anwendung dieses Satzes verdankt man R. Mehmke (Zeitschr. Math. Phys. XLIX, 1903, S. 464); vgl. E. Müller, *Lehrbuch der darst. Geom.* I (Leipzig, 1908) S. 126.

Umgekehrt aber: Ist die Basiskurve E gegeben, so erfordert die Auffindung der Traktrix Γ im allgemeinen die Integration von Differentialgleichungen und wenigstens Quadraturen. Die bezüglichen Rechnungen können vollständig ausgeführt werden, nicht nur, wenn E eine Gerade ist (vgl. oben), sondern auch wenn sie ein Kreis ist[1]), und dies soll im folgenden bewiesen werden.

232. Die Basiskurve sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius a, und l sei die konstante Länge. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der Traktrix wollen wir mit x, y bezeichnen (Taf. V, Fig. 47) und mit s den Bogen der Traktrix. Wir setzen nun zur Abkürzung

$$a^2 - l^2 = n^2, \quad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{ds}{dx} = s'; \text{ daher ist } 1 + y'^2 = s'^2.$$

N sei der dem Punkte M entsprechende Punkt des Kreises; ziehen wir nun MP und NR senkrecht zu Ox und MV dazu parallel, so haben wir

$$OR = OP + MV = x + \frac{l}{s'}, \quad RN = PM + VN = y + \frac{ry'}{s'},$$

und da N dem gegebenen Kreise angehört, so ist $\overline{OR}^2 + \overline{RN}^2 = a^2$, folglich

$$\left(x + \frac{l}{s'}\right)^2 + \left(y + \frac{ly'}{s'}\right)^2 = a^2$$

oder auch

$$x^2 + y^2 + \frac{2l}{s'}(x + yy') = n^2; \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

dies ist die Differentialgleichung der Traktrix; die Integration derselben läßt sich in folgender Weise ausführen. Schreiben wir nämlich so

$$s' = -l\,\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2 - n^2} = -l\,\frac{d}{dx}\log(x^2 + y^2 - n^2),$$

so finden wir

$$s = c - l\log(x^2 + y^2 - n^2); \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

führen wir jetzt Polarkoordinaten ϱ, ω ein, so wird Gleichung (16) zu

$$\varrho^2 + \frac{2l\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2}} = n^2$$

oder auch

$$d\omega = \frac{d\varrho\sqrt{2(a^2 + l^2)\varrho^2 - \varrho^4 - n^4}}{\varrho(\varrho^2 - n^2)} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

und damit ist die Trennung der Variabeln erreicht. Um die Rechnung weiter zu führen, setzen wir

$$\varrho^2 = a^2 + l^2 + 2al\cos\mu \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

und verwandeln dadurch die vorige Gleichung in folgende

$$d\omega = -d\mu\,\frac{a^2 l\cos\mu}{(a^2 + l^2 + 2al\cos\mu)(l + a\cos\mu)},$$

1) S. Riccati, *De usu motus tractorii in constructione aequ. diff.* (Bologna, 1752). Der wesentliche Inhalt dieser Abhandlung ist im II. Bande der *Institutiones analyticae a V. Riccati et H. Saladino collectae* (Bononiae, 1767; S. 470 bis 487) wiedergegeben.

oder
$$d\omega - \frac{1}{2}d\mu - \frac{l}{a}\frac{d\mu}{\frac{l}{a}+\cos\mu} - \frac{n^2}{4al}\frac{d\mu}{\frac{a^2+l^2}{2al}+\cos\mu} \quad . \; . \; . \quad (20)$$

Setzen wir nun $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mu = \theta$, so wird Gleichung (19)

$$\varrho = \sqrt{a^2 + l^2 + 2al\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

während die Gleichung (20) sich verwandelt in

$$d\omega = \frac{d\theta}{1+\theta^2} - n^2\frac{d\theta}{(a+l)^2+(a-l)^2\theta^2} - 2l\frac{d\theta}{(a+l)-(a-l)\theta^2}.$$

Wird die Integration ausgeführt, so erhält man auf der rechten Seite verschiedene Resultate je nach dem Werte von a, und zwar

$$\omega = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\theta - \theta + A & \text{wenn } a=l \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{2l\theta}{(a+l)+(a-l)\theta^2} + \frac{2l}{n}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{l-a}{l+a}}\,\theta + B & \text{„} \quad a<l \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{2l\theta}{(a+l)+(a-l)\theta^2} - \frac{l}{n}\log\frac{a+l+n\theta}{a+l-n\theta} + C & \text{„} \quad a>l \end{cases} \quad (22)$$

wo A, B, C die beliebigen, durch die Integration eingeführten Konstanten sind, die man in jedem Falle auch gleich Null annehmen darf. Die Gleichungen (21) und (22) geben für alle Fälle die Polarkoordinaten ϱ, ω als Funktionen der unabhängigen Variabeln θ, liefern daher die analytische Darstellung der Kurve, insbesondere können sie zur Bestimmung ihrer Gestalt dienen. So zeigt uns z. B. die Gleichung (21), daß die Kurve ganz innerhalb des Kreisringes mit dem Zentrum O und den Radien $a + l$ und $|a - l|$ liegt; dagegen lassen die Gleichungen (22) erkennen, (vorausgesetzt, daß die Konstanten A, B, $C = 0$) daß sie symmetrisch in bezug auf die Polarachse ist, indem beim Wechsel des Vorzeichens von θ, ω gleichfalls wechselt, während ϱ unverändert bleibt; die dritte der Gleichungen (22) zeigt, wenn $\theta^2 = \frac{a+l}{a-l}$, so ist $\varrho = \sqrt{a^2 - l^2} = n$ und $\omega = \infty$; daher ist der Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius n ein asymptotischer für die Kurve usw. Die Gestalt der Kreistraktrix für den Fall $l = a$ stellt in Fig. 48 auf Taf. V die in A beginnende Kurve dar, die in B beginnende den Fall $l = 2a$. Beachten wir auch noch, daß im Falle $l = a$, $A = 0$ man als Polargleichung der Traktrix findet

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4a^2-\varrho^2}}{\varrho} - \frac{\sqrt{4a^2-\varrho^2}}{\varrho}.$$

A. Bordoni, dem man die oben dargelegte elegante Rechnung verdankt[1]), ist außerdem auf einige sehr einfache Betrachtungen gestoßen,

---

1) S. die Abh. *Sul nuovo tornio immaginato dal Sign. Carlo Parea* (Mem. Soc. Ital. Scienze, XVIII, 1820).

die in einer wirklich unerwarteten Art und Weise eine Differentialgleichung für die Evolvente der betrachteten Traktrix liefern, die leicht integrierbar ist; wir wollen diese in aller Kürze wiedergeben.

Es seien t und u die Koordinaten desjenigen Punktes der Evolvente, welcher dem Punkte (x, y) der Traktrix entspricht. Wir wollen alle diese Größen als Funktionen einer und derselben unabhängigen Variabeln auffassen; alsdann haben wir

$$t = x - \frac{s'^2 y'}{y''}, \qquad u = y + \frac{s'^2}{y''} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Eliminieren wir x und y aus diesen Gleichungen und aus (16) — die nötigenfalls differenziert wird —, so bekommen wir die Differentialgleichung der Evolvente. Differenzieren wir nun (16), so bekommen wir

$$(x + yy' + ls')\, s'^3 = l\,(xy' - y)\, y'';$$

wenn man nun in diese und die erste von (23) den Wert $y'' = \frac{s'^2}{u - y}$ setzt, der aus der zweiten von (23) hervorgeht, so gelangt man zu den Gleichungen

$$(x + yy' + ls')\, s'\,(u - y) = l\,(xy' - y), \quad t + uy' - x - yy' = 0,$$

oder auch $$x = t + y' \frac{uy' - t}{uy' + t}, \qquad y = u + \frac{l}{s'}\,\frac{t - uy'}{t + uy'}.$$

Setzen wir diese Werte für x und y in (16) ein, so erhalten wir

$$t^2 + u^2 + 2ls' \frac{t^2 + u^2}{t + uy'} + l^2 \left(\frac{u + ty'}{t + uy'}\right)^2 = n^2.$$

Bekanntlich ist nun gemäß der Theorie der Evoluten $y' = -\frac{t'}{u'}$, daher, wenn der Bogen der Evolvente mit σ' bezeichnet wird,

$$t + uy' = \frac{tu' - t'u}{u'}, \quad ty' - u = -\frac{tt' + uu'}{u'}, \quad s' = \frac{\sqrt{t'^2 + u'^2}}{u'} = \frac{\sigma'}{u'},$$

und die vorige Gleichung wird nun

$$t^2 + u^2 + 2l\sigma' \frac{t^2 + u^2}{tu' - t'u} + l^2 \left(\frac{tt' + uu'}{tu' - t'u}\right)^2 = n^2. \quad \ldots \quad (24)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Evolvente. Um sie zu integrieren, wollen wir Polarkoordinaten ϱ, ω einführen, und damit verwandeln wir sie in folgende

$$\varrho^2 - 2l\frac{\sigma'}{\omega'} + l^2 \frac{\varrho'^2}{\varrho^2 \omega'^2} = n^2$$

oder aber $$\left(\varrho - \frac{l\sigma'}{\varrho\omega'}\right)^2 = n^2$$

Daraus folgt, wenn $\varepsilon = \pm 1$,

$$\varrho - \frac{l\sigma'}{\varrho\omega'} = \varepsilon n,$$

folglich $$(\varrho - \varepsilon n)^2 = \frac{l^2 \sigma'^2}{\varrho^2 \omega'^2} = l^2 \left(1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2 \omega'^2}\right),$$

oder auch $$\sqrt{(\varrho - \varepsilon n)^2 - l^2} = \frac{l\varrho'}{\varrho\omega'},$$

oder schließlich $$d\omega = \frac{l \cdot d\varrho}{\varrho\sqrt{(\varrho - \varepsilon n)^2 - l^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

womit auch die Variabeln getrennt sind. Setzt man nun

$$\varrho - \varepsilon n = lz, \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

so wird (25) zu $$d\omega = \frac{l \cdot dz}{(\varepsilon n + lz)\sqrt{z^2 - 1}}$$

oder wenn man setzt $$\sqrt{z^2 - 1} = z - u, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

$$d\omega = \frac{-2\,du}{u^2 - 2\varepsilon\frac{n}{l}u + 1},$$

weshalb dann $$\omega = \int \frac{-2\,du}{u^2 - 2\varepsilon\frac{n}{l}u + 1}. \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Wird nun z aus (26) und (27) eliminiert, so bekommt man

$$\varrho = \varepsilon n + \frac{l}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right). \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

Die Gleichungen (28) und (29) liefern ω und ϱ als Funktionen der unabhängigen Variabeln u, und bieten daher die gesuchte analytische Darstellung der Kurve; wir können hinzufügen, daß die in (28) angegebene Integration ausführbar ist und folgendes Resultat ergibt:

$$\omega = \begin{cases} D - \dfrac{2}{u - \varepsilon}, & \text{wenn } n = l \\ E + \dfrac{l}{\sqrt{l^2 - n^2}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\varepsilon n + lu}{\sqrt{l^2 - n^2}}, & \text{„} \quad n < l \\ F + \dfrac{l}{2u} \log \dfrac{\varepsilon n + lu - u}{\varepsilon n + lu + u} & \text{„} \quad n > l \end{cases} \quad \ldots \quad (30)$$

wo D, E, F die Integrationskonstanten sind, die man im allgemeinen gleich Null annehmen kann.

Mit Hilfe der gefundenen analytischen Darstellung würde man zur Kenntnis aller Eigenschaften der Kurve gelangen können (die Fig. 49 auf Taf. V stellt graphisch nach Bordoni den dritten der obigen Fälle dar); wir überlassen jedoch dem Leser diese Untersuchung und bemerken vielmehr, daß zu einer Behandlung der Traktrix des Kreises neuerdings F. Morley auf einem Wege gelangt ist, zu dem ihn die Betrachtung eines bekannten Integrationsinstrumentes führte[1]). Die Kurve kann nämlich als Orthogonaltrajektorie der ∞^1 Kreise mit gegebenem Radius b aufgefaßt werden, deren Mittelpunkte auf einem Kreise mit dem Zentrum O und dem Radius a liegen; sie ist

1) S. die Note *The „no rolling" curves of Amslers planimeter* (Annals of Mathem., II Ser. I, 1899).

demnach anallagmatisch in bezug auf jede Inversion mit dem Zentrum O und in dem Spezialfalle $a = b$ die Inverse einer Kreisevolvente. Um ihre analytische Darstellung zu finden, beachten wir die ∞^1-Kreise, die die allgemeine Gleichung haben

$$(x - a \cdot \cos \varphi)^2 + (y - a \cdot \sin \varphi)^2 = b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

oder auch $x^2 + y^2 - 2\,ax \cdot \cos \varphi - 2\,ay \cdot \sin \varphi + a^2 - b^2 = 0.$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a \cdot \cos \varphi}{y - a \cdot \sin \varphi},$$

demnach ist die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorie dieses Kreissystems

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - a \cos \varphi}{y - a \sin \varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

aus der φ mit Beihilfe von Gleichung (31) zu eliminieren ist. Alsdann liefert die Gleichung (32)

$$\frac{dx}{x - a \cos \varphi} = \frac{dy}{y - a \sin \varphi} = \frac{ds}{b},$$

wo s den Bogen der gesuchten Kurve bedeutet; demnach ist

$$\frac{b \cdot dx}{ds} - x = -a \cos \varphi, \quad \frac{b \cdot dy}{ds} - y = -a \sin \varphi,$$

und wenn man quadriert und addiert

$$b^2 + x^2 + y^2 - \frac{2b\,(x \cdot dx + y \cdot dy)}{ds} = a^2,$$

oder, wenn man $x^2 + y^2 = \varrho^2$ setzt,

$$\varrho^2 + l^2 - a^2 - \frac{2b\varrho \cdot d\varrho}{ds} = 0.$$

Daraus folgt dann

$$ds^2 = \frac{4b^2\varrho^2 \cdot d\varrho^2}{(\varrho^2 - a^2 + b^2)^2},$$

oder, wenn wir Polarkoordinaten einführen,

$$d\varrho^2 + \varrho^2 \cdot d\omega^2 = \frac{4b^2\varrho^2 \cdot d\varrho^2}{(\varrho^2 - a^2 + b^2)^2},$$

woraus dann

$$\omega = \int \frac{\sqrt{4b^2\varrho^2 - (\varrho^2 - a^2 + b^2)^2}}{\varrho\,(\varrho^2 - a^2 + b^2)} \cdot d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

als Polargleichung der Kurve sich ergibt. Da diese Gleichung auf die Form (18) reduzierbar ist, so ist die Kurve von Morley mit der von Bordoni identisch. Im Falle $a = b$ wird die Gleichung (33) zu

$$\omega = \int \frac{\sqrt{4a^2 - \varrho^2}}{\varrho^2} \cdot d\varrho$$

und liefert $\omega = \arc\cos \frac{\varrho}{2a} - \frac{\sqrt{4a^2-\varrho^2}}{\varrho}$, die, wie vorausgesagt war, die Inverse einer Kreisevolvente darstellt (s. S. 115). Im allgemeinen Falle zeigt uns Gleichung (33), daß die Traktrix des Kreises eine panalgebraische Kurve ist; wir überlassen es dem Leser, die Kurve (8. Ordnung) aufzusuchen, auf welcher die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte der Ebene an sie gezogenen Tangenten liegen. Dagegen sei hier noch bemerkt, daß die Berührungspunkte der Tangenten, die mit der Polarachse den Winkel α bilden, auf der Kurve

$$\frac{\sqrt{4b^2\varrho^2-(\varrho^2-a^2+b^2)^2}}{\varrho(\varrho^2-a^2+b^2)} = \operatorname{tg}(\alpha-\omega)$$

liegen, die, wenn man zu kartesischen Koordinaten übergeht, sich erweist als zerfallend in die beiden Kreise

$$(x \pm b\cos\alpha)^2 + (y \pm b\sin\alpha)^2 = a^2$$

und das sind jene beiden des gegebenen Systems, deren Mittelpunkte die Endpunkte des Durchmessers von der Neigung α des Kreises mit dem Zentrum O und dem Radius b sind.

F. Morley hat bemerkt, daß die Kurve verschiedene Gestalt darbietet: wenn $a > b$, so hat sie einen asymptotischen Kreis mit dem Zentrum O, dem Radius $\sqrt{a^2-b^2}$; wenn $a = b$, so hat sie O als asymptotischen Punkt, und wenn $a < b$, so hat die Kurve regelmäßig auf den Peripherien der Kreise um O mit den Radien $b \pm a$ verteilte Spitzen, so daß der Winkelabstand zweier aufeinander folgenden Spitzen gleich $\frac{\pi b}{\sqrt{b^2-a^2}}$ ist. (S. die Fig. 48, B.)

Der Umstand, daß die Evolute der gewöhnlichen Traktrix eine bekannte Linie — die Kettenlinie — ist, hat Morley zu der Untersuchung der Evolute der Kreistraktrix veranlaßt; er fand als Polargleichung dieser Kurve

$$\omega = \int \frac{b \cdot d\psi}{b + a\cos\psi}, \quad \text{wo } \psi = \arc\cos\frac{b}{\varrho - a} \text{ ist.}$$

Die Integration ist immer elementar ausführbar und führt z. B. im Falle $b > a$ zu folgender Polargleichung der Evolute:

$$\varrho = \frac{a^2-b^2}{a - b\cos\frac{b\omega}{\sqrt{b^2-a^2}}},$$

die (wie wir aus Bd. I, S. 423 wissen) eine Kurve mit n Bäuchen darstellt, wenn $\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$ eine ganze positive Zahl n ist.

233. Wenn wir bei der gewöhnlichen Traktrix die x-Achse als Basis nehmen, so kann jene, wie wir in Nr. **231** gesehen haben, definiert werden „als die Kurve, für welche die Länge der Tangente

konstant ist". Diese Bemerkung läßt von selbst die Frage aufwerfen: „Welche Kurven erfreuen sich der nämlichen Eigenschaft bei einem Polarkoordinatensystem?" Es sind offenbar die Integralkurven folgender Differentialgleichung

$$\varrho\sqrt{1+\left(\varrho^2\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2}=a. \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Schreiben wir diese in folgender Weise

$$ds = a\,\frac{d\varrho}{\varrho},$$

und integrieren, so erhalten wir

$$s - s_0 = a\log\frac{\varrho}{\varrho_0}. \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

Daraus geht hervor, daß die gesuchten Kurven von der Eigenschaft sind, daß ein beliebiger Bogen derselben proportional dem Logarithmus des Verhältnisses der Vektoren in den beiden Endpunkten ist. Wendet man die allgemeine Gleichung (15) S. 102 und die Definitionsgleichung (1) an, so kann man leicht beweisen, daß die in Rede stehende Kurve eine panalgebraische Kurve ist, die einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 4$ angehört. Beachtet man ferner, daß für die Wendepunkte $\frac{1}{\varrho}+\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=0$ ist, und daß $\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=\frac{-\varrho^3}{(a^2-\varrho^2)^2}$, so erkennt man: **Der Kreis $\varrho^2=\frac{1}{2}a^2$ schneidet die Kurve in ihren Wendepunkten.** Aus (1) ergibt sich dann

$$d\omega = \frac{\sqrt{a^2-\varrho^2}}{\varrho^2}\cdot d\varrho;$$

wenn man nun $\varrho = a\cos\vartheta$ setzt, so hat man

$$d\omega = d\vartheta - \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta};$$

daher ist

$$\omega = \vartheta - \operatorname{tg}\vartheta + c,$$

oder auch weil $\vartheta = \arccos\frac{\varrho}{a}$,

$$\omega = \arccos\frac{\varrho}{a} - \frac{\sqrt{a^2-\varrho^2}}{\varrho} + c.$$

Nehmen wir jetzt als Polar-Winkelkoordinate die Größe $c-\omega$, so ergibt sich, daß

$$\omega = \frac{\sqrt{a^2-\varrho^2}}{\varrho} - \arccos\frac{\varrho}{a} \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

die Polargleichung der gewünschten Kurve ist. Lassen wir nun, weil ja $\arccos\frac{\varrho}{a}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\varrho}{a}$, die Polarachse eine Rotation um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ machen, so kann die Gleichung (3) auch durch folgende ersetzt werden:

$$\omega = \frac{\sqrt{a^2-\varrho^2}}{\varrho} - \arcsin\frac{\varrho}{a}. \quad \ldots \ldots \quad (36')$$

R. Côtes, der die hierdurch bestimmte Kurve zuerst betrachtet hat, nannte sie Tractrix complicata[1]); Giard[2]) und Neuberg[3]) nannten sie, um ihren Zusammenhang mit Polarkoordinaten anzudeuten, polare Traktrix, O. Schlömilch[4]) zog den Namen Traktorie des Kreises vor, mit der sie ja, wie die letzten Gleichungen und die erste auf S. 200 zeigen, identisch ist.

Die Gleichung (36) kann durch folgende beiden ersetzt werden

$$\varrho = a \cos \vartheta, \qquad \omega = \operatorname{tg} \vartheta - \vartheta;$$

verwandelt man hierin ϑ in $-\vartheta$, so wird ω zu $-\omega$, und ϱ bleibt unverändert; **daher ist die Tractrix complicata symmetrisch zur Polarachse.** Nimmt man $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so erhält man $\varrho = 0$, $\omega = \infty$; daraus folgt: **Der Pol ist ein asymptotischer Punkt der Tractrix complicata.**

Zwischen der Tractrix complicata und zwei uns schon bekannten Kurven bestehen bemerkenswerte von Côtes und Neuberg gefundene Beziehungen, mit deren Beweis wir dieses Kapitel beschließen wollen.

a) Wenn man auf die Kurve (36) die durch die Formeln $\omega_1 = \omega$, $\varrho_1 = \frac{a^2}{\varrho}$ definierte Transformation durch reziproke Radien ausführt, so erhält man die durch folgende Gleichung dargestellte Kurve:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\varrho_1^2 - a^2}}{a} - \arccos \frac{a}{\varrho_1}.$$

Erinnern wir uns nun der Gleichung (25) aus Nr. **211**, so erkennen wir: Nimmt man den Mittelpunkt als Zentrum einer Inversion, so verwandelt sich jede Evolvente eines Kreises in eine Tractrix complicata.

b) Wir betrachten die hyperbolische Spirale $\varrho\omega = a$. Vom Pole fällen wir das Lot auf die Tangente im Punkte $M(\varrho, \omega)$, dessen Fußpunkt $T(\varrho_1, \omega_1)$ sein möge. Den Winkel OMT nennen wir μ; dann haben wir

$$\omega_1 - \omega = \frac{\pi}{2} - \mu, \qquad \varrho_1 = \varrho \sin \mu,$$

und da $$\sin \mu = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \qquad \cos \mu = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

so ist $$\sin(\omega_1 - \omega) = \cos \mu = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \text{ und } \varrho_1 = \frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

oder auch $$\omega_1 - \omega = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho_1^2}}{\varrho_1},$$

1) *Harmonia mensurarum* (Cantabrigiae, 1722) S. 84

2) *Courbe dont la tangente polaire est constante* (Nouv. Ann. Math. 2e Sér. I, 1862).

3) Nouv. Corr. math. IV, 1880, S. 409—410.

4) *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. Tl. (5. Aufl. Leipzig, 1904) S. 124. H. Brocard (*Notes de bibl.* etc. S. 276) benutzt den gleichbedeutenden Namen „tractrice circulaire“.

und nach Elimination von ω

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho_1^2}}{\varrho_1} - \arc\cos\frac{\varrho_1}{a}.$$

Besehen wir uns nun die Gleichung (36′), so haben wir: Die Fußpunktkurve einer hyperbolischen Spirale in bezug auf den Pol ist eine Tractrix complicata.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Kettenlinien.

234. In dem berühmten Werke Galileis, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (dessen Vorrede vom 6. März 1638 datiert ist), findet sich in der zweiten und vierten ‚Giornata' (in solche ist das Werk eingeteilt) die Bemerkung[1]), daß ein gleichmäßig schweres Seil oder eine Kette, wenn sie an zwei Punkten von derselben Höhe aufgehängt ist, eine Gestalt annehme, die einer Parabel ähnlich sei. Daß aber diese Kurve keine Parabel (zweiter Ordnung) sei, wurde durch Berechnungen und Experimente von Joachim Jungius 1669 in der bekannten Arbeit, *Geometria empyrica* betitelt, dargetan; es blieb jedoch somit immer noch übrig zu bestimmen, welches denn die Kurve sei, in welche sich das Seil lege. Die Untersuchung derselben wurde nun im Mai 1690 von Jacob Bernoulli öffentlich vorgelegt und zwar in den *Acta eruditorum*[2]). Drei Geometer ersten Ranges lösten dann sozusagen gleichzeitig diese interessante Frage, Huygens[3]), Leibniz[4]) und Joh. Bernoulli[5]); an dem edlen Wettstreit nahmen auch der Aufgabensteller[6]) und Hermann[7]) teil;

1) *Opere di G. Galilei*, ediz. nazionale VIII (Firenze, 1898).

2) S. auch *Jac. Bernoulli Opera* I, S. 246.

3) *Acta erudit.* 1691 (die Abh. ist reproduziert in *Leibniz,* ed. Gerhard, V, S. 248). Vgl. einen Brief von Huygens an Leibniz vom 4. Sept. 1691 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, II, S. 102) und die Abh. von D. J. Korteweg, *La solution de Christian Huygens du problème de la chaînette* (Bibl. math., 3. Ser. I. 1900).

4) *Acta erud.* 1691, 1692 u. 1699; *Journal de Savants* 1692*; Giornale dei Letterati,* 1692; *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 243, 255, 258, 263, 366.

5) *Acta erud.* 1691; ferner *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 48, und *Leibniz,* ed. Gerhardt, V, S. 248. Man sehe auch die XXXVI und XXXVII der *Lectiones mathematicae* (Joh. Bernoulli Opera III, S. 491—497); die drei aufeinander folgenden Lectiones verallgemeinern sukzessive das Problem, indem sie die Fälle behandeln, in welchem das Seil nicht homogen ist.

6) S. den letzten Teil des *Specimen alterum calculus differentialis* (Acta erud., Juni 1691; *Jac. Bernoulli Opera*, S. 449—453).

7) *Phoronomia,* Lib. I, Kap. III, Append. § 5 (Amstelod. 1716); einige dort begangene Irrtümer werden von Joh. Bernoulli verbessert in der Abh. *Solutio problematis catenarii generaliter concepti* (Opera IV, S. 234—241).

und David Gregory[1]) befaßte sich dann als erster damit, eine methodische Bearbeitung der Eigenschaften der fraglichen Kurve zusammenzustellen.[2])

Einfache Betrachtungen aus der Mechanik[3]) zeigen, daß die Seilkurve oder Kettenlinie[4]) geometrisch durch folgende Eigenschaft charakterisiert ist: **Der von ihrem tiefsten Punkte, dem Scheitel, aus gemessene Bogen ist proportional dem Tangens des Winkels, den die Kurventangente im Endpunkte des Bogens mit der Horizontalen bildet** ($s = c \cdot \operatorname{tg} \tau$). Hieraus ergibt sich, daß die Differentialgleichung der Kurve lautet:

$$s = c\frac{dy}{dx}, \qquad \qquad (1)$$

wo c eine Konstante bedeutet. Eliminieren wir hieraus dy vermittelst der bekannten Relation $dx^2 + dy^2 = ds^2$, so erhalten wir

$$dx = c\frac{ds}{\sqrt{s^2+c^2}}; \qquad \qquad (2)$$

daher durch Integration

$$\frac{x}{c} = \log\frac{s+\sqrt{s^2+c^2}}{c}$$

oder auch

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{s+\sqrt{s^2+c^2}}{c}.$$

Daraus folgt dann, daß

$$e^{-\frac{x}{c}} = \frac{-s+\sqrt{s^2+c^2}}{c}.$$

Daher ist

$$e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2\sqrt{s^2+c^2}}{c}, \qquad e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2s}{c}. \qquad (3)$$

Anderseits ergeben die Gleichungen (1) und (2)

$$dy = \frac{s \cdot ds}{\sqrt{s^2+c^2}},$$

und durch Integration $\qquad y = \sqrt{s^2+c^2}.$

Wegen Gleichung (3) ist nun aber

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right). \qquad \qquad (4)$$

---

1) *The properties of the Catenarian, or curve line formed by a heavy and flexible chain, hanging freely from two point of suspension* (Phil. Trans. R. Soc., London, 1697). Vgl. auch *Answer to the animadvertions concerning the Catenary* (Das. Nr. 259, 1699).

2) Bearbeitungen jüngeren Datums sind: Gretschel, *Elementare Ableitung der Haupteigenschaften der Kettenlinie* (Arch. Math. Phys. XLIII, 1865); J. Jung, *Synthetische Behandlung der gemeinen Kettenlinie* (Zeitschr. Math. Phys. XLV, 1900).

3) S. z. B. Schell, *Theorie der Bewegungen und Kräfte* II. (Leipzig, 1880) S. 94—95.

4) Der Name Catenaria ist von Huygens angegeben in dem Briefe an Leibniz vom 18. Nov. 1690 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, II, S. 56).

Dies ist die gesuchte Gleichung der Kettenlinie[1]); mit Benutzung der hyperbolischen Funktionen[2]) kann man auch schreiben

$$y = c\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{c}\,{}^{3)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4')$$

Führen wir auf die durch (4) oder (4′) dargestellte Kurve eine imaginäre homographische Transformation aus, die durch die Gleichungen $x = \xi$, $y = i\eta$ gekennzeichnet ist, so gelangen wir zu folgender

$$\eta = c \cos \frac{\xi}{c};$$

die Kettenlinie kann demnach als homographisch transformierte Sinuslinie aufgefaßt werden. Dies ermöglicht uns aus den in Nr. **222** bewiesenen Sätzen die folgenden abzuleiten: **Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene an die Kettenlinie gezogenen Tangenten gehören einer Kurve vierter Ordnung an, für welche jener Punkt ein Doppelpunkt ist; daher ist jede Kettenlinie eine panalgebraische Kurve, die einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 2$ angehört.**

Wir beachten nun, daß aus der zweiten Gleichung (3) und aus (1) sich ergibt

$$s = c\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{c}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{c}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Bezeichnen wir jetzt die zwischen der Achse, einem Kurvenbogen und der Ordinate gelegene Fläche mit F, so finden wir

$$F = \int_0^x y \cdot dx = c^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{c} = cs; \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ist ferner R der Krümmungsradius, N die Länge der Normale, so erhält man

$$R = N = c\,\mathfrak{Cos}^2\,\frac{x}{c}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

eliminieren wir dann x aus (5) und (8), so erhält man

$$R = \frac{s^2}{c} + c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und dies ist die natürliche Gleichung der Kettenlinie[4]). Diese Gleichungen (7), (8), (9) drücken algebraisch Eigenschaften der Kettenlinie

---

1) Daraus kann man eine elegante punktweise Konstruktion der Kurve ableiten; vgl. G. Jung, *Construction de la chainette par points, et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionelles à des segments donnés* (Bull. Soc. math. France IV, 1875—1876).

2) Gudermann, *Theorie der Potential- oder cyklisch-hyperbolischen Funktionen* (Crelles Journ. VI, 1830) § 75—81; Laisant, *Essai sur les fonctions hyperboliques* (Paris, 1874) S. 49; Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S., 1881) S. 249.

3) Die Kettenlinie gibt also die geometrische Darstellung einer der hyperbolischen Funktionen; die der übrigen findet man bei J. W. Mellor, *Higher matematics for students of chemistry and physics* (London, 1902) S. 275—276.

4) Zuerst aufgestellt in der o. a. Abh. von Gudermann.

aus, die man wie folgt in Worte kleiden kann: 1. Bei der Kettenlinie ist die Fläche zwischen dem Kurvenbogen (gerechnet vom Scheitel an) der Scheiteltangente und einer Vertikalen hierzu proportional jenem Bogen.[1]) 2. Bei der Kettenlinie ist der Krümmungsradius gleich der Normalen; daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion des Krümmungszentrums.[2]) 3. Rollt eine Kettenlinie auf einer Geraden, so ist der Ort der Krümmungszentren für die aufeinander folgenden Berührungspunkte eine Parabel.[3])

Dieselben Formeln führen uns leicht zu weiteren Folgerungen. Ist V der Scheitel, $A_1(x_1, y_1)$ und $A_2(x_2, y_2)$ zwei Punkte der Kettenlinie, deren zugehörige Tangenten aufeinander senkrecht stehen, so wird zufolge von (6) sein

$$\mathfrak{Sin}\frac{x_1}{c}\cdot\mathfrak{Sin}\frac{x_2}{c}+1=0 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

oder, wenn man will, $$\frac{1}{\mathfrak{Cos}^2\frac{x_1}{c}}+\frac{1}{\mathfrak{Cos}^2\frac{x_2}{c}}=1 \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Bezeichnen wir mit s_1 und s_2 die Bögen VA_1 und VA_2, mit R_1 und R_2 die Krümmungsradien in A_1 und A_2, so finden wir mit Anwendung der Formeln (5) und (8)

$$s_1\cdot s_2=-c^2, \qquad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{c}.$$

Folglich: **Wenn ein rechter Winkel eine Kettenlinie umhüllt, so ist 1. das Produkt der Bogenlängen vom Scheitel bis zu den Berührungspunkten konstant, 2. die Summe der Krümmungen der Kettenlinie in diesen beiden Punkten eine Konstante.**[4])

Nennen wir den Bogen der Evolute der Kettenlinie s_e und deren Krümmungsradius R_e, so bestehen die Relationen $s_e=R$ und $R_e=R\cdot\frac{dR}{ds}$; eliminieren wir R und s aus diesen und aus (9), so erhalten wir

$$R_e=2s_e\sqrt{\frac{s_e}{c}-1} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

als natürliche Gleichung der Evolute der Kettenlinie. Die vorigen

1) Bezügl. eines geometrischen Beweises für diesen Satz und andere ähnliche sehe man Wasteels, *Aires et volumes relatives à la chaînette* (Mathésis 2. Ser. VI, 1896).

2) Über dieselbe Frage s. m. den § II des Aufsatzes von J. Sobotka, *Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plankurven* (Prager Ber., 1898).

3) A. Mannheim, *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859, S. 103, oder *Principes et développements de géom. cinématique*, Paris, 1894, S. 509).

4) S. zwei Noten, die eine von C. Rabut, die andere mit dem Pseudonym R. Ch. Weitz im II. Bde. (1895) des *Intermédiaire* S. 115 u. 358.

Gleichungen liefern uns aber ebenfalls leicht die kartesische Gleichung derselben; wir geben nur das Resultat der Rechnung, nämlich

$$x = \frac{y\sqrt{y^2 - 4c^2}}{4c} + c \log \frac{y - \sqrt{y^2 - 4c^2}}{2c}.$$

Schließlich: **Die Evolvente der Kettenlinie ist die Traktrix**, wie wir in Nr. **231** gesehen haben.

Das Problem der Kettenlinie veranlaßte Jacob Bernoulli auch andere in der Natur vorkommende Kurven zu untersuchen, so namentlich das Profil der Gestalt, die ein vom Winde geblähtes Segel annimmt, wenn man von der Schwere desselben absieht. Es gelang ihm die gesuchte Kurve — Velaria oder Segelkurve genannt — durch die Differentialgleichung darzustellen; da es ihm aber nicht gelang sie zu integrieren, wandte er sich an seinen Bruder Johann um Hilfe, indem er von ihm sich wenigstens eine Punktkonstruktion der Kurve erbat. Später gelang es ihm, die Differentialgleichung auf die einfache Form $ds \cdot d^2x = dy^3$ zu bringen, die er dann seinem Bruder mitteilte. Letzterer entdeckte nicht nur ein Verfahren, jene Differentialgleichung zu bilden, sondern gelangte auch zu dem Schlusse, daß (abgesehen von der Lage) „la courbe de la voile est la même que la courbe de la chaîne"; **die Segelkurve ist also identisch mit der Kettenlinie.**[1])

Wir fügen noch hinzu, daß man ein einfaches Instrument kennt, mittels dessen man eine Kettenlinie zeichnen kann[2]) und daß man dieselbe Kurve erhält, wenn man die folgende durch Euler 1744 gestellte und erledigte Aufgabe lösen will: „In einer Ebene sind zwei Punkte gegeben, durch diese soll eine Kurve gelegt werden, derart, daß sie bei der Rotation um eine in der Ebene gelegene Achse die kleinste Oberfläche erzeugt".[3])

235. Die natürliche sowohl wie die kartesische Gleichung der Kettenlinie führten zum Begriff von allgemeineren Kurven dieser Art. So sind die durch die natürliche Gleichung

$$cR = s^2 + a^2, \qquad R = a + \frac{s^2}{b} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (13)$$

dargestellten Kurven Alyseiden[4]) resp. Pseudokatenarien[5]) ge-

1) *Journal des Savants*, 28. April 1692 (*Joh. Bernoulli Opera* I, S. 59—61); vgl. die XLVIII der *Lectiones mathematicae*, *Opera* I, S. 510—515; außerdem *Jac. Bernoulli Opera*, S. 481—490 und 639—663.

2) R. Schimmack, *Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenograph* (Zeitschr. Math. Phys., LII, 1905) ein Aufsatz, wo man auch Hinweise auf die mechanische Beschreibung anderer Kurven findet (z. B. die Ribaucourschen Kurven).

3) Vgl. Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig, 1900) S. 25.

4) E. Cesàro, Nouv. Ann. Math., 3e Sér. V, 1886, S. 75.

5) Cesàro-Kowalewski, *Vorl. üb. Natürliche Geometrie* S. 17.

nannt worden. Die Gleichung (4) oder (4') hingegen führten zu Kurven mit der kartesischen Gleichung

$$y = r\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \quad \text{oder} \quad y = rc\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{c}, \quad \ldots \quad (14)$$

wo r eine beliebige gegebene Zahl ist; es sind die Gewölbelinien von O. Schlömilch.[1]) Aus Gleichung (14) folgt

$$\frac{dy}{dx} = r\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{c}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r}{c}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{c},$$

demnach ist $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$, und sind also die betrachteten Kurven ohne Wendepunkte. Ferner ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + r^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{c}},$$

daher

$$R = \frac{c}{r}\,\frac{\left(1 + r^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{c}\right)^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{c}}.$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir diejenigen Werte von x auffinden, bei denen R seine größten oder kleinsten Wert erhält; man braucht nur den Wert $\frac{dR}{dx} = 0$ zu setzen. Von der Lösung abgesehen, die man erhält, wenn man $\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{c} = 0$ setzt, bleibt noch die Gleichung

$$2r^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{c} = 1 - 3r^2.$$

Damit diese reelle Wurzeln habe, muß $r < \frac{1}{\sqrt{3}}$ sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so erhalten wir zwei zur y-Achse symmetrische Punkte, in denen die entsprechende Kurve die größte Krümmung zeigt; diese Punkte erscheinen gleichsam als Nasen der Kurve, daher der Name Kettenlinie mit zwei Nasen, den die Kurve von den Entdeckern dieser Eigentümlichkeit erhielt; Anwendung findet sie bei Fragen der angewandten Mathematik.[2])

Die Gewölbelinien sind spezielle Integralkurven der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{c^2},$$

deren allgemeines Integral ist

$$y = pe^{\frac{x}{c}} + qe^{-\frac{x}{c}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

1) *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I. Tl. (5. Aufl. Leipzig, 1904, S. 116).

2) T. Alexander und A. W. Thomson, *Two-Nased Catenaries and their application to the design of segmental arches* (Trans. R. Irish. Acad. XXIX, Part. 3, 1888).

wo p und q beliebige Konstanten sind. Die durch (15) dargestellten Kurven finden praktische Anwendung und wurden von Heinzerling[1]) Klinoiden genannt, der sie in Kataklinoiden und Anaklinoiden unterschied. Zu ihnen gehören — außer der logarithmischen Kurve (für $q = 0$) — die mit der Gleichung

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} \pm e^{-\frac{x}{c}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

die als Menoklinoide bezw. Trepsiklinoide bezeichnet wurden[2]), erstere unterscheidet sich nicht von der Gewölbelinie (s. oben).

236. Ähnlich dem Problem, das durch die Kettenlinie gelöst wird, ist folgendes: „Die Gestalt aufzufinden, die eine schwere völlig biegsame Kette annimmt, wenn ihre Dicke proportional mit der Spannung sich verändert.“ Eine solche Kette hat offenbar in allen ihren Punkten dieselbe Zugfestigkeit, bietet also überall dieselbe Wahrscheinlichkeit des Zerreißens. Die von ihr angenommene Gestalt heißt nach Davies Gilbert[3]) die Kettenlinie gleichen Widerstandes und wird, wie Coriolis[4]) gezeigt hat, in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$e^{\frac{y}{a}} \cos\frac{x}{a} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

dargestellt.[5]) Die Kurve geht durch den Anfangspunkt und berührt daselbst die x-Achse. Infolge der Periodizität der Cosinus-Funktion besteht sie aus unendlich vielen einander gleich Zügen, deren ersten man erhält, indem man x von 0 bis 2π variieren läßt; die Kurve ist symmetrisch in bezug auf die Gerade $x = 2k\pi a$, wo k eine ganze Zahl bedeutet.[6])

---

1) *Zeitschrift für Bauwesen,* 1869 u. 1872.

2) G. Emery, *Sulla condizione di scambievolezza e sui casi d'identità fra curve rappresentanti distribuzione continua di forze parallele e curve funiculari corrispondenti, con particolare disquisizione sulle clinoidi* (Atti Acc. Torino, XXII, 1886—87).

3) Phil. Trans. R. Soc., London 1826, Part. III, S. 202.

4) *Note sur la chaînette d'égale résistance* (Liouvilles Journ. I, 1836); vgl. Schell a. a. O. II, S. 102.

5) Sechs Jahre früher als Coriolis hatten ganz andere Betrachtungen Gudermann zu der Kurve geführt, welche die Gl. (17) hat, dieser bezeichnete sie mit dem Namen Longitudinale; s. die § 82—88 der vorhin citierten Abh. Vgl. auch Bobillier, *Ann. de Math.* XVII, 1826. Man verdankt Allégret (Ann. Ec. norm. sup., 2e Sér., II, 1873, S. 157) die Bemerkung, daß derselben Kurve ($a = -1$ vorausgesetzt) von Legendre begegnet wurde (*Traité des fonctions elliptiques*, Bd. I. S. 40) unter denjenigen Kurven, deren Bogen durch Logarithmen ausdrückbar sind.

6) Schreibt man die Gl. (17) in der Form $y = -a \log\cos\frac{x}{a}$, so sieht man, daß wenn $a = 1$ ist, die Kettenlinie gleichen Widerstandes eine Sumnersche Linie vom dritten Typus (s. Nr. 229) ist.

Ist τ der Winkel der Tangente mit der x-Achse, so folgt auch Gleichung (17)

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{x}{a},$$

und daher
$$\tau = \frac{x}{a}. \qquad (18)$$

Die Drehung der Tangente ist also proportional der Abszisse, und alle Punkte mit der Abszisse $x = k\pi a$ sind Kulminationspunkte.

Ferner ist
$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \frac{x}{a}},$$

demnach, wenn die Bogen vom Koordinatenanfang an gerechnet werden

$$s = a \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2a} \right). \qquad (19)$$

Außerdem findet man leicht als Ausdruck für den Krümmungsradius

$$R = \frac{a}{\cos \frac{x}{a}}. \qquad (20)$$

Kombinieren wir dies mit (18), so erhalten wir $R \cdot \cos \tau = a$, was besagt: **Bei der Kettenlinie gleichen Widerstandes ist die Projektion des Krümmungsradius auf die Normale im Anfangspunkte konstant;** daraus ergibt sich eine leichte Konstruktion des Krümmungszentrums. Die Gleichung (19) liefert ferner

$$e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} = \frac{2}{\cos \frac{x}{a}},$$

daher ist wegen Gleichung (20)

$$R = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right),[1] \qquad (21)$$

oder, wenn man lieber will,

$$R = a \operatorname{Cos} \frac{s}{a}, \qquad (21')$$

welches die natürliche Gleichung der Kettenlinie gleichen Widerstandes ist; sie zeigt eine evidente Analogie mit der kartesischen Gleichung der gewöhnlichen Kettenlinie; daraus läßt sich dann ableiten: **Wenn eine Kettenlinie gleichen Widerstandes auf einer Geraden rollt, so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die sukzessiven Berührungspunkte eine gemeine Kettenlinie.**

Die Betrachtung der Gleichung (21) führt natürlich auch zu den allgemeineren, durch die Gleichung

---

1) G. M. Minchin, *Treatise on Statics* (Oxford, 1872).

$$R = \frac{a}{2k}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

dargestellten Kurven, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.[1]) Sie erfreuen sich ähnlicher geometrischen Eigenschaften, wie die Kettenlinien gleichen Widerstandes. Um dies zu zeigen, wollen wir mit ω den Winkel der Tangente mit einer festen Geraden bezeichnen; dann haben wir $R = \frac{ds}{d\omega}$, und daher, wenn wir $s = f(\omega)$ setzen, so wird $R = f'(\omega)$ und die Gleichung (22) wird zu

$$f'(\omega) = \frac{a}{2k}\left(e^{\frac{f}{a}} + e^{-\frac{f}{a}}\right),$$

daher ist

$$\frac{\omega}{2k} = \int \frac{d\frac{f}{a}}{e^{\frac{f}{a}} + e^{-\frac{f}{a}}}.$$

Um diese Integration auszuführen, setzen wir $\frac{f}{a} = ix$ und erhalten

$$\frac{\omega}{2k} = i\int \frac{dx}{\cos x} = i \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$$

oder

$$\sin\frac{\omega}{k} = \frac{e^{\frac{2f}{a}} - 1}{e^{\frac{2f}{a}} + 1},$$

daher ist $f(\omega)$ oder

$$s = a \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2k}\right).$$

Zufolgedessen ist

$$R = \frac{a}{k}\,\frac{1}{\cos\frac{\omega}{k}},$$

welche Relationen die vorigen (19) und (20) als Spezialfälle umfassen. — Die kartesischen Koordinaten in Funktionen von ω entwickelt ergeben sich als

$$x = \frac{a}{k}\int \frac{\cos\omega \cdot d\omega}{\cos\frac{\omega}{k}}, \qquad x = \frac{a}{k}\int \frac{\sin\omega \cdot d\omega}{\cos\frac{\omega}{k}},$$

und diese Integrale können nach einem bekannten Verfahren (Bd. I, S. 156) in endlicher Form ausgedrückt werden, wenn k eine rationale Zahl ist.

---

1) Cifarelli, *Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di eguale resistenza* (Giorn. di Matem. XXXVI, 1898).

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Elastizitätskurven, Laufmusterkurven. Die parazentrische Isochrone und die Meridiankurve des Körpers vom kleinsten Widerstande.

237. Wenn ein geradliniger, gleichförmiger und elastischer Stab auf zwei geraden, nicht elastischen in derselben Horizontale liegenden Strecken aufliegt, und auf ihn bestimmte Kräfte einwirken, so nimmt er eine bestimmte Gleichgewichtsform an, welche man die Elastizitätskurve nennt. Diese Kurve wurde von Galilei mit Unrecht für eine Parabel gehalten; Jacob Bernoulli aber zeigte, daß diese Identifizierung irrig sei, und gelangte zu einer geometrischen Charakterisierung der fraglichen Kurve. Er fand außerdem, daß diese Kurve nur das Profil der Gestalt sei, die eine vollkommen biegsame Fläche, z. B. ein Tuch annimmt, wenn es, an zwei Seiten horizontal befestigt, durch eine schwere Flüssigkeit belastet wird, daher der Name Muldenkurve (Lintearia), den die Elastizitätskurve erhielt[1]), und der mehrfach noch im Gebrauch ist. Später beschäftigte sich auch Johann Bernoulli mit dieser Kurve[2]) und Daniel B. fand, daß die Kurve der Bedingung genüge, daß $\int \frac{ds}{R^2}$ ein Minimum werde, wenn s wie gewöhnlich den Bogen, R den Krümmungsradius bedeutet.[3]) Diese Beobachtung veranlaßte Euler „die Kurven aufzusuchen, die durch zwei gegebene Punkte gehend und daselbst zwei gegebene Geraden berührend, $\int \frac{ds}{R^2}$ zu einem Minimum machen". Vollständig gelöst findet sich diese Aufgabe in dem berühmten Werke *Methodus inveniendi lineas curvas maxima minimave proprietate gaudentes* (Lausannae et Genevae 1744), dessen Appendix I der Klassifikation der Elastizitätskurven in neun Typen gewidmet ist (und außerdem vielmehr enthält). Einige Formen sind auf Taf. IV durch die Figuren

1) S. die wichtige Abhandlung *Curvatura laminae elasticae. Ejus identitatem cum curvatura lintei a pondero inclusi fluidi expanso* (Acta Erud. Juni 1694; *Jac. Bernoulli Opera,* S. 639); außerdem die *Explicationes, annotationes et additiones* (Acta Erud. Dezember 1695; *Opera,* S. 663); schließlich die Arbeit *Véritable hypothèse de la resistance des solides avec la démonstration de la courbure des corps qui font les ressorts* (Mém. de Paris, MDCCV; *Opera,* S. 976).

2) *Solutio problematis curvaturae laminae elasticae a pondere appenso curvatae* (*Joh. Bernoulli Opera,* IV, S. 232). Vgl.: Lacroix, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* II. (Paris, 1798) S. 713—714 und Caluso, *De la courbe elastique* (Mem. Acad. Sciences Turin 1805—1808).

3) Briefe an Euler vom 20. Oktober 1742 und 4. September 1743 veröffentlicht in N. Fuß, *Correspondence math. et phys.* II (St. Pétersbourg, 1843) S. 507 und 533.

39, 40, 41 wiedergegeben. Ist aber der elastische Streifen geschlossen, so erhält man im einfachsten Falle einen Kreis, wird er einmal tordiert, so erhält er die Gestalt der Fig. 42. Derselbe berühmte Geometer hat ferner bemerkt, daß von allen ebenen Kurven, die denselben Umfang haben und dieselbe Fläche einschließen, die Elastizitätskurve diejenige ist, welche durch Rotation um eine in ihrer Ebene liegende Gerade ein Maximum oder Minimum des Volumens erzeugt.

Durch Betrachtungen aus der Mechanik[1]), die unserem Thema fern liegen, läßt sich zeigen: **Bei der Elastizitätskurve ist die Krümmung proportional der Differenz zwischen einer Konstanten und der Abszisse;** ihre Differentialgleichung ist demnach von folgender Gestalt

$$c^2 \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = a - x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese ist zunächst einer ersten Integration fähig, durch welche man erhält

$$2\,c^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 2ax - x^2,$$

vorausgesetzt, daß für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ sei. Schreiben wir nun wie folgt

$$dy = \frac{2ax - x^2}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}} \cdot dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so sehen wir, daß die Integration i. a. nicht weiter ausführbar ist, es sei denn, daß wir elliptische Funktionen anwenden, und diese Tatsache wurde sowohl von Jacob Bernoulli als auch von Maclaurin[2]) bemerkt. Dennoch lassen die Gleichungen (1) und (2) verschiedene Schlüsse zu: die (2) zeigt nämlich, daß die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) lautet

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{2ax - x^2}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

woraus hervorgeht: **Die Berührungspunkte der Tangenten, von einem beliebigen Punkte an die Elastizitätskurve gezogen, liegen auf einer Kurve sechster Ordnung, die jenen Punkt als Doppelpunkt hat;** daher ist jede derartige Kurve eine panalgebraische, die einem System

---

1) S. z. B. Poisson, *Traité de mécanique* I. (2. Aufl. Paris, 1833) S. 598.

2) *Treatise on Fluxions* II (Edinburgh, 1742) S. 744; *Traité des fluxions*, trad. Pézenas II (Paris, 1749) S. 313.

mit den **Charakteristiken** $\mu = 2$, $\nu = 4$ **angehört.** Die Gleichungen (1) und (2) liefern ferner

$$s = \int \frac{2c^2 \cdot dx}{\sqrt{4c^4 - (ax - x^2)^2}}, \qquad R = \frac{c^2}{a - x}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wird x eliminiert, so ist

$$s = \int \frac{2c^4 \cdot dR}{\sqrt{4c^4 R^4 - (a^2 R^2 - c^4)^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

welche die natürliche Gleichung der Kurve ist. In dem Spezialfalle $a = 0$ wird diese zu

$$s = 2 \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\frac{c}{\sqrt{2}}}\right)^4 - 1}},$$

und stellt daher (vgl. Nr. **216**) eine Ribaucoursche Kurve dar. Einen anderen bemerkenswerten Spezialfall erhält man aus der Annahme, daß zwischen den Konstanten a und c die Beziehung $a^4 = 4c^4$ bestehe; dann gibt die Gleichung (2)

$$dy = \frac{2ax - x^2}{(x - a)\sqrt{a^2 + 2ax - x^2}} \cdot dx,$$

daher kann y durch elementare Funktionen von x ausgedrückt werden. In dem allgemeinen Falle aber liefert uns die Gleichung (2) y in elliptischen Funktionen; da nun die Resultate ein verschiedenes Aussehen erhalten, je nach der relativen Größe von a und c, so erhält man dementsprechend auch verschiedene Formen der Elastizitätskurve.[1])

Die Elastizitätskurven liefern ein typisches Beispiel für die sogenannten **Laufmusterkurven,** das sind solche Kurven, bei denen sich ein und dieselbe Kurvenform unendlich oft wiederholt, die also aus unendlich vielen kongruenten Zügen bestehen. Soll die Kongruenz bestehen bleiben, von welchem Punkte aus man auch den Zug rechnet, so müssen die entsprechenden Punkte auf parallelen Geraden oder konzentrischen Kreisen liegen. Beispiele sind uns schon früher begegnet bei den trigonometrischen Linien und den Zykloiden. Auf eine höchst einfache Darstellung von Laufmusterkurven (von ihm Running-pattern curves genannt) stieß W. Whewell, indem er zur Darstellung von Kurven ein natürliches System benutzte, in welchem die Länge s des Kurvenbogens und die Drehung φ der Tangente gegen die Anfangslage als Koordinaten dienen.[2]) Dann werden Kurven von der Gestalt der Fig. 39, a, b, d (Taf. IV) durch die einfachen Gleichungen

---

1) Schell, *Theorie der Bewegungen und der Kräfte* II. (2. Aufl. Leipzig, 1880) S. 119—126; Greenhill, *Applications of elliptic functions* (London, 1892) S. 87—89.

2) A. Walter, *William Whewells Abhandlung zur natürlichen Geometrie der Kurven* (Graz, 1907).

$$\varphi = \sin s, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \sin s, \quad \varphi = \pi \sin s$$

dargestellt, während Fig. 40 Taf. IV die Gleichung hat:

$$\varphi = 2\pi \sin s.$$

Sollen die aufeinanderfolgenden Kurvenzüge einander bloß ähnlich sein, so erhält man „abnehmende" Laufmusterkurven. Beispiele bieten die Zentralprojektionen der Schraubenlinie (Taf. IV, Fig. 43) sowie die Kurve

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \sin s^2 \alpha,$$

die durch Fig. 44 auf Taf. IV wiedergegeben wird. Benutzen wir als Koordinaten den Krümmungsradius R und den Bogen s, so stellen

$$R = a \cdot \cos \frac{s}{r} \quad \text{und} \quad R = a \cdot \sec \frac{s}{r}$$

interessante Laufmusterkurven dar, deren Gestalt bei Variation der Konstanten a und r mannigfach wechselt; die erstere[1]) hat sogar unendlich viele asymptotische Punkte (vgl. S. 2).

238. Eine andere ältere Aufgabe, die ebenfalls zu elliptischen Funktionen führt, wurde im Jahre 1687 von Leibniz gestellt: „die Kurve aufzusuchen, längs derer sich ein aus einer gegebenen Höhe fallender, schwerer Punkt bewegt, indem er sich zugleich einem festen Punkte nähert oder sich von ihm entfernt, derart, daß sein Abstand von diesem der Zeit proportional sei." Die Kurve wurde von Leibniz selbst die parazentrische Isochrone genannt[2]) und von Leibniz[3]) und den beiden Brüdern Jacob[4]) und Johann[5]) Bernoulli bestimmt. Wenn sie eben ist, so wird sie analytisch durch die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = a \frac{dy}{\sqrt{a^2 y - y^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

bestimmt, woraus sich leicht ableiten läßt, daß sie einem Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 3$ angehört und daß ihre Tangenten, die mit der Abszissenachse den Winkel α bilden, ihre Berührungspunkte auf der kubischen Parabel haben, die folgende Gleichung hat $y^3 = a^2(y - x \operatorname{tg}^2 \alpha)$.

Eine methodische Bearbeitung der parazentrischen Isochrone steht, wenigstens soweit wir feststellen konnten, noch aus; wir beschränken

---

1) S. die Dissert. von E. Stübler (Stuttgart, 1906).

2) Brief von Leibniz an Huygens vom 1./11. Okt. 1693 (*Leibniz*, ed. Gerhardt, II, S. 164).

3) *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica* (Acta Erud. 1694; *Leibniz*, ed. Gerhardt, V, S. 309).

4) Acta Erud. Juni u. Sept. 1694 (*Jac. Bernoulli Opera* I, S. 601—612).

5) Acta Erud. Okt. 1694 (*Joh. Bernoulli Opera* I, S. 119—122). *Lectiones mathematicae* XXIV. (*Opera* III, S. 486).

uns daher auf die Bemerkung, daß, wenn man mit dt den gemeinsamen Wert der beiden Seiten der Gleichung (6) bezeichnet und Integrationskonstanten in geeigneter Weise wählt, man

$$x = \frac{t^2}{4}, \quad y = \wp\left(\frac{t}{a}\right), \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

und damit eine elegante parametrische Darstellung der Kurve erhält.

Zu einer anderen Kurve führt die Lösung eines der ältesten Probleme aus der Variationsrechnung; es lautet: **Diejenige ebene Kurve zu finden, die durch zwei gegebene Punkte geht und durch Rotation um eine in ihrer Ebene gegebene Achse denjenigen Körper erzeugt, der bei der Bewegung in einer Flüssigkeit in der Richtung jener Achse den geringsten Widerstand erleidet.** Newton behauptet in seinen *Principia* (Lib. II, Sect. VII, Prop. 34), daß die Differentialgleichung der dies Problem lösenden Kurve folgende sei:

$$y = a\frac{(1+y'^2)^2}{y'^3}; \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

mit Hilfe der Variationsrechnung ist es leicht, diese zu verifizieren, wenn man beachtet, daß bei dieser Kurve $\int \frac{y \cdot dy^3}{dx^2 + dy^2}$ zu einem Minimum werden muß. Die Gleichung (8) zeigt auch, daß die Kurve einem System mit den Charakteristiken $\mu = 4$, $\nu = 1$ angehört, ebenfalls führt sie zu einer analytischen Darstellung der Kurve. Da nämlich $y' = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man $dx = \frac{dy}{y'}$, daher durch teilweise Integration

$$x = \frac{y}{y'} + \int \frac{y \cdot dy'}{y'^2}.$$

Setzen wir für y seinen Wert aus (8), so folgt

$$x = a\frac{(1+y'^2)^2}{y'^4} + a\int \frac{(1+y'^2)^2}{y'^5}\,dy,$$

oder

$$x = a\left(\frac{3}{4y'^4} + \frac{1}{y'^2} + \log y'\right) + c. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Diese Gleichungen im Verein mit (8) stellen, da sie x und y in Funktionen von y' liefern, welches man als Parameter betrachten kann, die Kurve dar.[1]) Sie hat den Punkt, für welchen $y' = \sqrt{3}$ ist, als Spitze.

Nach Newton haben sich mit dem Probleme des Körpers vom geringsten Widerstande der Marquise de l'Hôpital[2]), Johann Bernoulli[3]), Silvabella[4]) und Legendre[5]) beschäftigt; der letztere bemerkte, daß für die erhaltene Kurve die beiden durch

1) Vgl. Lacroix, a. O. II, S. 698—700.

2) Acta Erud. August 1699. 3) Das. November 1699.

4) *Du solide de la moindre résistence* (Mém. pres. par divers sav., III, Paris 1760).

5) *Sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations* (Mém. de Paris, 1786) § VI.

$$y^4 = \frac{64}{27} a x^3, \qquad x - c = a \log \frac{y}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dargestellten Kurven krummlinige Asymptoten seien.[1])

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Die Herpolhodie, insbesondere die Poinsotsche Spirale.

239. Wie bekannt ist Poinsot in seiner *Théorie nouvelle de la rotation des corps*[2]) dazu gelangt, die Bewegung eines festen Körpers im Raume durch das Rollen eines Ellipsoides mit festem Zentrum auf einer Ebene darzustellen. Bei diesem Rollen beschreibt der Berührungspunkt sowohl auf dem Ellipsoide als auch auf der Ebene eine gewisse Kurve; beiden gab er den Namen Polhodien (von πόλος Pol, und ὁδὸς Weg), die erstere die „relative", die zweite die „absolute", indem er hinzufügte, daß, wenn man an die Gestalt der Kurve erinnern wollte, man die ebene Kurve Herpolhodie (von ἕρπω krieche) nennen könne, indem man für die räumliche Kurve den Namen Polhodie beibehielte. Diese Namen sind auch jetzt noch im Gebrauch.

Wenn a, b, c die Halbachsen des Ellipsoides sind, h der Abstand seines Zentrums von der betrachteten Ebene, und man setzt

$$\alpha^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2c^2}{h^2}, \qquad \beta^2 = c^2 + a^2 - \frac{c^2a^2}{h^2}, \qquad \gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{h^2},$$

$$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad Q = \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2, \quad R = \alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

$$\varDelta = h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R,$$

und bezeichnet außerdem mit $\varDelta'$ und $\varDelta''$ die erste und zweite Ableitung von $\varDelta$ nach h, so kann die Differenzialgleichung der Herpolhodie geschrieben werden als

$$d\omega = \frac{d\varrho}{i\varrho} \frac{h\varrho^2 + \sqrt{\varDelta}}{\sqrt{\varrho^6 + \varDelta''\varrho^4 + \varDelta'\varrho^2 + \varDelta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder auch, wenn $\varrho^2 = v$ gesetzt wird,

$$d\omega = \frac{dv}{2iv} \frac{hv + \sqrt{\varDelta}}{\sqrt{v^3 + \varDelta'' v^2 + \varDelta' v + \varDelta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Hierin sind allerdings die Variabelen getrennt, aber um das Integral zu erhalten, müssen im allgemeinen elliptische Funktionen zur An-

---

1) Bezüglich weiterer Einzelheiten sehe man F. August, *Über die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes* (Crelle's Journ. CIII, 1888) und V. Armanini, *Sulla superficie di minima resistenza* (Annali di Matem. 3. Ser. IV, 1900).

2) Liouvilles Journ. XVI, 1851.

wendung kommen.[1]) Um die Kurve mechanisch zeichnen zu können, haben G. Darboux und G. Königs einen Herpolhodographen konstruiert.[2]) Ein Beispiel des Aussehens der Kurve zeigt die Fig. 55 auf Taf. V.

Es gibt jedoch einen Fall, in welchem die Integration elementar ausgeführt werden kann, nämlich wenn $h = b$. In diesem Falle wird die Gleichung (1)

$$d\omega = b \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{\beta^2 - b^2 - \varrho^2}}.$$

Wird zur Abkürzung $\sqrt{\beta^2 - b^2} = n^2$ gesetzt, und wird alsdann integriert, so hat man

$$\omega = \frac{b}{n} \log \frac{\varrho}{n + \sqrt{n^2 - \varrho^2}},$$

unter der Voraussetzung, daß für $\varrho = n$; $\omega = 0$ wird. Schreiben wir diese Gleichung auf die beiden folgenden Weisen:

$$e^{\frac{n\omega}{b}} = \frac{\varrho}{n + \sqrt{n^2 - \varrho^2}}, \qquad e^{-\frac{n\omega}{b}} = \frac{\varrho}{n - \sqrt{n^2 - \varrho^2}},$$

so folgt hieraus

$$e^{\frac{n\omega}{b}} + e^{-\frac{n\omega}{b}} = \frac{2n}{\varrho},$$

daher ist

$$\varrho \frac{e^{\frac{n\omega}{b}} + e^{-\frac{n\omega}{b}}}{2} = n, \qquad \qquad (2)$$

oder

$$\varrho \operatorname{Cos} \frac{n\omega}{b} = n \qquad \qquad (2')$$

Der hierdurch dargestellten Kurve (die Poinsot[3]) als eine doppelte Spirale auffaßt) hat man den Namen die Poinsotsche Spirale gegeben. Beachten wir, daß zufolge von (2')

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = -\frac{n^2}{b} \frac{\operatorname{Sin} \frac{n\omega}{b}}{\operatorname{Cos} \frac{n\omega}{b}},$$

so wird die Subnormale und die Subtangente wiedergegeben durch

$$S_n = -\frac{\varrho^2}{b} \operatorname{Sin} \frac{n\omega}{b}, \qquad S_t = -b : \operatorname{Sin} \frac{n\omega}{b},$$

---

1) Die Singularitäten der Herpolhodie (insbesondere, daß sie, entgegengesetzt der Meinung Poinsots, ohne Wendepunkte und Spitzen sei) wurden von W. Hess untersucht (*Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabelen Ebene,* Diss. München, 1880); ferner von de Sparre (C. R. XCIX, 1884), Mannheim (Das. C, 1885), Saint-Germain (Das.), Franke (Das.) und Résal (Journ. Ec. polyt. LV. Heft, 1889).

2) Comptes rend. Juli 1889. Der Apparat wird von der S. 101 in Note 2) angeführten Firma hergestellt.

3) Liouvilles Journ. XVI, 1851, S. 301.

daher besteht die Beziehung $S_n : S_t = \frac{\varrho^2}{b^2}$, nicht aber die andere $S_n = S_t = -\varrho$, wie vermutet worden war.[1])

Das Lotbild einer Kugelloxodrome auf die Äquatorebene ist eine Poinsotsche Spirale.[2]) Die Loxodrome hat nämlich die Gleichung:

$$k\lambda = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi, \quad \text{oder} \quad e^{k\lambda} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi,$$

wenn λ die Länge und ψ den Abstand eines Punktes vom Pole bedeutet. Projiziert man diesen Punkt auf die Äquatorebene, so sind seine Polarkoordinaten $\omega = \lambda$, und $\varrho = r \cdot \sin\psi$, wenn r der Kugelradius ist. Nun ist aber $\operatorname{tg}\psi = \frac{2e^{k\lambda}}{1-e^{2k\lambda}}$, folglich $\sin\psi = \frac{2e^{k\lambda}}{1+e^{2k\lambda}}$; also wird $\varrho = \frac{2r}{e^{k\lambda}+e^{-k\lambda}} = \frac{2r}{\mathfrak{Cos}\, k\omega}$, welche Gleichung mit (2′) übereinstimmt für $\frac{n}{b} = k$, $n = 2r$.

Führt man auf die Poinsotsche Spirale die Transformation durch reziproke Radien aus mit dem Pole als Zentrum, so bekommt man eine Kurve, deren Gleichung von folgendem Typus ist

$$\varrho = b\, \mathfrak{Cos}\, \frac{\omega}{a},$$

auf welche Joh. Bernoulli bei einer durch König gestellten physikalisch-mathematischen Frage stieß[3].) In ihrer analytischen Darstellung bietet sie eine Ähnlichkeit mit einer, der man bei einigen hydrodynamischen Problemen begegnet, nämlich der Kurve

$$y = \frac{4a}{\left(e^{\frac{x}{2b}} + e^{-\frac{x}{2b}}\right)^2} = \frac{a}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{x}{2b}},$$

welche den Namen einsame Welle trägt.[4])

---

1) A. Cabreira, *Sur la géométrie des courbes transcendentes, traduit du Portugais* (Lisbonne, 1896) S. 32—33.

2) H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig, 1908). S. 264. F. Gomes Teixeira, *Obra sobre mathematica* V (Coimbra, 1909), S. 354.

3) *De curva quam describit corpus inclusus in tubo circulante (Joh. Bernoulli Opera* IV, S. 248, 252). Vgl. auch den Anhang eines von Euler an Johann Bernoulli gerichteten Briefes vom 27. Aug. 1742, der im II. Bande der *Corréspondance mathém. et phys. de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle* (St. Pétersbourg, 1843) S. 79—81 steht.

4) Vgl. Lamb, *Hydrodinamics* III ed. (Cambridge, 1906) S. 400.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Andere mathematisch-physikalische Kurven.

240. Läßt man zwischen zwei Punkten M_1 und M_2 einer ebenen Kurve einen elektrischen Strom von der Stärke 1 fließen, so übt dieser auf einen in der Ebene der Kurve gelegenen Punkt O, in welchem sich die Einheit der magnetischen Masse befindet, eine Kraft aus, deren Richtung normal zur Ebene des Stromes ist, und deren Größe durch $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{d\omega}{\varrho}$ ausgedrückt wird, wo ϱ, ω gewöhnliche Polarkoordinaten mit O als Pol sind. Es soll nun diejenige durch M_1 und M_2 gehende Kurve von gegebener Länge L gesucht werden, für welche diese Wirkung auf O ihren größten oder kleinsten Wert erhält. Zu dem Zwecke genügt es, das obige Integral zu einem Maximum oder Minimum werden zu lassen. Mit Anwendung der Variationsrechnung gelangt man zu folgender Differentialgleichung der gewünschten Kurve:

$$-\frac{k}{\varrho^3}=\frac{\varrho^2\frac{d^2\varrho}{d\omega}-2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2-\varrho^2}{\left[\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo k eine Konstante ist. Bezeichnen wir nun mit R den Krümmungsradius, so ist die linke Seite $=-\frac{1}{R}$, daher kann man schreiben

$$\varrho^3=kR; \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

folglich: **Die Kurve von größter oder kleinster elektromagnetischer Wirkung auf einen festen Punkt ist von der Beschaffenheit, daß der Krümmungsradius in jedem Punkte proportional dem Kubus des zugehörigen Radiusvektor ist, der von dem festen Punkte ausgeht.** Emil Weyr, der diesen eleganten Satz aufstellte, hat auch die Gleichung (1) integriert, wobei er als Resultat erhielt[1])

$$\omega=a+\int\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{\frac{\varrho^4}{b\varrho-k}-1}}; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

der Leser wird dieses verifizieren können, indem er die Formeln anwendet, die eine Kurve, die durch eine Relation zwischen dem Krümmungsradius und dem Radiusvektor dargestellt wird, bestimmen (vgl. Nr. **222**). Die so erhaltene Kurve kann die elektromagnetische Kurve Emil Weyr's genannt werden. — Sie hat aber nichts

1) *Über die Curve der größten und kleinsten elektromagnetischen Wirkung* (Prager Ber., 1869).

gemein mit den sogenannten magnetischen Kurven von Aoust, die in bipolaren Koordinaten folgende analytische Darstellung haben:

$$\int \frac{d\varrho_1}{\cos^m \varrho_1} + \int \frac{d\varrho_2}{\cos^m \varrho_2} = Const.,$$

wo m eine gegebene Zahl ist.[1]) — Bei dieser Gelegenheit mag auch hervorgehoben werden, daß man in der Optik bei einer speziellen Frage[2]) auf eine Kurve trifft, die in Polarkoordinaten durch die Gleichung dargestellt wird:

$$\sin(\varrho^2) \cdot \sin 2\omega = Const. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

241. Unter den verschiedenen Instrumenten, die zur mechanischen Ausführung der Quadratur erdacht sind, gibt es eines, das von Reitz[3]) angegeben wurde, und dessen Theorie H. Schubert[4]) untersucht hat. Hierbei trifft man als Fadenkurve eine neue Spirale, die analytisch durch folgende beiden Gleichungen dargestellt wird

$$\left.\begin{aligned} lx &= \frac{\cos\varphi\left\{\frac{3}{2}k\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}l^2\sqrt{\frac{3}{2}k}\right\}+\sin\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k}\cdot\varphi\left(l^2-\frac{3}{2}k\varphi\right)}{\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}k}} \\ ly &= \frac{\sin\varphi\left\{\frac{3}{2}k\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}l^2\sqrt{\frac{3}{2}k}\right\}+\cos\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k}\cdot\varphi\left(l^2-\frac{3}{2}k\varphi\right)}{\sqrt{\varphi}\sqrt{l^2-\frac{3}{2}k\varphi}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}k}} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wo l und k Konstanten von gewisser Bedeutung und φ ein Parameter ist. Schubert hat bemerkt, daß sie in Linienkoordinaten

1) *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris, 1873) S. 402—405. In demselben Werke (S. 455—407) werden die Gleichgewichtskurven betrachtet, die durch die Eigenschaft charakterisiert sind, daß ein Körper auf ihnen in jedem Punkte im Gleichgewicht bleibt, wenn auf ihn gegebene Kräfte wirken. — Es möge hier noch bemerkt werden, daß der Name magnetische Kurve (Kraftlinien) von Tait (*Eléments de la théorie des quaternions,* übersetzt von Glan, II, Paris, 1884, S. 234) dem Orte eines Punktes P gegeben wird, derart, daß wenn A_1, A_2 feste Punkte sind und O die Mitte der Strecke A_1A_2, $\cos OA_1P \mp \cos OA_2P = const.$ Diese Kurve ist algebraisch, da, wenn man A_1A_2 als x-Achse und O als Anfang nimmt, man die Gleichung

$$\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} + \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} = c$$

findet. Vgl. auch Holzmüller, *Ingenieurmathematik* II. (Leipzig, 1898) S. 121.

2) Spurge, *On the curve of constant intensity of homogenous polarised light seen in a unaxial crystal out at right angles to the optic axes* (Trans. phil. Soc. Cambridge, XV, 1884).

3) Reitz, *Mitteilungen über seinen verbesserten Seewegintegrator* (Hamb. Mitteil. 1879).

4) *Construktion der Fadencurve des verbesserten Seewegintegrators* (Das.); W. Dyck, *Katalog mathematischer Modelle* (München, 1892) S. 224.

einer einfacheren Darstellung fähig ist; sind nämlich ξ und η die Strecken, die eine beliebige Tangente von den Koordinatenachsen abschneidet, so erhält man

$$\frac{l}{\xi} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi} + \sin\varphi\sqrt{l^2 - \frac{3}{2}k\varphi}}{\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi}}, \quad \frac{l}{\eta} = \frac{\sin\varphi\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi} - \cos\varphi\sqrt{l^2 - \frac{3}{2}k\varphi}}{\sqrt{\frac{3}{2}k\varphi}}.$$

Schließlich hat Galton in seinen Untersuchungen über die Anwendung der Analysis auf die Evolutionstheorie gewisse spezielle Kurven betrachtet[1]), es sind die durch Gleichungen von folgendem Typus dargestellten:

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \cdot \left(1 + \frac{x}{a_2}\right)^{m_2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{p} \cdot e^{-\frac{x}{a}} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\theta, \qquad y = y_0 \cos^{2m}\theta \cdot e^{n\theta} \quad \ldots \quad (8)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\cdot dt, \quad y = y_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} \quad \ldots \quad (9)$$

Alle Kurven vom Typus (6) sind algebraisch, wenn keine der Zahlen m_1, m_2 irrational ist — es sind spezielle parabolische Kurven (vgl. Nr. **118**) — alle anderen sind transzendent. Die Kurven (9) wurden wegen ihrer Gestalt von Galton Ogive (Spitzbogen) genannt; ihre Wichtigkeit vom mathematischen Standpunkte aus ist nicht derart, daß wir länger bei ihnen verweilen.[2])

---

1) Genauere Notizen sowie eine reichhaltige Bibliographie des Gegenstandes finden sich in der neueren Arbeit von G. Duncker, *Die Methode der Variationsstatistik* (Leipzig, 1899).

2) Mit biologischen Fragen hängen auch die Kurven zusammen, welche C. E. Wasteels in seinen Aufsätzen *Over binomiale curven* und *Over verzamelcurven* (Handeling van het Vlaamisch natur- en geneeskundig congres 1899) untersuchte (s. auch S. 175).

VII. Abschnitt.

Abgeleitete Kurven.

Erstes Kapitel.

Die Methode der Koordinatenverwandlung.

242. Um unser ohnehin schon reichhaltiges Verzeichnis spezieller ebener Kurven noch um weitere neue Elemente zu vermehren, gibt es ein außerordentliches ergibiges Verfahren, welches darin besteht, daß man eine gegebene Kurve einer geometrischen ebenen Transformation unterwirft, ein Verfahren, das man bei seiner häufigen Anwendung und Wichtigkeit als charakteristisch für die moderne Geometrie ansehen kann. Die hierdurch erhaltenen Resultate haben im allgemeinen keine hervorragende Bedeutung und treten daher in unseren Darlegungen nur ausnahmsweise auf (s. z. B. Kap. 11 dieses Abschnittes), und zwar nur, wenn entweder die angewendeten Transformationen besondere Eigenschaften haben[1]), oder die erhaltenen Kurven von unbestreitbarer Wichtigkeit sind.

Man kennt aber noch andere Konstruktionen, durch die jedem Punkte (oder jeder Tangente) einer bestimmten Kurve ein gewisser Punkt (oder eine gewisse Gerade) zugeordnet wird. Wendet man eine solche auf alle Punkte einer Kurve Γ_0 an, so erhält man eine zweite Kurve Γ_1, die im allgemeinen von Γ_0 verschieden ist, und deren Bedeutung sehr häufig ein gewisses Licht auf die innere Natur der Kurve Γ_0 wirft. Das älteste Beispiel eines solchen Verfahrens, welches wir begegnet haben, ist bei Fermat zu finden, welcher die Kurve Γ_0 in eine andere Γ_1

---

1) Das gilt insbesondere, wenn jene Eigenschaften metrische sind und man die Tangente, Normale, Krümmungsradius oder Krümmungszentrum der transformierten Kurve konstruieren will. So führen z. B. die Transformationen

$$x' = x, \quad y' = \frac{py}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$x' = x, \quad y' = b + \frac{y(x-a)}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\beta)$$

die sich geometrisch in einfacher und eleganter Weise ausführen lassen, zu neuen Kurven, deren Tangenten man, welches auch die Ausgangskurve sein mag, durch ein bemerkenswertes von J. Massau entdecktes Verfahren erhalten kann (*Cours de mécanique de l'université de Gand.* III. lithogr. Aufl. 1891, S. 370 und 373).

transformierte, indem er dem Punkte Γ_0 (x, y) des ersten den Punkt Γ_1 (x, s) der zweiten entsprechen ließ, wo s der Bogen von Γ_0 ist, welcher in I_0 endet.[1]) Beispiele solcher Ableitungen bieten uns die kissoidalen (Nr. **29**), die strophoidalen (Nr **41**) und die konchoidalen Kurven (Nr. **69**); auch die in Nr. **31** und **45** erwähnten Methoden können hierher gerechnet werden. Auf die Kurve Γ_1 kann man alsdann wiederum dieselbe Konstruktion anwenden; man gelangt so zu einer Kurve Γ_2, die im allgemeinen von Γ_0 und Γ_1 verschieden sein wird. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir eine unbegrenzte, eventuell in sich zurücklaufende Reihe von Kurven $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$. Nicht genug damit: man kann andererseits auch eine Kurve Γ_{-1} aufsuchen, derart, daß, wenn man auf sie jene Konstruktion anwendet, man Γ_0 erhält; dann eine Kurve Γ_{-2}, die in derselben Weise zu Γ_{-1} führt, usw. Damit ist eine zweite unbegrenzte, eventuell in sich zurückkehrende Reihe von Kurven $\Gamma_0, \Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}, \ldots \Gamma_{-n} \ldots$ gegeben. Alle diese Kurven $\Gamma_{\pm n}$ heißen im allgemeinen die von Γ_0 abgeleiteten Kurven, und zwar positive oder negative, je nach dem Vorzeichen des Index. Ein höchst einfaches Beispiel, das wir hier jedoch nur flüchtig erwähnen wollen, besteht darin, daß man jedem Punkte einer Kurve den Endpunkt der zugehörigen Polarsubnormale entsprechen läßt. Für jede von diesen Ableitungskonstruktionen bietet sich nun die wichtige Frage dar, ob die entstehende Kurvenreihe unbegrenzt oder in sich zurücklaufend ist, und wenn das letztere nicht im allgemeinen der Fall ist, wie man die Kurve Γ_0 zu wählen hat, damit eine bestimmte abgeleitete $\Gamma_{\pm n}$ mit der Ausgangskurve zusammenfalle. Ein großer Teil der Ausführungen dieses Abschnittes wird den wichtigen Folgerungen gewidmet sein, die sich aus Betrachtungen obiger Art ergeben.[2])

Zuvor müssen wir jedoch auf ein, von dem soeben geschilderten ganz verschiedenes Verfahren, das wesentlich analytischer Natur ist, eingehen, das zur Entdeckung vieler neuen Kurven geführt hat und

1) Näheres hierüber in einem Aufsatze von G. Loria, *Bibl. math.* III. Reihe, VI, 1905, S. 353—356.

2) Aus unserer Betrachtung haben wir die Hessesche, Steinersche Kurve usw. ausgeschlossen, da ihre Untersuchung der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven angehört. Gleiches gilt für den Ort der Zentren der Kegelschnitte, die mit einer gegebenen Kurve eine Berührung fünfter Ordnung haben; es ist die sogenannte Abweichungs-(Aberrations-)Kurve. Wenn die gegebene Kurve algebraisch ist, so ist es auch die Abweichungskurve; ihre Charakteristiken wurden von W. Bouwmann in der Abh. *Die Plückerschen Zahlen der Abweichungskurve* (Math. Ann. XLIX, 1897) bestimmt. Es möge bemerkt werden, daß der Name Aberrationskurve in der Astronomie der scheinbaren Bahn eines festen Körpers gegeben wurde, der von einem nach bestimmten Gesetzen sich bewegenden Punkte beobachtet wird (Santini, *Elementi di astronomia* II, Padova 1830, S. 132; G. Sacchi, *Sulla geometria analitica delle linee piane,* Pavia 1854, S. 103).

noch führen kann: es ist die Methode der Koordinatenverwandlung. Diese besteht darin, daß wir die Funktion, durch welche die Koordinaten des Kurvenpunktes oder der Tangente miteinander verknüpft sind, beibehalten, dagegen die Koordinaten selbst durch die eines anderen, zu dem ersteren völlig heterogenen Koordinatensystems ersetzen.[1])

Als eine Anwendung dieser Methode können wir das unseren Lesern wohlbekannte Verfahren anführen, durch welches man, von einer Kurve als Ort von Punkten betrachtet, zu ihrer dualen, als Enveloppe von Geraden betrachteten, Kurve übergeht. Man wandelt also die Punktgleichung $f(x, y) = 0$ in die Liniengleichung

$$f(u, v) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

um, wo man die Linienkoordinaten u, v entweder als Plückersche Koordinaten, oder als Unverzagt-Schweringsche Linienkoordinaten[2]), die bekanntlich zu den kartesischen dual sind[3]), auffassen kann. Im Grunde genommen ist diese Koordinatenverwandlung nichts anderes, als die Anwendung des Dualitätsprinzips in der Ebene, und es würde somit ein leichtes sein, z. B. aus der bekannten Theorie der Kurven dritter Ordnung die Theorie der Kurven dritter Klasse herzuleiten. Allerdings erhält man für die abgeleitete Kurve nur die der ursprünglich entsprechenden, projektiven Eigenschaften; was aber die metrischen Eigenschaften (in der euklidischen Maßbestimmung) anlangt, so würde man diese im allgemeinen ganz von neuem zu entwickeln haben, da bis jetzt keine Methode bekannt ist (weil sie auch wahrscheinlich nicht existiert), diese aus denen des dualen Gebildes abzuleiten. — Die Einteilung der Kurven n^{ter} Klasse könnte in ähnlicher Weise, wie die der Kurven n^{ter} Ordnung nach ihren Plückerschen Charakteren erfolgen. Es möge jedoch hier noch ein anderes Einteilungsprinzip erwähnt werden, welches von H. M. Jeffery erdacht und ausführlich entwickelt ist: es beruht auf der Betrachtung der Zahl, Vielfachheit und Lage der (reellen) Brennpunkte (bekanntlich hat jede Kurve n^{ter} Klasse auch n Brenn-

1) Ersetzt man z. B. in der Ellipsengleichung

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{l^2} = 1$$

die Ordinate y durch den Radiusvektor $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, so erhält man eine Kurve 4ter Ordnung; ersetzt man aber x und y durch die bipolaren Koordinaten ϱ_1 und ϱ_2, so erhält man eine 8ter Ordnung. Auf solche Kurven traf K. Nitz in seiner Diss. *Anwendung der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal* (Königsberg, 1905).

2) K. Schwering, *Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten* (Leipzig, 1884).

3) Vgl.: F. Rudio, *Die Unverzagtschen Linienkoordinaten. Ein Beitrag zur Geschichte der analytischen Geometrie* (Abh. zur Gesch. der Math. IX, 1899).

punkte!). So kann eine Kurve dritter Klasse einen dreifachen Brennpunkt haben, oder einen doppelten und einen einfachen, oder, was der allgemeinste Fall ist, drei einfache Brennpunkte.[1]) Ähnlich sind unter den Kurven vierter Klasse diejenigen ausgezeichnet, die einen vierfachen Brennpunkt haben[2]); es folgen die mit einem dreifachen und einem einfachen, usw.[3]) In ähnlicher Weise könnte man die Untersuchung der Kurven vierter Klasse mit zwei Doppelbrennpunkten, mit einem Doppel- und zwei einfachen, und schließlich der mit vier einfachen Brennpunkten unternehmen; jedoch dürfte die Zahl der zu untersuchenden Fälle mehr als einen von der Untersuchung abschrecken, um so mehr, als nach den von Jeffery erhaltenen Resultaten zu urteilen, sie nicht sehr lohnend zu werden verspricht. — Nicht bloß auf die algebraischen, sondern auch auf die transzendenten Kurven kann man die dualistische Verwandlung anwenden und mit dem Studium der so erhaltenen neuen Kurven ein — soweit uns bekannt — noch völlig unerforschtes Gebiet betreten.

243. Eine zweite derartige Koordinatenwandlung, deren Grundgedanke von Varignon[4]) herrührt, liefert gleichfalls zahllose neue Kurven. Diesem Geometer folgend betrachten wir eine beliebige Kurve Γ, die erzeugende Kurve (courbe génératrice), die in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ dargestellt wird, sowie einen Kreis K mit dem Mittelpunkte O und dem Radius a, den Verwandlungskreis (cercle de révolution). Es sei PM (Tafel V, Fig. 51) die Ordinate eines beliebigen Punktes P von Γ, und sei MP' der Bogen eines Kreises um O mit dem Radius OM derart, daß, wenn A und L die Endpunkte der durch M und P' gezogenen Radien des Verwandlungskreises K sind, die Proportion besteht

$$2a\pi : \operatorname{arc} AL = 2\pi l : PM,$$

wo $2\pi l$ eine gegebene Länge bedeutet. Sind nun x und y die kar-

1) Jeffery, *On cubics of the third class with triple foci* (Quart. Journ. Mathem. XIV, 1876); *On plane cubics with a double and a single focus* (Das.); *On plane cubics of the third class with three single foci* (Das. XVI, 1879 und XVII, 1880); *On plane class with three single foci* (Rep. Brit. Assoc. 1879).

2) Jeffery, *On plane and spherical curves of the fourth classe with quadruple foci* (Rep. Brit. Assoc. 1880); *On plane curves of the fourth class with quadruple foci* (Quart Journ. Mathem. XVIII, 1882; daselbst ist der Name Stapes (Bügel) zur Bezeichnung eines Kurvenzweiges mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkte eingeführt); *On the stapete-points of class-quartics with quadruple foci* (Das.).

3) Jeffery, *On curves of the fourth class with a triple and a single focus* (Rep. Brit. Assoc. 1883; Quart. Journ. Mathem. XX, 1884).

4) S. die ausführliche Abh. *Nouvelle formation de spirales, beaucoup plus différentes entre elles de ce qu'on peut imaginer d'autres courbes quelconques à l'infini; avec les touchantes, les quadratures, les déroulements, et la longueur de quelques arcs de ces spirales, qu'on donne seulement ici pour exemple de cette formation générale* (Mém. de Paris, Année MDCCIV, Paris 1722).

tesischen Koordinaten für P, ϱ und ω die Polarkoordinaten von P', so wird die obige Proportion zu

$$2\pi a : a\omega = 2\pi l : y.$$

Daher bestehen zwischen den Koordinaten der beiden Punkte P und P' die Beziehungen

$$x = \varrho, \qquad y = l\omega,$$

in denen der Radius des Verwandlungskreises überhaupt nicht mehr auftritt. Infolgedessen wird, wenn der Punkt P die Kurve $\Gamma, f(x,y) = 0$, durchläuft, der Punkt P' die Kurve durchlaufen, deren Polargleichung lautet

$$f(\varrho, l\omega) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Damit ist eine einfache Methode gegeben, jeder durch eine kartesische Gleichung dargestellten Kurve eine andere in Polarkoordinaten nachzubilden. Da man auch $l = 1$ setzen kann, so **besteht das Verfahren in seiner einfachsten Form darin, in der Kurvengleichung die Koordinaten der einen Art mit denen der anderen zu vertauschen.** Wollen wir uns noch handgreiflicher ausdrücken, so können wir sagen: Man denke sich die eine Koordinatachse zu einem Kreise umgebogen, so daß die anderen Koordinaten auf ihr senkrecht stehen bleiben, also radial verlaufen. Bei diesem Verfahren kann man auch aus Eigenschaften der Originalkurve solche der abgeleiteten erhalten: Geht z. B. erstere durch den Koordinatenanfang, so wird letztere durch den Pol gehen; hat jene die y-Achse zur Asymptote, so hat diese den Pol als asymptotischen Punkt, usw. Wenn die ursprüngliche Kurve dagegen, statt durch eine Gleichung in endlichen Ausdrücken, durch eine Differentialgleichung bestimmt ist,

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots.) = 0,$$

so ist die transformierte Kurve eine Integralkurve mit der Differentialgleichung

$$F(\varrho, l\omega, d\varrho, l\,d\omega, d^2\varrho, l\,d^2\omega, \ldots.) = 0.$$

Was nun die Bezeichnung der neuen Kurven anbetrifft, so bemerkt Varignon: „Cette spirale s'appellera parabolique, hyperbolique, logarithmique, circulaire etc. selon que la courbe génératrice sera une parabole, une hyperbole, une logarithmique, une cercle etc.“ — Durch das obige Verfahren hat er nun folgende Resultate abgeleitet:

1. Aus den Parabeln $x^m = a^{m-1} \cdot y$ (Nr. **116**) die Fermatschen Spiralen (Nr. **185**).
2. Aus den Hyperbeln $x^m \cdot y = a^{m+1}$ (Nr. **120**) die hyperbolischen Spiralen $\varrho^m \omega = \frac{a^{m+1}}{l}$, deren einfachste (die dem Falle $m = 1$ entspricht) die gemeine hyperbolische Spirale (s. Nr. **191**) ist, die

kurz darauf (1710) von Johann Bernoulli unabhängig von Varignon entdeckt wurde.

3. Aus den Parabeln $(a+x)^m = p^{m-1}y$ entstehen die Spiralen $(a+\varrho)^m = p^{m-1}l\omega$, die für $m=1$ zu Archimedischen (Nr. **184**) und für $m=2$ zu den parabolischen Spiralen von Bernoulli (Nr. **189**) werden.
4. Aus dem Kreise $x^2+y^2=2rx$ die Spirale $\varrho^2+l^2\omega^2=2r\varrho$.
5. Aus der log. Kurve $x^{-h}=e^y$ (Nr. **224**) die log. Spirale $\varrho = e^{-\frac{l}{h}\omega}$ (Nr. **193**), von der Varignon als einer zu seiner Zeit sehr bekannten Kurve spricht.
6. Hingegen ergibt sich aus der logarithmischen Kurve $y^{-h}=e^x$ die Varignonsche logarithmische Spirale mit der Gleichung $l\omega = e^{-\frac{\varrho}{h}}$ [1]).

Wir können hier noch hinzufügen: Aus der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ wird die Spirale $\frac{\varrho^2}{a^2}+\frac{l^2\omega^2}{b^2}=1$, die je nach dem Werte von l ganz verschiedene Gestalt hat; für $l>\frac{b}{\pi}$ ist sie lemniskatenähnlich, für $l=\frac{b}{2\pi}$ ähnelt sie der auf Taf. XI (I. Bd.), Fig. 81 dargestellten Rhodonee usw.[2]) — Es sei bemerkt, daß T. Olivier[3]) geglaubt hat, daß sich aus den trigonometrischen Linien (S. 13) in ähnlicher Weise neue Spiralen ableiten ließen. Nun stellen aber $\varrho = a\cdot\sin\omega$, und $\varrho = a\cdot\cos\omega$ Kreise dar, $\varrho = a\cdot\operatorname{tg}\omega$, und $\varrho = a\cdot\operatorname{ctg}\omega$, sind schon bekannte Kurven 4. Ordnung (s. Bd. I, S. 196); $\varrho = a\cdot\sin\omega$, und $\varrho = a\cdot\operatorname{cosec}\omega$ sind Geraden, und $\varrho = a\cdot\sin\operatorname{vers.}\omega$ (oder $\varrho = a - a\cos\omega$) ist eine besondere Pascalsche Schnecke. Schließlich aus der Gewölbelinie $x = b\cdot\mathfrak{Cos}\frac{y}{c}$ (Nr. **236**) entsteht die Bernoullische Kurve $\varrho = b\,\mathfrak{Cos}\frac{l\omega}{c}$ (Nr. **239**). — Diese Beispiele ließen sich noch ins Unendliche vermehren; die angeführten dürften jedoch hinreichen, die Varignonsche Methode vollständig klar zu legen[4]).

---

1) Vgl. T. Olivier, *Cours de géométrie descriptive* (2. Aufl. Paris, 1854) S. 293.

2) Eine Bemerkung des Übersetzers F. Schütte.

3) O. a. *Cours de géom.* S. 293.

4) Am Schlusse seiner Abhandlung hat Varignon noch eine andere Methode der Kurvenverwandlung angegeben. Nachdem die obige Konstruktion (s. Taf. V, Fig. 51) ausgeführt ist, errichte man auf OP' die Senkrechte $P'P''$ gleich der Ordinate η der Kurve $F(x,\eta)=0$; der Ort der Punkte P'' wird die Transformierte Γ'' von Γ sein. Um deren Gleichung zu erhalten, bezeichnen wir die Polarkoordinaten von P'' mit ϱ', ω' und mit ψ den Winkel $P''OP'$; dann ist

$$\omega' = \omega + \psi = \omega + \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x} = \frac{y}{l} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x}, \quad \text{und } \varrho'^2 = x^2 + \eta^2;$$

Die Varignonsche Transformation läßt sich auch durch eine stereometrische Konstruktion ausführen, die hier mitgeteilt zu werden verdient. Betrachten wir die Schraubenfläche, die als Meridiankurve die in der xz-Ebene gelegene, durch $f(x, z) = 0$ dargestellte Kurve Γ hat, und h die reduzierte allen Schraubenlinien auf der Fläche gemeinsame Ganghöhe: dann wird diejenige unter ihnen, die durch den Punkt (x_1, z_1) der Meridiankurve geht, mit Benutzung eines Parameters u dargestellt durch die Gleichungen

$$x = x_1 \cdot \cos u, \qquad y = x_1 \cdot \sin u, \qquad z = z_1 + hu.$$

Eliminieren wir aus diesen und aus $f(x_1, z_1) = 0$ die x, z, u, so bekommen wir als Gleichung der Schraubenfläche, die Γ als Meridiankurve hat,

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\ z - h \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Der Schnitt Σ dieser Fläche mit der xy-Ebene, die eine beliebige zur Achse senkrechte Ebene darstellt, wird daher die Gleichung haben

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\ -h \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = 0,$$

oder wenn wir Polarkoordinaten ϱ und $-\omega$ einführen,

$$f(\varrho,\ h\omega) = 0.$$

Nun entstand die Kurve Σ offenbar aus Γ durch eine Varignonsche Transformation; um also Σ aus Γ zu erhalten, kann man auch die Schraubenfläche, die Γ zur Meridiankurve hat, mit einer zur Achse senkrechten Ebene schneiden.

Es sei zum Schluß bemerkt, daß die Varignonsche Transformation mit der folgenden

$$x = \varrho\omega, \quad y = \varrho$$

eine gewisse Analogie hat; diese wurde von R. de Sluse 1668 in seinem *Mesolabium*, und dann 1671 von Newton in seinem *Methodus fluxionum* (veröffentlicht durch Colson 1743) betrachtet[1]), ihre Bedeutung beruht auf dem Umstande, daß zufolge der Identität

$$\int x \cdot dy = \frac{\varrho^2\omega}{2} - \frac{1}{2}\int \varrho^2 \cdot d\omega$$

sie jede quadrierbare Kurve in eine andere solche verwandelt.

---

demnach ist die Gleichung von Γ'' nichts anderes als das Resultat der Elimination von x, y, η aus den vier Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, \eta) = 0, \qquad \omega' = \frac{y}{l} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{x}, \qquad \varrho'^2 = x^2 + \eta^2;$$

eine Elimination, die sich nur für besondere Funktionen f und F ausführen läßt.

1) Vgl. Intermédiaire XV, 1908, S. 219 und XVI, 1909, S. 158.

244. Mit den im Laufe der Zeit erfolgten Fortschritten der Wissenschaft wurde die Idee des Koordinatenwechsels auch auf andere Koordinatensysteme angewandt. Man geht von einer der Gleichungen $f(x, y) = 0$ oder $f(\varrho, \omega) = 0$ z. B. über zu

$$f(s, \varepsilon) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo s den von einem festen Punkte aus gemessenen Bogen, ε den Kontingenzwinkel im Endpunkte desselben bedeutet. Anwendungen hiervon finden sich an vielen Stellen der schon zitierten Werke von A. Peters und C. F. Krause; so gelangte der letztere Geometer zu zwei Parabolae originariae genannten Kurven; die eine ist die Klothoide, die, wie wir (Nr. **196**) gesehen haben, durch $s^2 = 2a\varepsilon$ dargestellt wird, die andere unterscheidet sich nicht von der gewöhnlichen Kreisevolvente (Nr. **210**); desgleichen gelangte er von der Hyperbel bzw. hyperbolischen Spirale zu der durch die Eigenschaft

$$s\varepsilon = a$$

charakterisierten Kurve: da bei dieser ε umgekehrt proportional zu s ist, so schlug Krause vor, sie curva reciproca oder besser curva antiloga[1]) zu nennen. Da nun $\varepsilon = \frac{a}{s}$, so ist $\frac{d\varepsilon}{ds} = -\frac{a}{s^2}$; nennen wir den Krümmungsradius R, so haben wir $\frac{1}{R} = \frac{d\varepsilon}{ds}$; folglich lautet die natürliche Gleichung der Antiloga

$$aR + s^2 = 0.$$

Wir wollen hinzufügen: wenn s_{-1} und s_{+1} die Bogen der Evolute und Evolvente der Antiloga sind, so ist, da im allgemeinen $s_{-1} = \frac{d\varepsilon}{ds}$ und $s_{+1} = \int \varepsilon \cdot ds$, hier

$$S_{-1} = \frac{a}{\varepsilon^2}, \quad S_{+1} = a \cdot \log \varepsilon;$$

da nun für alle drei Kurven der Kontingenzwinkel derselbe ist, so können jene Evolute und jene Evolvente dargestellt werden durch

$$S_{-1}\, \varepsilon^2 = a, \quad S_{+1} = a \log \varepsilon,$$

weshalb die letztere von Krause als spiralis logarithmica (seu logistica) angularis[2]) bezeichnet wird. — Andere Beispiele hatten wir in Nr. **237**.

Schließlich: Durchblättern wir die *Vorlesungen über natürliche Geometrie* von E. Cesàro, so läßt sich nicht verkennen, daß man zu vielen sehr interessanten Kurven gelangt, indem man eine natürliche Gleichung

$$f(R, s) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

1) *Novae theoriae linearum curvarum* etc. (Monachii, 1835) S. 88.

2) Daselbst. S. 96.

aufstellt, in welcher die Funktion f der kartesischen Gleichung einer bekannten Kurve nachgebildet ist. Die neue Kurve (4) ist, wie Mannheim[1]) bemerkt hat, der Ort des Krümmungszentrums für den jeweiligen Berührungspunkt, wenn die Kurve $f(x, y) = 0$ auf einer Geraden rollt; daher hat E. Wölffing[2]) sie die Mannheimsche Kurve der letzteren genannt. Ein Beispiel hatten wir auf S. 65.

245. Eine weitere Anwendung der „Methode der Koordinatenverwandlung" wurde von B. Tortolini[3]) und kurz darauf von M. Cantor[4]) gemacht, sie benutzten zur Bestimmung eines Kurvenpunktes die Abszisse x und den von einem festen Punkte an gerechneten Bogen s und leiteten somit aus der Kurve

$$F(x, y) = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = f(x)$$

in kartesischen Koordinaten die neue, der Relation

$$F(x, s) = 0 \quad . \quad . \quad (5) \qquad \text{oder} \qquad s = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

genügende Kurve ab. Es ist leicht aus (5′) die kartesische Gleichung der entsprechenden neuen Kurve zu gewinnen; differenzieren wir (5′), so erhalten wir

$$ds = f'(x) \cdot dx;$$

für ds setzen wir den Wert

$$dx^2 + dy^2 = f'^2(x) \cdot dx,$$

daher ist

$$y = \int \sqrt{f'^2(x) - 1} \cdot dx \qquad (6)$$

Die Bestimmung der kartesischen Gleichung der neuen Kurve erfordert also die Integration. Aus (6) folgt, daß die Gleichung der Tangente

$$\frac{Y - y}{X - x} = \sqrt{f'^2(x) - 1}$$

sein wird, weshalb die neue Kurve allemal eine panalgebraische ist, wenn $f(x)$ eine Funktion ist, deren Abgeleitete eine algebraische Funktion der Abszisse wird.

Die Bestimmung des Krümmungsradius R der neuen Kurve erfordert nur Differentiationen: wird zunächst die Identität $dx^2 + dy^2 = ds^2$ nach x differenziert, so bekommt man

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{d^2s}{dx^2},$$

und dann mit Benutzung der Gleichung (5′) und (6)

1) Liouvilles Journ. 2. Sér. IV, 1859.

2) Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 1899, S. 140.

3) *Mémoire sur quelques applications de la méthode inverse des tangentes* (Crelles Journ. XXVI, 1843).

4) *Über ein weniger gebräuchliches Koordinatensystem* (Diss. Frankfurt a. M., 1851).

$$\sqrt{f'^2(x)-1}\,\frac{d^2y}{dx^2}=f'(x)\cdot f''(x);$$

da nun
$$R=\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so folgt schließlich, daß
$$R=\frac{f'^2(x)\sqrt{f'^2(x)-1}}{f''(x)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Durch Elimination von x aus (5') und (7) würde man die natürliche Gleichung der Kurve erhalten.

Wenden wir diese Methode auf den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ an, so erhalten wir die Kurve $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{s^2}{b^2}=1$, in deren kartesischer Gleichung im allgemeinen elliptische Integrale auftreten. Aber auch ohne diese zu benutzen, kann man leicht, wenn das —Zeichen genommen wird, Eigenschaften der Kurve nachweisen. Da in diesem Falle

$$\frac{s^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1,$$

so wachsen s und x gleichzeitig ins Unendliche, daher erstreckt sich die Kurve bis zum unendlich fernen Punkte von Ox; aus obiger Gleichung folgt ferner

$$s-x=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-x,$$

daher ist

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-x\right)-\lim_{x=\infty}\left(\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}-1\right)=\frac{b-a}{a};$$

die Differenz zwischen der Kurvenlänge und der Asymptote ist also eine endliche Größe. — Im Falle $b=a$ läßt sich die Kurvengleichung in endlichen Ausdrücken erhalten. Setzt man nämlich

$$\frac{dx}{ds}=\sin\alpha, \qquad \frac{dy}{ds}=\cos\alpha,$$

so erhält man, weil $x^2-s^2=a^2$, und $\frac{dx}{ds}=\frac{s}{x}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ ist,

$$x=\frac{a}{\cos\alpha}, \qquad s=a\operatorname{tg}\alpha, \qquad dy=a\frac{d\alpha}{\cos\alpha}, \qquad y=a\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right);$$

die erste und letzte dieser Gleichungen liefern die parametrische Darstellung der transformierten Kurve; aus dieser leitet man ab, daß

$$\cos\alpha=\frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}, \qquad e^{\frac{y}{a}}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

durch Elimination von α bekommt man

$$e^{\frac{y}{a}}=\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a};$$

folglich ist

$$e^{-\frac{y}{a}} = \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

demnach

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right),$$

daher ist die transformierte Kurve eine Kettenlinie. Zu derselben Kurve gelangt man, wenn man in derselben Weise die Kurve $x = a \operatorname{Sin} \frac{y}{a}$ transformiert.

Um zu sehen, worin sich die logarithmische Kurve, dargestellt durch

$$s = a \cdot \log \frac{a}{x}.$$

verwandelt[1]), benutzen wir die Gleichung (7) und erhalten

$$R = a\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1},$$

welche, mit der vorigen Gleichung kombiniert, die natürliche Gleichung der transformierten Kurve liefert

$$R = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1},$$

die also (s. Nr. **231**) eine Traktrix ist.

246. Zu neueren und wichtigeren Resultaten gelangt man durch Anwendung des obigen Verwandlungsverfahrens auf die Parabeln

$$y^{m+n} = p^m x^n,$$

wo m und n als positiv und ganz angenommen werden sollen. Es führt zu Kurven, die sich der durch

$$s^{m+n} = p^m x^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ausgedrückten Eigenschaften erfreuen. Schreiben wir folgendermaßen

$$x = p^{-\frac{m}{n}} \cdot s^{\frac{m+n}{n}},$$

so sehen wir, daß die neuen Kurven dadurch charakterisiert sind, daß die Abszisse proportional einer Potenz des Bogens ist. Sie wurden zuerst von C. R. Fleischer[2]), dann von B. Tortolini und M. Cantor in den vorhin erwähnten Arbeiten und neuerdings von C. Nies[3]) und R. Müller[4]) untersucht. Zunächst wollen wir ihre natürliche Gleichung aufsuchen; da hier

1) Der allgemeinste Fall, in welchem $s = a \log \frac{x}{b}$, reduziert sich auf den obigen, wenn man den Anfangspunkt verlegt und die positive Richtung des Bogens ändert (vgl. die Note 7, S. 154).

2) *Von den Kurven, bei welchen* $s^{m+n} = p^n \cdot x^n$ *ist* (Progr. Grimma, 1849).

3) *Untersuchungen über Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abszisse proportional ist* (Progr. Darmstadt, 1887).

4) *Über die Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abszisse proportional ist* (Progr. Berlin, 1889); daselbst wird eine bemerkenswerte Anwendung der berühmten Funktion $\wp$ von Weierstraß gemacht.

$$f(x) = s = p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}},$$

so setzen wir der Kürze wegen

$$p^{\frac{m}{m+n}} = a, \qquad \frac{n}{m+n} = \mu.$$

Indem wir Gleichung (7) benutzen, erhalten wir nun

$$R = \frac{\mu}{\mu-1} a x^{\mu} \sqrt{\mu^2 a^2 x^{2(\mu-1)} - 1};$$

und da $s = a \cdot x^{\mu}$, so wird

$$R = \frac{\mu}{\mu-1} s \sqrt{\mu^2 a^2 \left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{2(\mu-1)}{\mu}} - 1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

welches die natürliche Gleichung der transformierten Kurve ist[1]). — Die Gleichung (6) liefert im vorliegenden Falle

$$y = \int dx \sqrt{\left(\frac{n}{m+n}\right)^2 p^{\frac{n}{m+n}} \cdot x^{-\frac{2m}{m+n}} - 1}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

daher hängt die Bestimmung der Kurvengleichung von der Integration eines binomischen Differentials ab. Nun ist dieses integrierbar, wenn die eine oder die andere der beiden Zahlen $\frac{m+n}{2m} = q$ oder $\frac{n}{2m} = r$ eine ganze Zahl ist. Wir können alsdann die Gl. (8) schreiben

$$s^{2q} = p x^{2q-1}, \quad \text{oder} \quad s^{2r+1} = p x^{2r},$$

welche beiden man in die eine zusammenfassen kann

$$s^k = p x^{k+1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wo k eine ganze, positive Zahl ist. **Die entsprechenden Kurven gehören einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2k$, $\nu = 2$ an;** dies ergibt sich, wenn man zur Abkürzung $p = \left(\frac{k}{k-1}\right)^k a$ setzt, indem dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{a^{\frac{2}{k}} - x^{\frac{2}{k}}\right\}^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{k}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

Hieraus ergibt sich, daß die Berühungspunkte der Tangenten an die Kurve, die mit der x-Achse einen Winkel α bilden, auf der Geraden $x = \pm a^{\frac{1}{k}} \cos \alpha$ liegen.

Bemerken wir auch, daß man infolge der Gleichung (10) hat

---

1) Daraus könnte man ableiten, daß die in Rede stehenden Kurven die Evoluten von Ribaucourschen Kurven sind, welch schönen Satz man E. Cesàro (*Sur une note de géométrie infinitésimale,* Nouv. Ann. Math., 3e Sér. XIII, 1894) verdankt.

$$R = k a^{\frac{1}{k}} x^{\frac{k-2}{k}} \sqrt{a^{\frac{2}{k}} - x^{\frac{2}{k}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Beispiele: Für den kleinsten Wert von k, nämlich $k = 2$, erhält man

$$s^2 = px, \quad p = 4a, \quad R = 2a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a - x};$$

eliminiert man p und x, so wird

$$R^2 + s^2 = 4a^2,$$

welches eine Zykloide darstellt (s. Nr. **200**).

Für den folgenden Wert, $k = 3$, hat man

$$s^3 = px^2, \quad p = \frac{27}{8} a, \quad R = 3a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}},$$

und nach Elimination von p und x

$$R^2 + 4\left(s - \frac{3a}{4}\right)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2,$$

welche Gleichung einer regulären Astroide zukommt (Bd. I, S. 269).

Welchen Wert auch die ganze Zahl k haben möge, man gelangt immer zu einer bequemen analytischen Darstellung der Kurve, wenn man setzt

$$x = a \sin^k \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Gleichung (10′) gibt nämlich dann

$$dy = ka \sin^{k-2} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi,$$

daher

$$y = ka\left(\int \sin^{k-2} \varphi \cdot d\varphi - \int \sin^k \varphi \cdot d\varphi\right);$$

die beiden angedeuteten Integrationen lassen sich durch ein bekanntes Verfahren[1]) ausführen und liefern

$$y = \left\{\begin{array}{l} a \cos\varphi \left\{ \sin^{k-1}\varphi - \sum\limits_{r=1}^{r=\frac{k-2}{k}} \dfrac{(k-3)(k-5)\cdots(k-2r+1)}{(k-2)(k-4)\cdots(k-2r)} \sin^{k-2r-4}\varphi \right\} \\ \qquad + \dfrac{(k-3)(k-5)\cdots 3\cdot 1}{(k-2)(k-4)\cdots 4\cdot 2}\,\varphi, \quad \text{wenn } k \text{ gerade ist,} \\ a \cos\varphi \left\{ \sin^{k-1}\varphi - \sum\limits_{r=1}^{r=\frac{k-1}{k}} \dfrac{(k-3)(k-5)\cdots(k-2r+1}{(k-2)(k-4)\cdots(k-2r)} \sin^{k-2r-1}\varphi \right\}, \\ \qquad\qquad \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{array}\right\} \quad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) liefern die gewünschte Darstellung der Kurve; sie zeigt, daß letztere für ein gerades k transzendent, für ein ungerades algebraisch ist.

---

1) S. z. B. die von Serret-Harnack-Scheffers, *Differential- und Integralrechnung* II (Leipzig, 1907) S. 108 angegebenen Formeln.

Ähnlich der Gleichung (8), von der wir ausgingen, ist folgende, die durch Umkehrung des Vorzeichens von m entsteht:

$$s^{n-m} = p^{-m} x^n. \qquad (14)$$

Aus ihr folgt

$$y = \int dx \sqrt{\left(\frac{n}{m-n}\right)^2 p^{\frac{2m}{m+n}} x^{\frac{2m}{n-m}} - 1};$$

die Integration wird ausführbar, wenn die Zahlen m und n derart sind, daß eine der beiden Größen $q = \frac{n-m}{2m}$, oder $r = \frac{n}{2m}$ eine ganze Zahl wird; infolgedessen hat man

$$n = (2q+1)m, \quad \text{oder} \quad n = 2mr,$$

und die Gleichung (14) nimmt folgende Gestalten an

$$s^{2q} = p^{-1} x^{2q+1}, \quad \text{oder} \quad s^{2r-1} = p^{-1} x^{2r},$$

die man in die eine zusammenfassen kann

$$s^k = p^{-1} \cdot x^{k+1}. \qquad (15)$$

Aus der Bemerkung, daß diese aus (11) hervorgeht, wenn man das Vorzeichen von k wechselt, ergibt sich, daß für die neuen Kurven offenbar die Formeln bestehen, die aus (9′), (10′) durch denselben Zeichenwechsel hervorgehen. Es besteht demnach auch eine analoge analytische Darstellung, wie sie aus (12) und (13) hervorgeht, was der Leser leicht verifizieren kann. Auch gehört jede Kurve dieser neuen Art im allgemeinen einem System mit den Charakteristiken $\mu = 2k$, $\nu = 2$ an.

Beispiele: Vom Werte $k = 0$ abgesehen (welcher eine Gerade liefert) ist der kleinste Wert, den man nehmen kann, $k = 1$. Dann wird (15)

$$x^2 = ps$$

und (7) liefert

$$R = \frac{2x^2\sqrt{4x^2 - p^2}}{p^2};$$

durch Elimination von x erhält man

$$R = 2s\sqrt{\left(\frac{s}{\frac{p}{2}}\right)^2 - 1}$$

als natürliche Gleichung der fraglichen Kurve; rufen wir uns die Gleichung (12) aus Nr. **234** ins Gedächtnis zurück, so gelangen wir zu dem Schlusse, daß diese Kurve hier eine Evolute der Kettenlinie ist[1]). — Bei dem folgenden Werte $k = 2$ erhält man $x^3 = ps^2$; die Gleichung (6) liefert dann

1) Diese Evolute gehört zur Klasse derjenigen Kurven, von denen jede durch Bewegung eine Fläche erzeugen kann, die als Krümmungslinien die ∞^1 Lagen der Erzeugenden hat; vgl. die Arbeit von Hazzidakis, *Flächenerzeugung durch Krümmungslinien* (Crelles Journ. XCVIII, 1885).

$$y = \int dx \sqrt{\frac{9x}{4p} - 1},$$

und nach vollzogener Integration

$$\left(\frac{27}{8}\frac{y+c}{p}\right)^2 = \left(\frac{9x}{4p} - 1\right)^3,$$

welche Gleichung eine semikubische Parabel darstellt.

Fassen wir zusammen, so sehen wir, daß unter den Kurven, bei denen die Abszisse proportional einer Potenz des Bogens ist, sich (abgesehen von der Geraden) vier uns schon bekannte Linien finden: zwei davon sind algebraisch, die semikubische Parabel und die reguläre Astroide, zwei sind transzendent, die Zykloide und die Evolute der Kettenlinie. Als Grenzfall ($a = \infty$) findet sich dann noch eine fünfte, die erwähnt werden möge; um zu finden, welche Kurve alsdann der Gleichung $s = ax^\mu$ entspreche, machen wir $a = \frac{\alpha}{\mu}$, wo α eine neue Konstante ist; wir werden dann schreiben können

$$s = \alpha \frac{x^\mu}{\mu} = \alpha \frac{e^{\mu \log x}}{\mu} = \alpha \log x - \frac{\alpha\mu}{2}(\log x)^2 + \cdots\cdots;$$

wenn nun μ sich der Grenze 0 nähert, so wird

$$s = a \log x,$$

wodurch (vgl. Nr. **230**, Gleichung (7)) eine Traktrix dargestellt wird.

247. Die Kurven, mit denen wir uns augenblicklich befassen, erfreuen sich besonderer Eigenschaften, die ihr Vorkommen bei Aufgaben aus der Mechanik und Geometrie bewirken, wie wir jetzt darlegen wollen:

Aufgabe I. Eine Linie von der Beschaffenheit zu finden, daß die Ordinate des Schwerpunkts eines ihrer Bogen proportional einer beliebigen positiven Potenz dieses Bogens sei.

Auflösung. Sind x_g, y_g die Koordinaten des Bogenschwerpunktes, so hat man bekanntlich

$$sx_g = \int x \cdot ds, \qquad sy_g = \int y \cdot ds; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

daher wegen der Bedingungen des Problems

$$\frac{\int y \cdot ds}{s} = ks^\mu,$$

oder

$$\int y \cdot ds = ks^{\mu+1},$$

und wenn wir differenzieren,

$$y = (\mu + 1) ks^\mu,$$

welche Gleichung nicht wesentlich von denjenigen verschieden ist, durch welche die vorhergehenden Kurven charakterisiert waren.

Aufgabe II. Eine Kurve zu finden, bei welcher die Ordinate des Bogenschwerpunktes proportional der Ordinate des Bogenendpunktes ist.

Auflösung. Schreiben wir die zweite Gleichung (16) folgenderweise

$$s y_g = \int_0^s y \cdot ds,$$

so haben wir, weil $y_g = ky$,

$$ksy = \int_0^s y \cdot ds,$$

und durch Differenzieren

$$k(s \cdot dy + y \cdot ds) = y \cdot ds,$$

oder

$$\frac{1-k}{k} \frac{ds}{s} = \frac{dy}{y};$$

und nach Integration

$$y = a s^{\frac{1-k}{k}};$$

dies zeigt, daß die gesuchte Kurve sich nicht von derjenigen unterscheidet, bei welcher der Bogen proportional der Potenz einer der beiden kartesischen Koordinaten des Endpunktes ist. — Hâton de la Goupillière[1]), der diese beiden Aufgaben gelöst hat, schlug vor, die so erhaltenen Kurven barozentrische Kurven zu nennen[2]).

Aufgabe III. Eine Kurve zu finden, bei welcher jeder Bogen an Länge gleich dem n^{ten} Teile der Differenz zwischen den Längen der Tangenten in den beiden Endpunkten ist[3]).

Auflösung. Die der Aufgabe entsprechende Gleichung ist offenbar folgende

$$n \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left| \frac{y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} \right|_{x_0}^{x};$$

setzen wir zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = p$ und differenzieren, so erhalten wir

$$n\sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+p^2} - \frac{y\frac{dp}{dx}}{p^2\sqrt{1+p^2}},$$

oder

$$(1-n)p^2(1+p^2) = y\frac{dp}{dx},$$

da aber

1) *Recherches sur les centres de gravité* (Journ. Éc. polyt. Heft XLIII, 1870).

2) In einem anderen Sinne begegnet man diesem Namen bei Maupertuis, *Discours sur la figure des astres* (Paris, 1742).

3) O. Werth, *Über eine Klasse von Kurven, welche die Eigenschaft haben, daß ein Vielfaches der Bogenlänge gleich ist der Differenz der Tangenten* (Progr. Celle, 1874).

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p \cdot dp}{dy},$$

so ist
$$(1-n)\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} - \frac{p \cdot dp}{1+p^2}.$$

Durch Integrieren ergibt sich

$$y^{1-n} = \frac{ap}{\sqrt{1-p^2}},$$

wo a die Integrationskonstante. Es ist aber

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dy}{ds},$$

daher
$$ds = ay^{n-1} \cdot dy,$$

und
$$s = \frac{a}{n} y^n.$$

Die gesuchten Kurven sind also dieselben, von denen in voriger Nummer die Rede war.

248. Eine andere Modifikation der Idee Varignons ist neueren Ursprungs und möge gleichfalls hier erwähnt werden. Zahlreiche Geometer des 17. und 18. Jahrhunderts gebrauchten den Koordinatenbegriff häufig nicht in dem engeren Sinne, wie er sich bei Descartes findet, sondern in einem viel weiteren, wie man aus den Werken Leibniz' ersieht. Dies zeigt uns unter anderen das vortreffliche Werkchen von G. Manfredi[1]), wo als Koordinaten eines Punktes der Ebene der senkrechte Abstand u von einer festen Kurve K und der von einem festen Punkte O dieser Kurve bis zum Fußpunkte jener Senkrechten gerechnete Bogen s genommen werden. Um diesem Systeme die wünschenswerte Präzision zu geben, hat man noch auf der Kurve K eine positive Richtung anzunehmen; ist diese bestimmt, so ist damit auch der positive Sinn auf jeder Tangente festgelegt und damit auch zugleich auf jeder Normalen, wenn man die Bestimmung trifft, daß der positive Teil der Normale in derselben Weise zum positiven Teile der Tangente liegen soll, wie die positive Richtung der y-Achse zur positiven x-Achse; alsdann haben nur alle die auf diesem Teile der Normalen gelegenen Punkte die positive Koordinate u[2]). Wir betrachten nun einen Punkt P einer beliebigen Kurve Γ und bezeichnen seine Koordinaten in bezug auf die Kurve K mit s, u, und nehmen dann ein rechtwinkliges kartesisches System und betrachten in diesem den Punkt P_1 mit den Koordinaten

$$x = s, \quad y = u;$$

1) *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (Bononiae, 1707).

2) Anwendungen dieses Systemes finden sich in dem Aufsatze von E. Mathieu, *Sur les coordonnées curvilignes* (Liouville's Journ. 3e Sér. VIII, 1882) u. a.

der Ort der Punkte P_1 ist dann eine Kurve Γ_1, die man die Bildkurve von Γ in bezug auf K nennt[1]) Somit läßt sich jede Kurve Γ in eine andere Γ_1 verwandeln. So ist z. B. die Bildkurve einer Geraden in bezug auf einen Kreis mit dem Radius r, von dessen Mittelpunkt sie den Abstand a hat, die (trigonometrische) Kurve

$$y = \frac{r \cdot \cos(rx - a)}{\cos(rx)}.$$

Die neue Kurve Γ_1 kann nur dann algebraisch sein, wenn die Grundkurve K algebraisch rektifizierbar ist; G. de Longchamps[2]) hat ein Verfahren angegeben, um die Tangente an Γ_1 zu konstruieren, wenn die Konstruktion der Tangente von Γ bekannt ist.

Zum Schlusse mögen zwei Bemerkungen Platz finden:

I. Man kann die Koordinatenverwandlung auch in der Weise vornehmen, daß man umgekehrt von einer Kurvengleichung in beliebigen Koordinaten zu kartesischen übergeht. Als Beispiel diene folgendes: Die Polargleichung eines Kreises lautet, wenn der Pol die Entfernung a vom Mittelpunkte hat,

$$\varrho^2 - 2a\varrho\cos\omega = r^2 - a^2.$$

Trägt man nun im kartesischen System die Winkel als Abszissen, die Vektoren als Ordinaten ab, so erhält man die Kurve

$$y^2 - 2ay\cos x = r^2 - a^2.$$

Sie ist eine Laufmusterkurve und besteht aus zwei Wellenzügen (ähnlich der Sinuslinie), wenn $a \leqq r$, dagegen aus unendlich vielen getrennten, geschlossenen Ovalen oberhalb und unterhalb der x-Achse, und symmetrisch zu beiden Seiten der y-Achse verteilt, so daß das erste von dieser selbst halbiert wird, wenn $a > r$ (Taf. V, Fig. 52)[3]).

II. E. Köstlin hat bemerkt, daß man von der Gleichung (3) auf S. 230 ausgehend die Koordinatenverwandlung in der Weise durchführen kann, daß man den Bogen s durch w, und den Kontingenzwinkel ε durch $\operatorname{arc\,tg} v$ ersetzt, wo w und v die Linienkoordinaten der Geraden $x + vy = w$ sind; dadurch gelangte er zu einer neuen Kurvenklasse, die er Arcuiden nannte. Die logarithmische Spirale führt so auf eine neue transzendente Kurve, die er Logarithmoide nannte[4]); sie ist eine abnehmende Laufmusterkurve mit unendlich vielen Spitzen; die Arcuide des Kreises ist eine gemeine Zykloide.

---

1) M. Petrovich, *Sur un système de coordonneés semi-curvilignes* (Prag. B., 1898).

2) *Les courbes images et les courbes symmetriques* (Nouv. Ann. Mathém. 3e Sér. XVIII, 1899).

3) Bemerkung des Übersetzers F. Schütte.

4) Vgl. die inhaltsreiche Inaug.-Diss. *Über eine Deutung der Gleichung, die zwischen dem Bogen und dem Neigungswinkel der Tangente im Endpunkte des Bogens einer ebenen Kurve besteht* (Tübingen, 1907). Vgl. H. Wieleitner, *Über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Württemberger Mitt., II. Reihe, IX, 1907).

Zweites Kapitel.

Die Verfolgungskurven.

249. „Ein Punkt $A(x', y')$ beschreibe die durch die Gleichung

$$f(x', y') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dargestellte Kurve mit gleichförmiger Geschwindigkeit: es soll der Ort eines Punktes $B(x, y)$ gefunden werden, der, mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegend, immer auf den Punkt A zueilt." Die gesuchte Kurve heißt gewöhnlich Verfolgungskurve[1]) oder, von dem Beispiele des auf seinen Herrn zueilenden Hundes, auch die Hundekurve, bei französischen Geometern courbe du chien, bei italienischen curva di caccia. Da man diese Kurve auch erhalten würde, wenn B sich so bewegt, daß er immer in der Richtung von A nach B entflieht, so ist auch mit gleicher Berechtigung der Name Fluchtkurve oder Fliehkurve in Gebrauch.[2])

Das oben ausgesprochene Problem wurde auf Lionardo da Vinci zurückgeführt, indem S. Günther[3]) eine Stelle in dem Werke des großen italienischen Malers in dieser Weise auslegte; unabhängig von ihm begegnete diesen Kurven Bouguer[4]), von welchem die erste Lösung herrührt[5]); aber von denen, die der Ansicht von O. Terquem[6]) sich anschließen, wird dieses Verdienst dem Dubois-Aymé, welcher im Anfange des 19. Jahrhunderts Zolldirektor in Foligno (Prov. Perugia) war, zugewiesen[7]). Jedenfalls steht fest, daß das Problem erst in dem Jahrzehnt von 1800—1810 untersucht und in seinen Hauptzügen gelöst worden ist. — Wie es gelöst werden kann, ersieht man, wenn man beachtet, daß in jedem Punkte der Bahnlinie von B die zugehörige Tangente durch den Punkt A in der zugehörigen Lage hindurchgehen muß; infolgedessen haben wir zunächst die Relation

$$(y' - y) = (x' - x)\frac{dy}{dx}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

---

1) Im 18. Jahrh. war der Name courbe de poursuite synonym mit Tractorie; s. M. Cantor, *Vorlesungen üb. Gesch. d. Math.* III, 2. Aufl. (Leipzig, 1890) S. 786.

2) Da die Operation, durch welche man von einer Kurve zu ihrer Verfolgungskurve kommt, als ein Ableitungsgesetz betrachtet werden kann, so haben wir die fraglichen Kurven an dieser Stelle behandelt.

3) *Studien zur Geschichte der math. und phys. Geographie* (Halle a. S., 1878); vgl. einen Aufsatz von Brocard in Nouv. Corresp. Math. VI, 1880, S. 211—213.

4) *Sur de nouvelles courbes, auxquelles on peut donner le nom de lignes de poursuite* (Mém. Acad. Sciences, Paris 1732).

5) Vgl. auch Maupertuis, *Solution d'un problème de géométrie* (Das.).

6) Nouv. Ann. Math. VIII, 1849, S. 91—93.

7) Vgl. eine Bemerkung in *Corresp. sur l'Ecole polyt.* (II, S. 275) und die daraus entstandenen Arbeiten von St. Laurent, C. Sturm, Querret und Tédénat in Ann. de Mathém. XIII, 1822—1828.

Ist anderseits n das Verhältnis der Geschwindigkeiten der beiden betrachteten gleichförmigen Bewegungen, so hat man

$$\sqrt{dx'^2 + dy'^2} = n\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

oder

$$\sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} = n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Aus (1) und (2) sowie ihren Ableitungen ergeben sich x', y', $\frac{dx'}{dx}$, $\frac{dy'}{dx}$ als Funktionen von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; werden diese Werte in (3) eingesetzt. so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und damit ist die Untersuchung der Verfolgungskurve der Kurve (1) auf die Integration dieser Gleichung zurückgeführt.[1])

Die Integration ist vollständig ausführbar, wenn die Bahn des Punktes A eine Gerade ist. Nehmen wir diese als y-Achse, so werden die Gleichungen (1) und (2)

$$x' = 0, \quad y' = y - x \cdot \frac{dy}{dx},$$

und liefern

$$\frac{dx'}{dx} = 0, \quad \frac{dy'}{dx} = -x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Die Gleichung (3) wird alsdann

$$-x\frac{d^2y}{dx^2} = n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, gibt es keinen besseren Weg, als zu dem klassischen Verfahren seine Zuflucht zu nehmen, indem man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt. Dann hat man

$$-x\frac{dp}{dx} = n\sqrt{1 + p^2} \quad \text{oder} \quad n\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Durch Integrieren bekommt man, wenn c die Integrationskonstante ist,

$$cx^n = \frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}}.$$

Daraus folgt:

$$p + \sqrt{1 + p^2} = c^{-1} \cdot x^{-n}, \quad p - \sqrt{1 + p^2} = -cx^n,$$

und

$$2p = c^{-1} \cdot x^{-n} - cx^n.$$

Setzt man nun für p seinen Wert ein, so erhält man

$$2\,dy = c^{-1} \cdot x^{-n} \cdot dx - cx^n \cdot dx,$$

und, wenn integriert wird,

---

1) Man verdankt M. d'Ocagne (Bull. Soc. Math. France, XI, 1884. S. 134) und L. Burmester (*Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig, 1886, S. 63) elegante Methoden, um die Krümmungsmittelpunkte einer Verfolgungskurve zu konstruieren.

$$2(y-y_0)=\begin{cases}\dfrac{x^{-n+1}}{2(-n+1)}-\dfrac{c}{n+1}x^{n+1}, & \text{wenn } n \neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{c}\log x-\dfrac{cx^2}{2}, & \text{wenn } n=1\end{cases} \quad . \quad . \quad (5)$$

Dies sind die Gleichungen der Verfolgungskurve der Geraden, je nachdem die Punkte A und B sich mit ungleicher oder gleicher Geschwindigkeit bewegen; im letzteren Falle ist die Kurve transzendent, im ersteren algebraisch oder interszendent, je nachdem n rational oder nicht; ist insbesondere n eine ganze Zahl, so haben wir (vgl. Nr. **118**) eine parabolische Kurve vor uns.[1])

Es sei zuletzt bemerkt, daß die Methoden der natürlichen Geometrie von V. Nobile auf die Untersuchung der Verfolgungskurven mit Erfolg angewandt wurden.[2])

Wenn die Bahn des Punktes A ein Kreis wäre, so würde die des Punktes B eine Integralkurve der Gleichung

$$\frac{\omega}{b}\,\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=1-\frac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{a^2\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]-\left[y-x\dfrac{dy}{dx}\right]^2}} \quad . \quad . \quad (6)$$

sein, wo ω die Winkelgeschwindigkeit von A, b die Geschwindigkeit von B, und a der Radius des gegebenen Kreises ist[3]); diese Differentialgleichung ist jedoch noch nicht integriert worden. L. Dunoyer[4]) hat die Bestimmung derselben Kurve auf die Integration der folgenden Differentialgleichung I. Ordnung zurückgeführt

$$\frac{dx}{y(n^2-1)}=\frac{dy}{(y-\omega)(2xy-\omega x+cy-cx)};$$

er hat ferner die Integralkurven derselben mit den Poincaréschen Methoden sorgfältig untersucht.

250. Mit den verschiedenen Verallgemeinerungen, welche der Begriff der Verfolgungskurven, insbesondere durch C. Sturm[5]) und E. Cesàro[6]) erfahren hat, wollen wir uns nicht aufhalten; dagegen

1) Die Behauptung in Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. der höh. ebenen Kurven*, II. Aufl. (Leipzig, 1882) S. 379: „Die Kurve ist daher algebraisch, den Fall $n=1$ ausgenommen" ist also nicht ganz genau.

2) Vgl. die beiden Abh.: *Sullo studio intrinseco della curva di caccia* (Rend. Circ. mat. Palermo XX, 1905) und *Sul problema delle curva di caccia* (Giorn. matem. XLVI, 1908).

3) S. eine von H. Brocard 1877 in der *Nouv. Corresp. Math.* und von neuem 1883 in *Mathésis* vorgelegte Frage, die 1886 von Keelhoff (*Mathésis* VI) gelöst wurde.

4) *Sur les courbes de poursuite d'un cercle* (Nouv. Ann. Mathém., 4e Sér., VI, 1906).

5) *Extension du problème des courbes des poursuite* (Ann. de Math. XIII, 1822—1823).

6) *Propriétés d'une courbe de poursuite* (Nouv. Ann. Math., 3e Sér. II, 1883); *Sur les lignes de poursuite* (Das. V, 1886); *Les lignes barycentriques* (Ebendas.).

erscheint es uns angebracht, hier ein geometrisches Problem mitzuteilen, welches von der Verfolgungskurve der Geraden gelöst wird, zumal es uns mit einer neuen analytischen Darstellung, sowie mit verschiedenen Eigenschaften dieser Kurve bekannt macht. Das Problem, um das es sich handelt, ist folgendes: „Eine Kurve Γ zu finden, von der Art, daß zwei beliebige Tangenten derselben auf einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, die in einem bestimmten Verhältnisse zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen steht.“[1])

Es seien (Taf. V, Figur 53) t und t' zwei beliebige Tangenten von Γ, P und P' die Berührungspunkte, I und I' die Schnitte mit der gegebenen Geraden r. Nach der Annahme ist dann, wenn das bestimmte Verhältnis mit n bezeichnet wird, $\operatorname{arc} PP' : II' = n$; wenn nun der Punkt I gleichförmig die Gerade r durchläuft, so muß dieses ebenso der Punkt P auf Γ tun, während immer die Tangente auf den Punkt I gerichtet ist; damit ist hinlänglich bewiesen, daß Γ die Verfolgungskurve der Geraden r ist.

Die so erhaltene neue Definition unserer Kurve führt auch leicht zu ihrer analytischen Darstellung. Wir bezeichnen mit P_0 einen festen Punkt von Γ und mit t_0 die zugehörige Tangente und mit I_0 den Schnitt von t_0 mit r; wir setzen ferner $P_0 P = s$, $I_0 I = e$ und bezeichnen mit n den konstanten Wert des Verhältnisses $\frac{\operatorname{arc} PP'}{II'}$; alsdann ist $s = ne$. Betrachten wir in ähnlicher Weise einen anderen Punkt P' von Γ, so haben wir $s' = ne'$, daher $s - s' = n(e - e')$. Dies zeigt, daß man, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, annehmen darf, daß bei dem oben ausgesprochenen Problem eine der beiden Tangenten fest sei, und es bleibt infolgedessen die entsprechende Eigenschaft der Kurve im allgemeinen bestehen. Jene feste Tangente soll als Anfangstangente und ihr Berührungspunkt als Bogenanfangspunkt bezeichnet werden. Die Gerade r nehmen wir als y-Achse und bezeichnen mit τ den Winkel, den die positiven Richtungen der Tangenten mit der x-Achse bilden. Dann haben wir

$$\frac{dx}{\cos\tau} = \frac{dy}{\sin\tau} = ds, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und

$$\frac{Y - y}{X - y} = \operatorname{tg}\tau$$

ist die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y). Setzen wir darin $X = 0$, so hat man

---

1) Für das Folgende s. F. Gauß, *Über Kurven, welche die Eigenschaft haben, daß je zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnisse steht* (Progr. Bunzlau, 1890).

$$OI = y - x \operatorname{tg} \tau,$$

und wenn wir $OI_0 = d$ setzen,

$$II_0 = y - x \operatorname{tg} \tau - d.$$

Es ist aber $PP_0 = n \cdot II_0$, und daher $y - x \operatorname{tg} \tau - d = \frac{1}{n} s$.

Differenzieren wir und benutzen dann die Gleichung (7), so erhalten wir

$$-x \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{1}{n} \frac{dx}{\cos \tau},$$

oder auch

$$\frac{dx}{x} = -n \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Durch Integration erhält man

$$\log x = -n \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) + C.$$

Setzt man hierin

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2} = \varphi, \quad C = \log a, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

so ergibt sich

$$x = a \operatorname{tg}^n \varphi. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Nun liefert die Gleichung (7) infolge von (8)

$$dy = dx \cdot \operatorname{tg} \tau = dx \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi} \cdot dx;$$

aus (9) aber folgt $\qquad dx = na \operatorname{tg}^{n-1} \varphi \cdot d \operatorname{tg} \varphi,$

folglich $\qquad dy = \frac{na}{2} \left\{ \operatorname{tg}^{n-2} \varphi - \operatorname{tg}^n \varphi \right\} \cdot d \operatorname{tg} \varphi.$

Integriert man nun unter der Voraussetzung, daß $n \neq 1$, so ergibt sich

$$2y = a \left\{ \frac{n}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \varphi - \frac{n}{n+1} \operatorname{tg}^{n+1} \varphi \right\}, \quad \ldots \quad (10)$$

wobei angenommen wird, daß dem $y = 0$, $\varphi = 0$ entspreche. Für $n = 1$ hingegen liefert die vorige Gleichung ähnlich

$$2y = a \left\{ \log \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right\}. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Die Gleichung (10) bzw. (11) im Verein mit (9) liefern die analytische Darstellung der Kurve je nachdem $n \neq 1$ oder $n = 1$. Durch Elimination von φ erhält man nun folgende beiden Gleichungen

$$2y = \left\{ \begin{array}{l} a\left[\frac{n}{n-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] \\ a\left[\log \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \end{array} \right\}, \quad \ldots \quad (12)$$

deren wesentliche Identität mit den Gleichungen (5) der Leser sogleich bemerken wird.

Bezeichnen wir jetzt mit S_y und S_y' die Subtangente und Subnormale in bezug auf die y-Achse, mit T_y und N_y die Längen der entsprechenden Tangente und Normale, so erhalten wir, da zufolge von (8) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau = \operatorname{ctg} 2\varphi$, folgende sehr einfachen Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{ll} S_y = -x\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\operatorname{tg} 2\varphi}, & S_y' = x\dfrac{dx}{dy} = x \operatorname{tg} 2\varphi \\ T_y = x\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{x}{\sin 2\varphi}, & N_y = x\dfrac{ds}{dy} = \dfrac{x}{\cos 2\varphi} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

Man hat ferner

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 2\varphi}, \qquad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dx},$$

und daher

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin^2 2\varphi}\,\frac{ds}{dx}.$$

Außerdem ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \operatorname{ctg} 2\varphi}{dx} = -\frac{2}{\sin^2 2\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx};$$

wenn man also mit R den Krümmungsradius bezeichnet, so ist

$$R = \frac{1}{2}\frac{ds}{d\varphi}.$$

Jedoch aus

$$dx = na \operatorname{tg}^{n-1}\varphi \cdot d \operatorname{tg} \varphi, \qquad dy = \frac{na}{2}(\operatorname{tg}^{n-2}\varphi - \operatorname{tg}^n\varphi)\, d \operatorname{tg} \varphi$$

ergibt sich, daß $\quad \dfrac{ds}{d \operatorname{tg} \varphi} = \dfrac{na}{2}(\operatorname{tg}^{n-2}\varphi + \operatorname{tg}^n\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$

Somit ist $\quad R = \dfrac{na \operatorname{tg}^n \varphi}{\sin^2 2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$

oder auch $\quad R = \dfrac{na}{4}\operatorname{tg}^{n-2}\varphi\,(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15')$

Durch Integration von (15) erhält man

$$s = \begin{cases} \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{n}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}\varphi + \dfrac{n}{n+1}\operatorname{tg}^{n+1}\varphi\right) + Const., & \text{wenn } n \neq 1, \\ \dfrac{a}{4}(\log \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi), & \text{wenn } n = 1; \end{cases}$$

diese Gleichungen liefern die Rektifikation der Kurve. Durch Elimination von $\operatorname{tg} \varphi$ aus diesen und aus (15′) würde man die natürliche Gleichung der Kurve erhalten.

Man hat ferner

$$\int x \cdot dy = \frac{na^2}{2}\int(\operatorname{tg}^{2n-2}\varphi - \operatorname{tg}^{2n}\varphi)\, d \operatorname{tg} \varphi$$

$$= \frac{na^2}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}^{2n-1}\varphi}{2n-1} - \frac{\operatorname{tg}^{2n+1}\varphi}{2n+1}\right) + Const.;$$

diese Quadraturformeln setzen natürlich voraus, daß $n \neq \pm\frac{1}{2}$; die

für diesen Fall nötigen Modifikationen ergeben sich sehr leicht, weshalb wir sie dem Leser überlassen. Dasselbe gilt für das durch Rotation um die y-Achse erzeugte Volumen.

Zum Schlusse wollen wir noch die durch die erste der Gleichungen (12) dargestellten Kurve für den Fall $n = 2$ eingehender betrachten. Diese Gleichung wird alsdann

$$y = a\left(1 - \frac{x}{3a}\right)\sqrt{\frac{x}{a}}.\text{[1]}$$

Sie stellt eine in bezug auf Ox symmetrische Kurve dritter Ordnung dar, die durch den Anfangspunkt geht, den Punkt $x = 3a$, $y = 0$ zum Doppelpunkte hat, in welchem die Tangenten mit der x-Achse die Winkel $\frac{\pi}{6}$ bilden. Die Punkte $x = a$, $y = \pm\frac{2a}{3}$ sind Kulminationspunkte und der unendlich ferne von y ist ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente. Nehmen wir eine Koordinatenverschiebung vor $\xi = \frac{p}{2} - x$, $\eta = y$, wobei $p = \frac{2a}{3}$, so ergeben die Gleichungen (9) und (10)

$$\xi = \frac{p}{2}\frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi}, \qquad \eta = \frac{p}{2}\frac{\sin 3\varphi}{\cos^3\varphi},$$

daher ist

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} 3\varphi, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{2}\frac{1}{\cos^3\varphi}.$$

Führen wir nun Polarkoordinaten ein, so haben wir

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\omega, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \varrho,$$

daher ist $$\omega = 3\varphi, \quad \varrho = \frac{p}{2}\frac{1}{\cos^3\varphi};$$

und nach Elimination von φ

$$\varrho = \frac{p}{2}\frac{1}{\cos^3\frac{\omega}{3}},$$

oder auch $$\varrho^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{-1}{3}\right)\omega.$$

Die fragliche Kurve ist demnach eine Trisektrix von Catalan (Nr. 48; Bd. I. S. 91).

---

1) Siehe Schlömilch, *Uebungsbuch zum Studium d. höh. Anal.* II. (2. Aufl. Leipzig, 1874) S. 338, Übungsbeispiel 18.

Drittes Kapitel.

Evoluten und Evolventen.

251. Die sämtlichen Normalen einer Kurve Γ bilden zugleich die Tangenten einer anderen Kurve Γ_1, welche der Ort der Krümmungszentren der Kurve Γ ist; es ist dies die Kurve, die Huygens zuerst im III. Teile seines berühmten Werkes *Horologium oscillatorium* betrachtet hat, dessen erste Bearbeitung am 5. Februar 1665 vollendet wurde; die betreffende Kurve heißt die Evolute oder auch Mittelpunktskurve[1]) von Γ, während umgekehrt Γ die Evolvente (oder Involute) von Γ_1 heißt. Jede Kurve hat eine bestimmte Evolute, aber unzählig viele Evolventen. Denkt man sich um die Kurve Γ_1 einen Faden geschlungen und wickelt diesen ab, so beschreibt jeder mit dem abgewickelten Faden starr verbundene Punkt eine der unzählig vielen Evolventen von Γ_1; aus dieser Erzeugungsweise resultieren die obigen Bezeichnungen. — Die Schnittpunkte einer Kurve mit ihrer Evolute sind im allgemeinen Spitzen der ersteren; die Geraden, die beide berühren, sind im allgemeinen zugleich Tangenten und Normalen der ersteren.

Wenn die gegebene Kurve algebraisch und n^{ter} Ordnung, und ihre (rationale) Gleichung

$$f(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist, so erhält man die der Evolute Γ_1, indem man die Enveloppe der Geraden

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

bestimmt. Zu diesem Zwecke hat man die Ableitungen nach x und y von folgender Größe

$$(X-y)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda f$$

gleich Null zu setzen, wo λ ein noch zu bestimmender Faktor ist. Somit entstehen die Gleichungen

$$(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - (Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Eliminiert man hieraus λ, so bekommt man

$$(X-x)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right] - (Y-y)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

---

1) Haas-Kleyers *Lehrbuch der Differentialrechnung*, III. Teil (Stuttgart, 1894) S. 192.

Die Gleichung der Evolute entsteht nun durch Elimination von x, y aus den Gleichungen (1), (2), (3). Nun kann man die Gleichung (2) durch folgende beiden ersetzen:

$$X = x + \varrho \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = y + \varrho \frac{\partial f}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

alsdann liefert uns die Gleichung (3)

$$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\Delta}, \qquad \text{wo } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) liefern die analytische Darstellung der Evolute, vorausgesetzt daß (1) erfüllt wird, und daß ϱ den durch (5) definierten Wert hat.

Um nun die Ordnung n_1 der Evolute aufzusuchen, kombinieren wir die Gleichungen (4) (5) mit der einer beliebigen Geraden, nämlich

$$AX + BY + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und erhalten

$$(Ax + By + C)\Delta + \left(A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = 0. \quad (7)$$

Hieraus ersieht man, daß die gesuchte Ordnung n_1 gleich der Zahl der variabelen Schnitte der Kurve (1) und (7) ist. Da nun die Kurven (1) und (7) von den Ordnungen n bzw. $3(n-1)$ sind, so hat man im allgemeinen $n_1 = 3n(n-1)$. Wenn aber der Anfangspunkt O 1) ein Doppelpunkt ist, so hat auch die Kurve (7) daselbst einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten wie die ursprüngliche Kurve, daher fallen sechs Schnittpunkte der beiden Kurven in O; ist er aber 2) eine Spitze, so hat die Kurve (7) in O einen dreifachen Punkt mit zwei in die Spitzentangente fallenden Tangenten; somit fallen acht Schnitte der beiden Kurven in O. Hat daher die Kurve Γ d Doppelpunkte und k Spitzen, so erleidet die Ordnung ihrer Evolute Γ_1 eine Verminderung um $6d + 8k$ Einheiten; also ist

$$n_1 = 3n(n-1) - 6d - 8k.$$

Ist nun w die Zahl der Wendepunkte von Γ, so hat man bekanntlich

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8k,$$

daher ist $\qquad n_1 - w = 3n, \quad$ oder $\quad \boldsymbol{n_1 = 3n + w}.$

Folglich: **Die Ordnung der Evolute einer algebraischen Kurve Γ ist im allgemeinen gleich der dreifachen Ordnung vermehrt um die Zahl der Wendepunkte von Γ.** Um die Klasse ν_1 der Evolute zu bestimmen, suchen wir auf, wie viele Normalen der Kurve (1) durch einen beliebigen Punkt (X, Y) der Ebene gehen, mit anderen Worten, wie viele (mit diesem Punkte variabele) Lösungen die Gleichungen (1)

und (2) haben. Beachten wir nun, daß die Gleichung (2) einer Kurve angehört, die durch jeden Doppelpunkt von (1) geht und bei jeder Spitze die entsprechende Spitzentangente berührt, so schließen wir alsbald, daß

$$\nu_1 = n^2 - 2d - 3k;$$

nun ist bekanntlich

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3k,$$

und daraus folgt

$$\nu_1 = \nu + n,$$

folglich: **Die Klasse der Evolute einer algebraischen Kurve Γ ist im allgemeinen gleich der Summe der Ordnung und Klasse von Γ.** — Wenn man schließlich noch beachtet, daß Γ und seine Evolute Γ_1 Kurven vom selben Geschlechte sind, so sieht man, daß man genügend viel Elemente hat, um alle Charakteristiken der Evolute zu bestimmen; so findet man z. B. $k_1 = k + 3n + 2w$, usw.

Modifikationen treten ein, wenn Γ metrische Besonderheiten oder höhere Singularitäten besitzt.[1]) Da wir keinen Raum haben, uns mit diesen Einzelheiten zu befassen, so verweisen wir auf die bezüglichen Arbeiten von Clebsch[2]), Cayley[3]) und Halphen[4]); es sei bemerkt, daß letzterer die Entdeckung machte, daß, wenigstens von einem gewissen Range an, die Ordnungen und die Klassen der sukzessiven Evoluten einer algebraischen Kurve zwei arithmetische Progressionen bilden, welche dieselbe Differenz haben.

Das Verfahren, welches von der Kurve Γ zu Γ_1 führt, ist von der Art, wie wir es zu Anfang dieses Abschnittes besprochen haben; somit kann man eine ganze Reihe von Kurven betrachten, unendlich nach zwei Richtungen hin, und so beschaffen, daß jede die Evolute der vorhergehenden und die Evolvente der folgenden ist. Die analytische Darstellung einer derartigen Kurvenreihe macht sich äußerst elegant, wenn man natürliche Koordinaten anwendet. Sind nämlich R und s Krümmungsradius und Bogen von Γ, R_1 und s_1 die von Γ_1, ε und ε_1 die bezüglichen Kontingenzwinkel, so hat man bekanntlich:

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \frac{d\varepsilon_1}{ds_1} = \frac{1}{R_1};$$

offenbar ist aber

$$ds_1 = dR, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon,$$

und daher

$$\frac{ds}{R} = \frac{ds}{R_1};$$

daraus folgt, daß

1) Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Curven,* II. Aufl. (Leipzig, 1882) S. 119 ff.

2) *Ueber die Singularitäten algebraischer Kurven* (Crelles Journ. LXIV, 1864).

3) *On the theory of the evolute* (Phil. Mag. XXIX, 1865; Mathem. Papers V, S. 473).

4) S. die letzten beiden Nummern der *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes* dem Institut de France vorgelegt im April 1874, und veröffentlicht in den *Mém. prés. par divers savants etc.* (XXVI, 1879).

$$R_1 = R\frac{dR}{ds}, \quad s_1 = R + c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo c eine Konstante bedeutet, die man zweckmäßig als Null annehmen kann, wenn der Anfangspunkt des Bogens auf der Evolute in geeigneter Weise gewählt wird. Eliminiert man vermittelst der Gl. (1) R und s aus der natürlichen Gleichung von Γ, $f(R, s) = 0$, so bekommt man die natürliche Gleichung von Γ_1. Umgekehrt ergibt sich aus (8) — in welcher Gleichung wir $c = 0$ annehmen wollen —

$$R = s_1, \qquad s = \int \frac{s_1\, ds_1}{R_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und man kann alsdann durch eine Integration und nachherige Elimination von s_1 die allgemeine Gleichung der Evolventen einer gegebenen Kurve ableiten.

Machen wir sogleich eine Anwendung von diesen Formeln. Die Kurve Γ_1 sei ein Kreis mit dem Radius a; da hier $R_1 = a$, so folgt aus (9) $s = \frac{s_1^2}{2a}$, es ist aber $s_1 = R$, daher ist die natürliche Gleichung der Evolvente eines Kreises

$$R^2 = 2as,$$

welches Resultat mit einem schon (in Nr. **211**) gefundenen übereinstimmt. Um die natürliche Gleichung der zweiten Evolvente desselben Kreises zu finden, haben wir also zu setzen $R_1^2 = 2as_1$; die Gleichung liefert dann

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int \sqrt{s_1}\cdot ds_1 = \frac{2\sqrt{s_1^3}}{3\sqrt{2a}},$$

oder da $s_1 = R$

$$R^3 = \frac{3^2}{2}as^2,$$

und dies ist die natürliche Gleichung einer Spirale von Sturm oder Norwich (s. N. **222**). In ähnlicher Weise würde man die natürliche Gleichung der dritten, vierten Evolvente usw. erhalten können; eine Vergleichung der Resultate führt durch Induktion zu dem Schlusse, daß die Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Evolvente sein wird

$$R^n = \frac{n^{n-1}a}{(n-1)!}s^{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Wir wollen dies aber durch eine vollständige Induktion beweisen, indem wir die Gl. (8) benutzen. Nehmen wir also einmal an, daß

$$R_1^n = ks_1^{n-1} \quad \left(\text{wo der Kürze wegen } \frac{n^{n-1}a}{(n-1)!} = k \text{ gesetzt wurde}\right)$$

die Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Evolvente sei, so folgt aus (9)

$$s = \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} \int s_1^{\frac{1}{n}} \cdot ds_1 = \frac{s_1^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n} k^{\frac{1}{n}}},$$

oder, da $s_1 = R$,

$$R^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n k s^n.$$

Setzen wir nun an Stelle von k wieder seinen Wert, so erhalten wir

$$R^{n+1} = \frac{(n+1)^n a}{n!} s^n.$$

Da letztere aus (10) hervorgeht, wenn man für n, $n+1$ setzt, so ist die allgemeine Gültigkeit von Gleichung (10) bewiesen. — Es möge noch bemerkt werden: Da alle Normalen des Kreises durch einen Punkt (den Mittelpunkt) gehen, so kann man sagen, daß der Kreis die Evolvente eines Punktes sei; **infolgedessen stellt die Gleichung (10) die n^{te} Evolvente eines Punktes dar.**

Die durch Gleichung (3) dargestellte merkwürdige Kurvenfamilie wurde wohl zuerst von du Bois-Aymé[1]), dann von Whewell schon bei seinen ersten Untersuchungen über natürliche Koordinaten-Geometrie[2]) betrachtet, sowie etwas später von Sylvester[3]), der hernach auf den Rat Cayleys sie mit dem Namen Zykloden belegte; unabhängig von diesen englischen Geometern beschäftigten sich H. Onnen[4]), E. Cesàro[5]) und G. Pirondini[6]) mit ihnen. Diese Kurvenfamilie ist noch einer anderen analytischen Darstellung fähig, die man auf folgende Weise erhält[7]): Da, wie wir gesehen haben, im allgemeinen

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon}, \quad ds_1 = dR, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon, \quad R_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1},$$

so hat man

$$R_1 = \frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{d^2 s}{d^2 \varepsilon};$$

ähnlich findet man für die zweite Evolute

---

1) *De quelques propriétés des rayons de courbure et des développées planes des courbes planes* (Mem. Acad. Turin 1809—1810; Turin 1811).

2) *On the intrinsic equation of a curve and its application* (Trans. Cambr. phil. soc. VIII, 1879, und IX, 1851).

3) *Note on the successive involute to a circle* (Phil. Mag. 4. Ser. XXXVI, 1868) und *Outline on the theory of reducible cyclodes* (Proc. London math. Soc. II, 1869).

4) *Discussion d'un systeme de spirales d'après leurs équations essentielles* (Arch. néerlandaises, X, 1875).

5) *Vorl. über natürliche Geometrie* S. 38; daselbst ist statt (10) unrichtigerweise $R^n = \frac{n!}{n^n} a s^{n-1}$ geschrieben.

6) *Sulle evolventi successive di un circolo* (Period. matem. XIX, 1903).

7) W. J. Curran Sharp, *On the successive evolutes of a curve* (Mess. math. IX, 1780).

$$R_2 = \frac{d^3 R}{d\varepsilon^3} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

usw. und für die n^{te} $\quad R_n = \frac{d^{n+1}s}{d\varepsilon^{n+1}}$.

Wenn nun diese n^{te} Evolute ein Punkt ist, so hat man $R_n = 0$, und daher durch Integration

$$s = a_0\varepsilon^n + a_1\varepsilon^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\varepsilon + a_n, \quad \dots \quad (12)$$

wo die a beliebte Konstanten sind. Diese Gleichung stellt also die n^{te} Evolvente des Punktes oder die $(n-1)^{\text{te}}$ des Kreises dar, und es folgt daraus, daß dieselbe rektifizierbar ist, wie Sylvester zuerst bemerkt hat.

Wir bemerken noch, wenn $R_n = f(\varepsilon)$ wäre, so hätte man zur Bestimmung der ursprünglichen Kurve die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^{n+1}s}{d\varepsilon^{n+1}} = f(\varepsilon). \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

Bezeichnen wir mit S die allgemeine, und mit S_0 eine spezielle Lösung derselben, so haben wir

$$S = S_0 + a_0\varepsilon^n + a_1\varepsilon^{n-1} + \cdots + a_n,$$

wo die a Integrationskonstanten sind, oder wegen Gleichung (12)

$$S - S_0 = s;$$

dies beweist, daß die Differenz zwischen den Bogen zweier spezieller n^{ten} Evolventen einer Kurve gleich dem Bogen einer $(n-1)^{\text{ten}}$ Evolvente des Kreises ist.

Die Betrachtung der sukzessiven Evolventen-Krümmungsradien hat Timmermans[1]) zu der Entdeckung eines merkwürdigen Punktes geführt, die unter einer gewissen Bedingung für alle ebenen Kurven gilt. Um sie darzulegen, gehen wir von den bekannten Relationen aus

$$dx = \cos\tau \cdot ds, \qquad dy = \sin\tau \cdot ds, \quad \dots \quad (14)$$

welche die gewöhnlichen Koordinaten eines Kurvenpunktes mit dem Bogen s und dem Winkel τ verknüpfen, den die Tangente mit der x-Achse bildet. Ist nun ε der Winkel der Normalen mit dieser Achse, so ist $\tau + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, weshalb $d\varepsilon = -d\tau$, und die Formel $R_1 = \frac{ds}{d\varepsilon}$ ist offenbar äquivalent mit $ds = -R_1 \cdot d\tau$ und infolgedessen werden die Gleichungen (14) zu

$$dx = -R_1\cos\tau \cdot d\tau, \qquad dy = -R_1\sin\tau \cdot d\tau. \quad \dots \quad (15)$$

---

1) *Essai sur une nouvelle théorie des courbes déduites de la considération de leur rayons de courbure* (Mém. Soc. Lille, VI, 1828—29). Vgl. *Note sur une propriété des courbes planes d'après M. Timmermans, par un Abonné* (Nouv. Ann. Mathém. 2e Sér. II, 1863).

Beachten wir, daß die Formeln $R_{n+1} = \frac{ds_n}{d\varepsilon_n}$, $dR_n = ds_n$ im allgemeinen ergeben

$$dR_n = -R_{n+1} \cdot d\tau.$$

Nachdem dies festgelegt, wenden wir auf die erste Gleichung (15) die teilweise Integration an, benutzen die obigen Beziehungen und erhalten

$$x = Const. - \int R_1 \cos\tau \cdot d\tau = Const. - R_1 \sin\tau - \int R_2 \sin\tau \cdot d\tau$$
$$= Const. - R_1 \sin\tau + R_2 \cos\tau + \int R_3 \cos\tau \cdot d\tau;$$

fährt man in dieser Weise fort, so erhält man schließlich

$$x = Const. + (R_2 - R_4 + R_6 - \cdots) \cos\tau - (R_1 - R_3 + R_5 - \cdots) \sin\tau.$$

Nimmt man als untere Grenze der Integration den Punkt, für welchen $\tau = \frac{\pi}{2}$ und bezeichnet im allgemeinen mit r_i den Wert von R_i für diesen Punkt, so folgt

$$x = (R_2 - R_4 + R_6 - \cdots) \cos\tau - (R_1 - R_3 + R_5 - \cdots) \sin\tau$$
$$+ (r_1 - r_3 + r_5 - \cdots).$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für y.

Die in den Klammern stehenden Reihen enthalten unendlich viele Glieder; wenn man nun annimmt, daß sie unbedingt konvergieren, so kann man ihre Summen betrachten: setzen wir also

$$R_2 - R_4 + R_6 - R_8 + \cdots = S_p, \qquad R_1 - R_3 + R_5 - R_7 + \cdots = S_d,$$
$$r_2 - r_4 + r_6 - r_8 + \cdots = s_p, \qquad r_1 - r_3 + r_5 - r_7 + \cdots = s_d,$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= S_p \cdot \cos\tau - S_d \cdot \sin\tau + s_d, \\ y &= S_p \cdot \sin\tau + S_d \cdot \cos\tau - s_p. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Nun sind aber die Gleichungen der Tangente und der Normale in dem betrachteten Punkte (x, y)

$$X \sin\tau - Y \cos\tau - (x \sin\tau - y \cos\tau) = 0,$$
$$X \cos\tau + Y \sin\tau - (x \cos\tau + y \sin\tau) = 0.$$

Zufolge der Werte aus Gleichung (16) kann man schreiben:

$$(X - s_d) \sin\tau - (Y + s_p) \cos\tau + S_d = 0,$$
$$(X - s_d) \cos\tau + (Y + s_p) \cos\tau - S_p = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß der Punkt $P(s_d, -s_p)$ von der betrachteten Tangente und der Normale die Abstände S_d bezw. $-S_p$ hat, und damit ist der folgende Timmermann'sche Satz erwiesen: **Sind für einen beliebigen Punkt M einer ebenen Kurve die sukzessiven Evoluten-Krümmungsradien $R_1, R_2, R_3, \ldots,$ so gibt es**

in ihrer Ebene einen ausgezeichneten Punkt, für welchen die von ihm auf die zu M gehörende Tangente und Normale gefällten Lote die Längen $R_1 - R_3 + R_5 - \cdots$ bzw. $R_2 - R_4 + R_6 - \cdots$ haben, vorausgesetzt, daß diese beiden Reihen unbedingt konvergieren. Ist dieser Punkt ein bestimmter im Endlichen gelegener, so trägt er den Namen Kurvenpol.

252. Die Untersuchung der sukzessiven Evoluten und Evolventen kann auch in bequemer Weise nach einer anderen Methode ausgeführt werden, deren erste Entdeckung W. P. Hiern[1]) gebührt, die jedoch erst seit 1869 weiteren Kreisen bekannt wurde durch J. A. Serrets *Cours de calcul différentiel et intégral*[2]) und darauf auch von anderen angewendet wurde[3]); sie beruht auf folgendem:

Es sei τ der Winkel der Tangente der Kurve Γ mit der x-Achse, dann wird der Abstand dieser Tangente vom Anfangspunkte eine gewisse Funktion $f(\tau)$ von τ sein, und die Tangente selbst kann dargestellt werden durch folgende, sogenannte magische Gleichung der Geraden

$$U \equiv y \cos\tau - x \sin\tau - f(\tau) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ist nun die Funktion f gegeben oder beliebig festgelegt, und man läßt τ von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, so stellt Gleichung (6) die unendlich vielen Tangenten der entsprechenden Kurve Γ dar. Man kann nun annehmen, daß Γ selbst durch die Gleichung (17) dargestellt werde; variiert man f, so werden damit sämtliche Kurven der Ebene dargestellt. Um nun die Punktgleichung von Γ zu erhalten, genügt es (17) mit ihrer Ableitung nach τ zu kombinieren, also (indem wir mit $\mathfrak{D}$ die Differentiation nach τ bezeichnen) mit folgender Gleichung

$$\mathfrak{D}U \equiv -y \sin\tau - x \operatorname{cosin}\tau - f'(\tau) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Gleichung $\mathfrak{D}U = 0$ stellt eine Gerade dar, die durch den Berührungspunkt der Geraden $U = 0$ mit ihrer eigenen Enveloppe geht und ist zu dieser Geraden senkrecht, folglich ist sie eine Normale der Kurve Γ. Damit ist gezeigt, daß in derselben Weise, wie $U = 0$ die Kurve Γ darstellt, die Gleichung $\mathfrak{D}U = 0$ die Evolute Γ_1 von Γ darstellt. Die übliche Darstellung von Γ_1 würde man also erhalten, wenn man Gleichung (18) mit ihrer Abgeleiteten nach τ kombiniert, also mit der Gleichung:

$$\mathfrak{D}^2 U \equiv -y \cos\tau + x \sin\tau - f''(\tau) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

---

1) *On the magical equation to the tangent of a curve* (Quart. Journ. Math. VI, 1864).

2) Vgl. Serret-Harnack-Scheffers *Differential- und Integralrechnung* I (Leipzig, 1906) S. 357.

3) Nicolaïdes, *Analectes, ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques,* VII Livraison (Athènes, 1872); Mansion, *Nouv. Corr. math.* I, 1874—75.

Um aber eine Kurve Γ_{-1}, die Evolvente von Γ darzustellen, hat man die Gleichung (17) mit $d\tau$ zu multiplizieren und dann zu integrieren. Bezeichnen wir diese Operation mit $\mathfrak{D}^{-1}$, weil sie der Operation $\mathfrak{D}$ entgegengesetzt ist, so kann das Ergebnis in folgender Weise geschrieben werden

$$\mathfrak{D}^{-1}U \equiv y \sin\tau + x\cos\tau - \int f(\tau)\cdot d\tau = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

mit Variation der Integrationskonstanten stellt diese Gleichung die ∞^1 Evolventen von Γ dar; es sind Kurven, welche alle dieselben Normalen haben, und von denen wir im folgenden Kapitel sprechen werden. Verallgemeinern wir indessen die Methode sowie die vorigen Resultate, so sehen wir, wenn wir noch $\mathfrak{D}^0 U$ anstatt U schreiben, daß die Kurve Γ^m, die m^{te} Evolute von Γ durch die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{D}^m U = 0, \qquad \mathfrak{D}^{m+1} U = 0 \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots) \quad . \quad . \quad (21)$$

bestimmt wird, die Kurve Γ_{-m} hingegen, die m^{te} Evolvente von Γ, durch

$$\mathfrak{D}^{-m+1} U = 0, \qquad \mathfrak{D}^{-m} U = 0 \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots) \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus den Gleichungen (17) und (19) geht hervor, daß die Abstände des Anfangspunktes von den beiden entsprechenden Tangenten von Γ und Γ_2 bzw. $f(\tau)$ und $-f''(\tau)$ sind; diese beiden Tangenten sind parallel, und ihr gegenseitiger Abstand beträgt $f(\tau) + f''(\tau)$; dieser Abstand ist aber der Krümmungsradius von Γ, folglich ist

$$R = f(\tau) + f''(\tau), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

oder, wenn man will, symbolisch

$$R = (\mathfrak{D}^0 + \mathfrak{D}^2) f(\tau); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23')$$

hieraus läßt sich ableiten, daß die Kurve konkav oder konvex gegen den Anfangspunkt ist, je nachdem das Produkt $R \cdot f(\tau)$ negativ oder positiv ist.[1]) Machen wir die Schlüsse in ähnlicher Weise für die Gleichungen (21) und (22), so erkennen wir, daß der Krümmungsradius $R_{\pm m}$ der Kurve $\Gamma_{\pm m}$ symbolisch ausgedrückt wird durch

$$R_{\pm m} = (\mathfrak{D}^{\pm m} + \mathfrak{D}^{\pm m + 2}) f(\tau), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

welches auch der Wert der ganzen Zahl m sein möge.

253. Von ähnlicher Art wie die soeben gemachten Überlegungen sind die folgenden, die uns zur **Bestimmung der Kurven, die ihren eigenen Evoluten ähnlich sind,** führen[2]). — Wir nennen wieder R

---

1) Grane, *Über Curven mit gleichartigen successiven Developpoiden* (Diss. Lund, 1894).

2) Diese Aufgabe wurde zuerst von Euler gelöst (*Investigatio curvarum quae evolutas sui similes producunt,* Comment. Petrop. XII, 1750; *Investigatio curvarum quae similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cujuscunque,* Nova Acta Petrop. I, 1787) nach Prinzipien, die im wesentlichen mit den im Texte verwendeten identisch sind; die hier benutzte Form wurde jedoch der Abhandlung von Puiseux entlehnt, *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes* (Liouvilles Journ. IX, 1844).

den Krümmungsradius in einem Punkte der Kurve Γ, τ den Winkel, den die entsprechende Normale mit einer festen Geraden bildet, als welche wir die x-Achse annehmen können. $d\tau$ wird dann der Kontingenzwinkel sein, und daher

$$R = \frac{ds}{d\tau} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Ist nun der Ausdruck für R als Funktion von τ bekannt $[R = f(\tau)]$ so ist damit, abgesehen von der Lage, die Kurve Γ bestimmt; nämlich aus den Gleichungen

$$R = \frac{ds}{d\tau} = f(\tau), \qquad dx = \cos\tau \cdot ds, \qquad dy = -\sin\tau \cdot ds$$

ergibt sich

$$dx = f(\tau)\cos\tau \cdot d\tau, \qquad dy = -f(\tau)\sin\tau \cdot d\tau,$$

daher ist

$$x = \alpha + \int f(\tau)\cos\tau \cdot d\tau, \qquad y = \beta - \int f(\tau)\sin\tau \cdot d\tau, \quad . \; (26)$$

(wo α und β beliebige Konstanten sind), wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Zugleich mit Γ betrachten wir auch die Kurve Γ', die durch die Beziehung

$$R = lf(\tau + \lambda)$$

definiert ist, wo l und λ beliebige Konstanten sind; für sie bestehen dann folgende der Gleichungen (26) analoge Beziehungen

$$x' = \alpha' + l\int f(\tau + \lambda)\cos\tau \cdot d\tau, \qquad y' = \beta' - l\int f(\tau + \lambda)\sin\tau \cdot d\tau,$$

oder

$$x' = \alpha' + l\int f(\tau')\cos(\tau' - \lambda)d\tau', \qquad y' = \beta' - l\int f(\tau')\sin(\tau' - \lambda)\,d\tau,$$

indem man $\tau + \lambda = \tau'$ setzt; werden nun noch die Gleichungen (26) herbeigezogen, so bekommt man

$$\frac{x' - \alpha'}{l} = (x - \alpha)\cos\lambda - (y - \beta)\sin\lambda,$$

$$\frac{y' - \beta'}{l} = (x - \alpha)\sin\lambda + (y - \beta)\cos\lambda.$$

Aus diesen Beziehungen erkennt man, daß Γ und Γ_1 auseinander hervorgehen durch Ähnlichkeit, verbunden mit einer Verschiebung der Ebene; von der letzteren abgesehen kann man sagen: **Die Gleichungen $R = f(\tau)$ und $R = lf(\tau + \lambda)$ gehören zwei Kurven an, die einander direkt ähnlich sind; insbesondere zwei direkt kongruenten, wenn $l = 1$.** In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß **die Gleichungen $R = f(\tau)$ und $R = lf(\tau - \lambda)$ zwei Kurven bestimmen, die invers ähnlich sind, insbesondere invers kongruent, wenn $l = 1$.**

Nachdem diese Bemerkungen vorausgeschickt sind, wollen wir mit R_k, s_k, τ_k die für die Kurve Γ_k, der k^{ten} Evolute von Γ, den R, s, τ entsprechenden Größen bezeichnen. Dann haben wir

$$\tau_1 = \tau + \frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 = \tau_1 + \frac{\pi}{2}, \quad \ldots, \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \frac{\pi}{2},$$

daher

$$d\tau = d\tau_1 = d\tau_2 = \ldots = d\tau_n, \qquad \tau_n = \tau + n\frac{\pi}{2}.$$

Außerdem ist

$$ds_1 = dR, \quad ds_2 = dR_1, \quad \ldots, \quad ds_n = dR_{n-1};$$

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1}, \quad R_2 = \frac{ds_2}{d\tau_2}, \quad \ldots, \quad R_n = \frac{ds_n}{d\tau_n};$$

folglich $$R_1 = \frac{dR}{d\tau}, \quad R_2 = \frac{dR_1}{d\tau}, \quad \ldots, \quad R_n = \frac{dR_{n-1}}{d\tau},$$

und daher $$\boldsymbol{R_n = \frac{d^n R}{d\tau^n}}.$$

Somit ist gezeigt: Wenn $R = f(\tau)$ die Gleichung ist, durch welche die Kurve Γ dargestellt wird, die für ihre n^{te} Evolute Γ_n sein wird

$$R_n = f^{(n)}(\tau),$$

der auch $$R_n = f^{(n)}\left(\tau_n - n\frac{\pi}{2}\right).$$

Daraus geht dann hervor, daß wenn Γ und Γ_n einander direkt oder invers ähnlich sind, die Funktion f der Gleichung genügen muß

$$f^{(n)}\left(\tau_n - n\frac{\pi}{2}\right) = l f(\lambda \pm \tau_n),$$

oder mit Einführung neuer Konstanten

$$f^{(n)}(\tau) = k f(\varkappa \pm \tau).$$

Damit haben wir die Differentialgleichung des Problems. Um sie zu integrieren, sind die beiden Fälle $+\tau$ und $-\tau$ auseinanderzuhalten. Im letzteren Falle, wenn also

$$f^{(n)}(\tau) = k f(\varkappa - \tau), \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

erhält man nach n-maliger Differentiation

$$f^{(2n)}(\tau) = (-1)^n k f^n(\varkappa - \tau);$$

die vorige Gleichung liefert aber

$$f^{(n)}(\varkappa - \tau) = k f(\tau);$$

folglich ist $$f^{(2n)}(\tau) = (-1)^n k^2 f(\tau).$$

Die Funktion f genügt daher einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung $2n$ mit konstanten Koeffizienten; f muß also die Summe von $2n$ Gliedern sein, jedes von der Form $Ae^{m\tau}$, wo m eine Wurzel der charakteristischen Gleichung $m^{2n} = (-1)^n k^2$ ist, und A eine Konstante; von diesen $2n$ Konstanten sind aber nur n beliebig, die anderen ergeben sich, indem man auf die ursprüngliche Gleichung (16) zurückgeht. — In dem anderen Falle, in welchem

$$f^{(n)}(\tau) = kf(\varkappa + \tau), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

sieht man, wenn $f(\tau) = \Sigma A e^{m\tau}$ gesetzt wird, daß jedes Glied dieser Summe der Gleichung (28) genügen muß; die A sind beliebig, während m eine Wurzel der Gleichung $m^n = ke^{m\,n}$ sein muß. Da nun diese Gleichung 0, 1, 2 oder 3, reelle Wurzeln und unzählig viele komplexe haben kann, so wird eine Funktion, die der Gleichung (17) genügt, aus einer endlichen Zahl (0, 1, 2 oder 3) Gliedern von der Form $Ae^{m\tau}$ bestehen, und unzähligen von der Form $Be^{\beta\tau}\sin(\gamma\tau + \delta)$; in dem Falle ferner, daß jene Gleichung für m zwei gleiche Wurzeln hat, werden auch Glieder von der Form $e^{m\tau}(A_0 + A_1\tau)$ erscheinen.

Damit kann das Problem als in seinen Hauptzügen gelöst erachtet werden, und wollen wir jetzt die erhaltenen Resultate auf einige Spezialfälle anwenden.

I. Es sei $R = ae^{\alpha\tau}$. Da $f(\tau) = ae^{\alpha\tau}$, so ist $f^{(n)}(\tau) = \alpha^n a e^{\alpha\tau}$. Wählen wir also eine Zahl n derart, daß $\alpha^n = e^{\alpha\,n}$, so können wir schreiben $f^{(n)}(\tau) = ae^{\alpha(n+\tau)} = f(n + \tau)$, daher ist die Kurve ihren sämtlichen Evoluten gleich; wählt man hingegen n in der Art, daß $\alpha^n = ae^{\alpha n}$, so hat man $f^{(n)}(\tau) = a^n e^{\alpha(n+\tau)} = af(n + \tau)$; daher ist die betreffende Kurve auch ihren sämtlichen Evolventen ähnlich. Um zu sehen, welches diese Kurve sei, beachten wir, daß $R = \frac{ds}{d\tau} = ae^{\alpha\tau}$, also $s + c = \frac{a}{\alpha}e^{\alpha\tau}$, somit $R = \alpha(s + c)$, welches eine logarithmische Spirale darstellt (Nr. **192**).

II. Es sei $R = B(\sin\beta\tau + \beta')$. Die Konstante β' kann offenbar gleich Null angenommen werden; dann ist

$$f(\tau) = B\sin\beta\tau, \quad f^{(n)}(\tau) = \beta^n B \sin\left(\beta\tau + n\frac{\pi}{2}\right) = \beta^n f\left(\tau + \frac{n\pi}{2\beta}\right),$$

folglich ist diese Kurve ihren sämtlichen Evoluten gleich. Man hat $\frac{ds}{d\tau} = B\sin\beta\tau$, also $s = -\frac{B}{\beta}\cos\beta\tau$. Da infolgedessen

$$\sin\beta\tau = \frac{R}{B}, \qquad \cos\beta\tau = -\frac{\beta s}{B},$$

so schließt man, daß die natürliche Gleichung der Kurve $R^2 + \beta^2 s^2 = B^2$ sein wird; die Kurve selbst ist demnach im allgemeinen eine Epizykloide (vgl. Nr. **206**), dagegen eine gemeine Zykloide, wenn $\beta = 1$ (Nr. **202**).

III. Es sei $R = A[e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)}]$. Da in diesem Falle

$$\frac{ds}{d\tau} = A(e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)}),$$

so hat man
$$s = A\left[\frac{e^{m\tau}}{m} \mp \frac{e^{m(n-\tau)}}{m}\right].$$

Aus den beiden Gleichungen

$$e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)} = \frac{R}{A}, \qquad e^{m\tau} \mp e^{m(n-\tau)} = \frac{ms}{A},$$

ergibt sich dann
$$R^2 - m^2 s^2 = A^2 e^{mn},$$

welches die natürliche Gleichung einer Pseudozykloide ist (Nr. **211**).

IV. Allgemeiner noch als die logarithmische Spirale und die Epizykloiden ist endlich die Kurve, deren Gleichung $\underline{R = Ae^{m\tau} \sin n\tau}$ ist, und die mit diesen die Eigenschaft gemeinsam hat, allen ihren Evoluten ähnlich zu sein.

254. Auf Kurven, die ihren Evoluten gerader Ordnung gleich sind, trifft man auch bei der Lösung folgender Aufgabe[1]): „Eine Kurve Γ zu finden, daß für alle ihre Punkte C die entsprechenden Punkte C_2 und C_4 ihrer zweiten und vierten Evolute auf einer durch den Punkt C gehenden Geraden liegen.“ Wenn dies eintrifft, liegen auch die entsprechenden Punkte C_6, C_8 ... auf dieser Geraden, während die Punkte C_1, C_3, C_5 ... auf einer zweiten durch C gehenden Geraden liegen, die mit der obigen einen konstanten Winkel bildet. Alle Evoluten gerader Ordnung werden dann einander ähnlich sein, und dasselbe wird von denen ungerader Ordnung gelten. Die natürliche Gleichung von Γ hat eine der beiden Formen

$$R^2 = 4ab + (ms + k)^2, \qquad R^2 = a^2 - (ms + k)^2.$$

Die Betrachtung der Krümmungszentren führt noch zu anderen neuen Kurven außer den sukzessiven Evoluten. Hâton de la Goupillière nämlich hat Formeln aufgestellt, welche die Koordinaten eines Punktes C_k liefern, der dem Punkte C von Γ in der k^{ten} Evolute entspricht, in bezug auf die Tangente und Normale in C als kartesische Achsen genommen; wenn man aus diesen beiden Formeln k eliminiert, so erhält man eine Kurve, auf welcher die unzählig vielen Punkte C_1, C_2, ... C_k, ... liegen; es ist diese eine der angedeuteten neuen Kurven[2]); eine zweite ist der Ort des Schwerpunktes der Gruppe $C_1\ C_2 \ldots C_k$ bei Variation des entsprechenden Punktes C.[3])

---

1) G. Pirondini, *Note géométrique* (Nouv. Ann. Mathém. 3. Sér. V, 1886) und *Alcune questioni sulle evolute successive di una linea piana* (Rendic. Acc. Napoli 2. Ser. V, 1891).

2) Hâton de la Goupillière, *Des centres de courbure successivs* (Liouvilles Journ. 2. Ser. IV, 1859 oder *Mémoires divers*, II éd., Paris 1909, S. 33); die erhaltene Kurve ist eine logarithmische Spirale, wenn die Ausgangskurve eine solche ist.

3) S. die Note Hâton de la Goupillière, *Centres des moyennes distances des centres de courbure successivs* (C. R. CXV, 1892, oder die o. a. *Mémoires divers*, S. 45).

Viertes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Evoluten und Evolventen.

255. Die zwischen zwei Kurven bestehende Beziehung, die man dadurch ausdrückt, daß man sagt, daß die eine die Evolute der anderen sei oder diese die Evolvente der ersteren, kann von mehreren verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet und verallgemeinert werden und ist auch tatsächlich in verschiedener Weise verallgemeinert worden. Wir wollen hier einen Überblick über die wichtigsten Verallgemeinerungen geben.

I. Indem man die Evolute einer Kurve Γ als die Enveloppe aller ihrer Normalen auffaßt, so wird man ganz natürlich dazu geführt, die Enveloppe Γ_α aller derjenigen Geraden zu betrachten, welche Γ unter dem konstanten Winkel α schneiden.[1]) Daß eine derartige Verallgemeinerung der Evolute sich von selbst aufdrängen mußte, wird durch die Geschichte bestätigt, indem dieser Begriff kurz nach der Veröffentlichung des *Horologium oscillatorium* aufgestellt wurde: die beiden Abhandlungen, in denen der berühmte Physiker Réaumur die Fundamente der Theorie jener Enveloppen legte, tragen nämlich das Datum 1709; er stellte darin einen Satz auf, der noch heute als der Angelpunkt ihrer Theorie gelten kann[2]). Die Enveloppen selbst erhielten bei ihrem ersten Auftreten den Namen „développées imparfaites“[3]), andere benutzen den Namen „développées obliques“[4]); am meisten gebräuchlich ist der Name Developpoiden oder Evolutoiden, der von Lancret in einer seiner trefflichen Abhandlungen angegeben wurde.[5])

Der erwähnte Réaumursche Satz kann leicht in folgender Weise bewiesen werden: Es sei $f(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Kurve Γ, eine Gerade, welche sie unter einem Winkel α schneidet, hat zur Gleichung

---

1) Beispiele: 1. Die sämtlichen Geraden, welche einen Kreis unter konstantem Winkel schneiden, umhüllen einen kleineren konzentrischen Kreis; 2. die, welche eine logarithmische Spirale unter konstantem Winkel schneiden, umhüllen eine zweite logarithmische Spirale, da ja diese Kurve die schräge Trajektorie eines Strahlenbüschels ist.

2) *Méthode générale pour déterminer le point d'intersection de deux lignes infiniment proches, qui rencontrent une courbe donnée vers le même côté sous des angles égaux moindres ou plus grandes qu'un droit* (Mém. Ac. Sciences, Paris MDCCIX). *Formules générales pour déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux* (Das.).

3) Fontenelle, *Histoire de l'Acad. des Sciences,* Année MDCCIX, S. 65.

4) Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris, 1873) S. 77.

5) *Mémoire sur les développoïdes des courbes planes* (Mém. Savants Étr. II, 1811).

$$(x-\xi)\left(1-\frac{d\eta}{d\xi}\operatorname{tg}\alpha\right)+(y-\eta)\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{d\eta}{d\xi}\right)=0; \quad . \quad . \quad (1)$$

die Evolutoide Γ_α ist nun die Enveloppe dieser Geraden. Differenzieren wir nun (1) nach ξ, so erhalten wir

$$-(x-\xi)\operatorname{tg}\alpha+y-\eta=\frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Kombinieren wir (1) und (2), so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} x-\xi &= \cos^2\alpha\,\frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{d\eta}{d\xi}\right),\\ y-\eta &= \cos^2\alpha\,\frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\operatorname{tg}\alpha-1\right).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichungen liefern die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x, y)$ der Evolutoide Γ_α ausgedrückt durch die Koordinaten des entsprechenden Punktes $M(\xi, \eta)$ der Kurve Γ. Aus ihnen ergibt sich nun

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\cos^2\alpha\,\frac{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}};$$

ist nun R der Krümmungsradius von Γ im Punkte M, so folgt hieraus, wenn man sich eines bekannten Ausdrucks für R erinnert, daß

$$PM = R\cos\alpha,$$

und dies besagt: **Ist C das Krümmungszentrum für den Punkt M der Kurve Γ, und fällt man von diesem auf die Gerade, welche die Kurve Γ in M unter dem Winkel α schneidet, das Lot, so ist der Fußpunkt desselben, der Berührungspunkt jener Geraden mit ihrer eigenen Enveloppe Γ_α.** Dieser Réaumursche Satz führt zu einer einfachen Punktkonstruktion beliebiger Evolutoiden, wenn man die Evoluten kennt.

256. In der Theorie der Developpoiden findet auch die von uns schon bei den Evoluten (Nr. **252**) benutzte „magische Gleichung der Geraden" eine elegante Anwendung[1]). Nehmen wir nämlich an, daß die Kurve Γ die Enveloppe der ∞^1 Geraden sei, welche bei Variation von τ durch die Gleichung

---

1) Mansion, *Principes de la théorie des développoïdes des courbes planes* (Nouv. Corr. math. V, 1879).

$$T \equiv y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0$$

dargestellt werden, so würde die Punktgleichung von Γ entstehen, wenn man diese Gleichung mit ihrer Ableitung nach τ kombinierte, also mit

$$T' \equiv - y \sin \tau - x \cos \tau - f'(\tau) = 0.$$

Betrachtet man nun die Gleichung

$$U \equiv T \cos \alpha + T' \sin \alpha = 0,$$

so hat man damit die analytische Darstellung der Geraden, die durch den Berührungspunkt von $T = 0$ geht, und mit dieser den Winkel α bildet; die Enveloppe der Geraden $U = 0$ ist also die Evolutoide Γ_α mit dem Winkel α der Kurve Γ. In ähnlicher Weise umhüllt die Gerade

$$V \equiv U \cos \beta + U' \sin \beta = 0$$

die Evolutoide der Kurve Γ_α mit dem Winkel β; der Analogie folgend können wir sie mit $\Gamma_{\alpha,\beta}$ bezeichnen. Setzen wir nun in diese letzte Gleichung für U seinen Wert, so wird diese zu

$$V \equiv T \cos \alpha \cdot \cos \beta + T' \sin (\alpha + \beta) + T'' \sin \alpha \cdot \sin \beta = 0.$$

Offenbar ist die Funktion V symmetrisch in α und β, woraus folgt, daß man zu der Kurve $\Gamma_{\alpha,\beta}$ auch gelangt sein würde, wenn man die Evolutoide des Winkels α von der Kurve Γ_β aufgesucht hätten. Diese wichtige Tatsache, die man als den Lancretschen Satz zu bezeichnen pflegt, kann man in die Worte kleiden: **Die Evolutoide $\Gamma_{\alpha,\beta}$ ist identisch mit der Evolutoide $\Gamma_{\beta,\alpha}$**[1]. Wenn man daher symbolisch mit $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}$ die Kurve bezeichnet, die entsteht, wenn man die Evolutoide des Winkels α von Γ, nämlich Γ_α konstruiert, hierauf die des Winkels β von Γ_α, nämlich $\Gamma_{\alpha,\beta}$, und so weiter, so kann man die Winkel $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ permutieren, ohne daß die entstehende Kurve geändert wird.

Die Gleichung $U = 0$ lautet ausführlich geschrieben

$$y \cos (\tau + \alpha) - x \sin (\tau + \alpha) = \cos \alpha \cdot f(\tau) + \sin \alpha \cdot f'(\tau),$$

oder auch, wenn man

$$\tau + \alpha = \theta, \quad \cos \alpha \cdot f(\theta - \alpha) + \sin \alpha \cdot f'(\theta - \alpha) = F(\theta)$$

setzt,

$$y \cos \theta - x \sin \theta = F(\theta).$$

Wenn man nun mit R_α den Krümmungsradius von Γ_α bezeichnet (sowie mit R den von Γ) und einige der Nr. **252** gewonnenen Resultate benutzt, so erhält man

1) Einen geometrischen Beweis dieses Satzes findet man in der *Note* von Hâton de la Goupillière, *sur la théorie des développoïdes* (Bull. Soc. math. France V, 1896—97).

$$R_\alpha = F(\theta) + F''(\theta) = \cos\alpha \cdot f(\theta - \alpha) + \sin\alpha \cdot f'(\theta - a)$$
$$+ \cos\alpha \cdot f''(\theta - \alpha) + \sin\alpha \cdot f'''(\theta - \alpha)$$
$$= \cos\alpha\,[f(\tau) + f''(\tau)] + \sin\alpha \frac{d}{d\tau}[f(\tau) + f''(\tau)].$$

Nun ist $f(\tau) + f''(\tau) = R$, folglich ist

$$R_\alpha = R\cos\alpha + \frac{dR}{d\tau}\sin\alpha; \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

diese elegante Beziehung ist unter dem Namen der Habichschen Formel bekannt[1]). Will man sie mit dem Winkel in Beziehung bringen, den die Tangente der Evolutoide (nicht mit der Tangente, sondern) mit der Normalen der gegebenen Kurve bildet, so ist nur notwendig, an Stelle des obigen α den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ zu setzen; sie wird alsdann

$$R_\alpha = R\sin\alpha + \frac{dR}{d\tau}\cos\alpha. \quad \ldots \ldots \quad (4')$$

Die Habichsche Formel ermöglicht es, die natürliche Gleichung von Γ_α zu finden, wenn man die von Γ kennt; man beachte, daß für Γ und Γ_α die Kontingenzwinkel gleich sind, daher ist

$$d\tau = d\tau_\alpha.$$

Da ferner im allgemeinen

$$R = \frac{ds}{d\tau}, \qquad R_\alpha = \frac{ds_\alpha}{d\tau_\alpha},$$

so hat man drei Relationen, die zugleich mit (4) und der Kurvengleichung von Γ ein System bilden, aus welchem R, s, τ, τ_α eliminiert werden können und damit die gesuchte Gleichung zwischen R_α und s_α erhalten wird.

Wenden wir dieses Verfahren auf die Epizykloide mit der natürlichen Gleichung

$$R^2 + \mu^2 s^2 = c^2 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

an. Wir schreiben diese in folgender Weise

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 + \mu^2 s^2 = c^2$$

und erhalten daraus

$$d\tau = \frac{ds}{\sqrt{c^2 - \mu^2 s^2}},$$

und durch Integrieren

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{\mu}\arcsin\frac{\mu s}{c},$$

oder auch, da $\tau_\alpha = \tau + Const.$,

---

1) *Les Mondes*, XIX, 1869, S. 33.

$$s = \frac{c}{\mu} \sin \mu (\tau_\alpha - \tau_0'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wo τ_0' eine neue Konstante ist. Nun kann Gleichung (4) geschrieben werden als

$$R_\alpha = \frac{ds}{d\tau_\alpha} \cos \alpha + \frac{d^2 s}{d\tau_\alpha^2} \sin \alpha,$$

oder mit Anwendung von Gleichung (6)

$$R_\alpha = c\,[\cos \alpha \cdot \cos \mu (\tau_\alpha - \tau_0') + \mu \sin \alpha \cdot \cos \mu (\tau_\alpha - \tau_0')].$$

Da ferner $ds_\alpha = R_\alpha \cdot d\tau$, so liefert eine neue Integration bei passend gewählten Konstanten

$$\mu s_\alpha = c\,[\cos \alpha \cdot \sin \mu (\tau_\alpha - \tau_0') + \mu \sin \alpha \cdot \cos \mu (\tau_\alpha - \tau_0')].$$

Werden die beiden letzten Gleichungen quadriert und addiert, so erhält man

$$R_\alpha^2 + \mu^2 s_\alpha^2 = c^2 (\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dies ist die natürliche Gleichung der Evolutoide des Winkels α der betrachteten Epizykloide; eine Vergleichung mit (6) belehrt uns: **Alle Evolutoiden einer Epizykloide sind ihr ähnliche Kurven**[1]) Wenn $\mu = 1$, so stellt (5) eine gemeine Zykloide dar; dann wird Gleichung (7) $R_\alpha^2 + s_\alpha^2 = c^2$; daher: **Alle Evolutoiden einer gemeinen Zykloide sind ihr gleiche Kurven.** — In gleicher Weise läßt sich zeigen: **Alle Pseudozykloiden sind ihren Evolutoiden gerader Ordnung ähnlich.**

Kehren wir zu allgemeineren Betrachtungen zurück! Wenn in der Gleichung (4′) R als Funktion von τ ($= \tau_\alpha + Const.$) gegeben ist, so ist sie eine Gleichung zwischen R_α und τ_α, also die natürliche Gleichung von Γ_α. Wenn man dagegen voraussetzt[2]), daß in ihr R_α als Funktion von τ_α gegeben sei, so stellt sie sich als eine Differentialgleichung zwischen R und τ dar, durch deren Integration man eine Kurve Γ erhält, zu welcher Γ_α die Evolutoide des Winkels α ist, und die man die inverse Evolutoide des Winkels α in bezug auf Γ als Ausgangskurve nennt[3]); wir wollen diese durch das Symbol $\bar{\Gamma}_\alpha$ bezeichnen. Die Gleichung (1) ist nun eine lineare Gleichung in R mit konstanten Koeffizienten, kann daher integriert werden, und ergibt:

$$R = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \mu}}{\cos \alpha} \int_\lambda^\tau R_\alpha e^{\tau \operatorname{tg} \alpha} . \, d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo λ eine durch die Integration eingeführte Konstante ist; durch

1) S. die Questions 799 u. 800, gestellt von Fouret in den Nouv. Ann. Math. und gelöst von Rouquet 1867 und von Fouret 1880.

2) S. die Abh. von Hâton de la Goupillière, *Recherches sur les développoïdes des diverses ordres* (Ann. Soc. Sc. Bruxelles II, 1877).

3) Man könnte sie auch Evolventoide nennen.

Variation derselben erhalten wir die unendlich vielen inversen Evolutoiden. Aus leicht begreiflichen Gründen ist es vorteilhaft (8) in etwas anderer Weise zu schreiben, indem man R, α, λ, R_α ersetzt bzw. durch $\overline{R}_\alpha$, α_1, λ_1, R; dann hat man

$$\overline{R}_{\alpha_1} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_1}}{\cos \alpha_1} \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \operatorname{tg} \alpha_1} \cdot d\tau.$$

Analog wird die allgemeine natürliche Gleichung der Evolutoide $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \alpha_2}$ des Winkels α_2 von $\overline{\Gamma}_{\alpha_1}$ sein

$$\overline{R}_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_2}}{\cos \alpha_2} \int_{\lambda_2}^{\tau} R_{\alpha_2} e^{\tau \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot d\tau,$$

oder wegen der vorigen Gleichung

$$\overline{R}_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_2}}{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2} \int_{\lambda_1}^{\tau} R_{\alpha_2} e^{\tau (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)} \cdot d\tau \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \operatorname{tg} \alpha_1} \cdot d\tau.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so gelangen wir zu dem Schlusse, daß die inversen Evolutoiden $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ die allgemeine natürliche Gleichung haben

$$\overline{R}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha_n}}{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \ldots . \cos \alpha_n} \int_{\lambda_n}^{\tau} e^{\tau (\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n-1})}$$

$$\cdot d\tau \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} e^{\tau (\operatorname{tg} \alpha_{n-1} - \operatorname{tg} \alpha_{n-2})} \, d\tau \ldots . . \int R e^{\tau \operatorname{tg} \alpha_1} \cdot d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wenn im speziellen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots \alpha_n$, kann man schreiben

$$\overline{R}_\alpha^{(n)} = \frac{e^{-\tau \operatorname{tg} \alpha}}{\cos^n \alpha} \int_{\lambda_n}^{\tau} d\tau \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} d\tau \ldots \ldots \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \operatorname{tg} \alpha} \cdot d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

und wenn außerdem $\alpha = 0$

$$\overline{R}^{(n)} = \int_{\lambda_n}^{\tau} \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} \ldots . . \int_{\lambda_1}^{\tau} R \, d\tau^n,$$

welches Resultat im wesentlichen schon im vorigen Kapitel (S. 258) gefunden wurde.

Die allgemeine Formel (9) ist analog zu einer anderen, welche die (direkten) Evolutoiden betrifft und die man auf folgende Weise erhält: Wir nehmen die Gleichung (4′) und schreiben sie in folgender Weise:

$$R_{\beta_1} = R \sin \beta_1 + \frac{dR}{d\tau} \cos \beta_1,$$

oder
$$R_{\beta_1} = e^{-\tau \operatorname{tg} \beta_1} \cdot \cos \beta_1 \frac{d}{d\tau} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta_1});$$

dies ist die natürliche Gleichung der Evolutoide Γ_{β_2} von Γ. Demnach wird

$$R_{\beta_1, \beta_2} = e^{-\tau \operatorname{tg} \beta_2} \cdot \cos \beta_2 \frac{d}{d\tau} (R_{\beta_1} e^{\tau \operatorname{tg} \beta_1})$$

die Evolutoide $\Gamma_{\beta_1, \beta_2}$ des Winkels β_2 von Γ_{β_1} darstellen; kombinieren wir diese Gleichung mit der vorigen, so erhalten wir

$$R_{\beta_1, \beta_2} = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 \cdot e^{-\tau \operatorname{tg} \beta_2} \frac{d}{d\tau} \left(e^{\tau (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1)} \frac{d}{d\tau} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta_1}) \right).$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir als natürliche Gleichung von $\Gamma_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}$ folgende

$$R_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 \ldots \cos \beta_n e^{-\tau \operatorname{tg} \beta_n}$$
$$\cdot \frac{d}{d\tau} \left[e^{\tau (\operatorname{tg} \beta_n - \operatorname{tg} \beta_{n-1})} \cdot \frac{d}{d\tau} \left(e^{\tau (\operatorname{tg} \beta_{n-1} - \operatorname{tg} \beta_{n-2})} \frac{d}{d\tau} \left(\cdots \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \cdots \frac{d}{d\tau} \left(e^{\tau (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1)} \frac{d}{d\tau} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta_1}) \right) \right) \right) \right], \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

welches die angekündigte Formel ist. Wenn $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots \beta_n$, so wird sie

$$R_\beta^{(n)} = \cos^n \beta \cdot e^{-\tau \operatorname{tg} \beta} \frac{d^n}{d\tau^n} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta}) \quad \ldots \ldots \quad (10')$$

und wenn überdies $\beta = 0$,

$$R^{(n)} = \frac{d^n R}{d\tau^n},$$

welchem Resultate wir schon im vorigen Kapitel begegnet sind.

Die Gleichung (10) ist zwar von eleganter Form, hat aber geringen praktischen Nutzen; besser ist es, bei Anwendung auf eine Formel zurückzugreifen, die man durch folgenden Kunstgriff erhält. Aus den beiden Relationen

$$R_{\beta_1} = R \sin \beta_1 + \frac{dR}{d\tau} \cos \beta_1, \qquad R_{\beta_1, \beta_2} = R_{\beta_1} \sin \beta_2 + \frac{dR_{\beta_1}}{d\tau} \cos \beta_2$$

erhält man durch Elimination von R_{β_1} die dritte

$$R_{\beta_1, \beta_2} = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 \left\{ \frac{d^2 R}{d\tau^2} + (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) \frac{dR}{d\tau} + R \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_2 \right\}.$$

Setzen wir diesen Wert in

$$R_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} = R_{\beta_1, \beta_2} \sin \beta_3 + \frac{dR_{\beta_1, \beta_2}}{d\tau} \cos \beta_3$$

ein und fahren in dieser Weise fort, so gelangen wir schließlich zu

$$R_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} = \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 \ldots \cos\beta_n \left\{ \frac{d^n R}{d\tau^n} + S_1 \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \cdots + S_{n-1} \frac{dR}{d\tau} + S_n R \right\}, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

wo $S_1, S_2, \ldots S_n$ bzw. die Summe der Größen $\operatorname{tg}\beta_1, \operatorname{tg}\beta_2, \ldots, \operatorname{tg}\beta_n$, die Summe ihrer binären Produkte usw., schließlich das Produkt aller bedeuten. Wenn insbesondere $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = \beta$, so wird Gleichung (11)

$$R_\beta^{(n)} = \cos^n\beta \left\{ \frac{d^n R}{d\tau^n} + \binom{n}{1} \operatorname{tg}\beta \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \binom{n}{2} \operatorname{tg}\beta^2 \frac{d^{n-2} R}{d\tau^{n-2}} + \cdots \cdots + \binom{n}{1} \operatorname{tg}^{n-1}\beta \frac{dR}{d\tau} + \operatorname{tg}\beta^n \cdot R \right\}. \quad \ldots \quad (11')$$

Um die Anwendung von (11) zu zeigen, wollen wir die Aufgabe lösen: „Die n^{te} inverse Evolutoide eines Punktes aufzufinden, wenn $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die gegebenen Winkel sind." Da in diesem Falle $R_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} = 0$, so gibt uns Gleichung (11) zur Bestimmung von R als Funktion von τ folgende lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^n R}{d\tau^n} + S_1 \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \cdots + S_{n-1} \frac{dR}{d\tau} + S_n R = 0;$$

da die entsprechende charakteristische Gleichung der Wurzeln $-\operatorname{tg}\beta_1$, $-\operatorname{tg}\beta_2, \ldots, -\operatorname{tg}\beta_n$ hat, so haben, wenn die β alle verschieden sind, die entsprechenden Kurven die natürliche Gleichung

$$R = \sum_{k=1}^{k=n} C_k e^{-\tau \operatorname{tg}\beta_k}, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

wo die C beliebige Konstanten sind. Wenn hingegen $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = \beta$, so erhält man die Kurve

$$R = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_k \tau^k e^{-\tau \operatorname{tg}\beta}. \quad \ldots \ldots \quad (12')$$

Als zweite Anwendung wollen wir eine Kurve Γ von der Art aufsuchen, daß ihre n^{te} Evolutoide eine ihr ähnliche Kurve sei unter der Voraussetzung, daß $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = \beta$, und daß bei der vorausgesetzten Ähnlichkeit einem beliebigen Punkte von Γ auch gerade der Punkt entspricht, den man durch n-malige Anwendung des Réaumurschen Satzes erhält. Da in einem solchen Falle $R_\beta^{(n)} = \mu R$ ist, so wird die Gleichung (10) zu

$$\frac{d^n}{d\tau^n}(R e^{\tau \operatorname{tg}\beta}) - \frac{\mu}{\cos^n\beta}(R e^{\tau \operatorname{tg}\beta}) = 0;$$

da dies eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten in $R e^{\tau \operatorname{tg}\beta}$

ist, und da $\omega^n = \frac{\mu}{\cos^n \beta}$ ihre charakteristische Gleichung ist, so erhält man die allgemeine natürliche Gleichung der gesuchten Kurven als

$$R = e^{-\tau \operatorname{tg} \beta} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} C_k e^{\tau \frac{\sqrt[n]{\mu}}{\cos \beta} e^{\frac{2 k i \pi}{n}}},$$

wo $\sqrt[n]{\mu}$ die n^{te} arithmetische Wurzel der Zahl μ darstellt. — In ähnlicher Weise läßt sich das allgemeine Problem lösen, bei welchem die Winkel β alle verschieden sind,. wie der Leser aus der oben zitierten Abhandlung von Hâton de la Goupillière ersehen kann.

Eine andere Art, die hier besprochene Theorie zu behandeln, ist folgende[1]): Es sei eine beliebige Kurve **C** gegeben; in einem beliebigen Punkte C derselben ziehe man die Tangente t und bestimme eine Kurve Γ, welche die Trajektorie des Winkels λ aller Geraden t ist. Alsdann ist **C** die Enveloppe aller zur Kurve Γ unter einem Winkel von λ schiefen Geraden, mit anderen Worten die Evolutoide des Winkels λ von Γ, daher ist umgekehrt Γ die inverse Evolutoide in bezug auf denselben Winkel λ. Wenn λ gegeben ist, gibt es noch unendlich viele inverse Evolutoiden von **C**; durch jeden Punkt M der Ebene gehen ihrer so viele, als es Tangenten von ihm aus an die Kurve **C** gibt. — Um analytisch die Beziehung zwischen **C** und Γ auszudrücken, bezeichnen wir mit x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes C von **C**, und mit ξ, η die des entsprechenden Punktes Γ von Γ; x und y wollen wir als in Funktionen des Bogens s der Kurve **C** ausgedrückt annehmen, und die entsprechenden Ausdrücke für ξ, η aufsuchen; ist nun R der Krümmungsradius der Kurve **C**, so haben wir

$$\frac{1}{R} = \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}; \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

außerdem ist, wenn wir zur Abkürzung $\operatorname{tg} \lambda = \tau$ setzen,

$$\tau = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}. \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Ist nun ϱ die Länge der Strecke zwischen den beiden entsprechenden Punkten C und Γ von **C** und Γ, so wird auch ϱ eine Funktion von s sein, und wir können schreiben

$$\xi = x + \varrho \frac{dx}{ds}, \qquad \eta = y + \varrho \frac{dy}{ds}. \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

---

1) Vorgeschlagen von H. Herwig in seiner Dissertation, *Über Trajektorien zu den Tangenten ebener Kurven* (Göttingen, 1867).

Die Bestimmung der Kurve Γ ist somit auf die Aufsuchung der Funktion von ϱ zurückgeführt. Durch Differenzieren der Gleichung (15) erhalten wir

$$\frac{d\xi}{ds}=\frac{dx}{ds}+\frac{d\varrho}{ds}\frac{dx}{ds}+\varrho\frac{d^2x}{ds^2},\quad \frac{d\eta}{ds}=\frac{dy}{ds}+\frac{d\varrho}{ds}\frac{dy}{ds}+\varrho\frac{d^2y}{ds^2}. \quad . \quad (16)$$

Setzen wir diese Werte in (14) ein und berücksichtigen (13) sowie die Identitäten

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,\quad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}=0,$$

so finden wir

$$\tau=\frac{\frac{\varrho}{R}}{1+\frac{d\varrho}{ds}},$$

oder auch

$$\varrho-\tau R\frac{d\varrho}{ds}-\tau R=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung in ϱ und liefert

$$\varrho=e^{\frac{1}{\tau}\int\frac{ds}{R}}\left(a-\int e^{-\frac{1}{\tau}\int\frac{ds}{R}}\cdot ds\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo a die Integrationskonstante ist. Setzen wir diesen Wert in (15) ein, so erhalten wir die gesuchte analytische Darstellung aller inversen Evolutoiden des Winkels λ von **C**. Die Konstante a bestimmt sich, wenn man den Punkt der Kurve **C** kennt, von welchem die Kurve Γ ausgeht, es ist also der Wert von s, welcher $\varrho=0$ macht.

Nehmen wir z. B. als Kurve **C** den Kreis $x^2+y^2=1$, so ist $R=1$, und die Gleichungen (15) und (18) ergeben

$$\xi=\cos s-\sin s\cdot\left(\tau+ae^{\frac{s}{\tau}}\right),\qquad \eta=\sin s+\cos s\cdot\left(\tau+ae^{\frac{s}{\tau}}\right)$$

und stellen dann alle inversen Evolutoiden des Winkels λ von dem betrachteten Kreise dar.

Es möge bemerkt werden, daß die vorigen Formeln keine Gültigkeit haben für $\tau=\frac{\pi}{2}$; in diesem Falle ist (14) durch folgende Relation zu ersetzen

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds}=0;$$

setzen wir diesen Wert in (16) ein, erhalten wir $1+\frac{d\varrho}{ds}=0$, daher $\varrho=a-s$ (wo a die Integrationskonstante ist), und somit

$$\xi=x+(a-s)\frac{dx}{ds},\qquad \eta=y+(a-s)\frac{dy}{ds}.$$

Im speziellen erhalten wir für den Kreis $x^2+y^2=1$

$$\xi=\cos s-(a-s)\sin s,\qquad y=\sin s+(a-s)\cos s,$$

welches die bekannten Gleichungen der Kreisevolvente sind (vgl. Nr. **209**).

Bevor wir weiter gehen, wollen wir noch bemerken, daß E. Beltrami das Wort Evolutoiden in einem anderen, noch weiteren Sinne gebraucht[1]); er nennt nämlich Evolutoiden (Sviluppoide) einer Linie eine andere Kurve von der Art, daß jede ihrer Tangenten von der ersteren Linie unter einem Winkel geschnitten wird, der eine gegebene Funktion der Koordinaten des Schnittpunktes ist. Ist jener Winkel konstant, so haben wir wieder die gewöhnlichen Evolutoiden.

257. II. T. Olivier hat gewisse spezielle ebene Linien betrachtet[2]), die er unvollkommene Evolventen des Kreises nannte, und für welche er eine stereometrische Konstruktion der Tangente angegeben hat. Die von ihm vorgeschlagene Definition läßt sich auf beliebige ebene Kurven ausdehnen und führt zu einer neuen Verallgemeinerung der Evolventen.[3]) Es sei Γ eine gegebene Kurve, auf der ein positiver Sinn festgelegt ist, O ein fester Punkt derselben und μ eine reelle, positive oder negative, ebenfalls gegebene Zahl; man nehme einen beliebigen Punkt M von Γ, ziehe die zugehörige Tangente t und bestimme auf derselben den Punkt M_0 so, daß $\frac{MM_0}{\text{arc}\, OM} = \mu$ wird. Je nachdem nun μ positiv oder negativ, wird M_0 auf den positiven oder negativen Teil von t zu liegen kommen. Der Ort Γ_0 der Punkte M_0 ist dann eine gewöhnliche (oder vollkommene) Evolvente, wenn $\mu = 1$, jedoch eine unvollkommene Evolvente, wenn $\mu \neq 1$, genauer eine verlängerte, wenn $|\mu| > 1$, eine verkürzte, wenn $|\mu| < 1$.

Nehmen wir, wie vorhin, die Koordinaten x, y des Punktes M als Funktionen des Bogens s gegeben an, so werden die von M_0, x_0, y_0, offenbar durch folgende Formeln bestimmt werden

$$x_0 = x + \mu s \frac{dx}{ds}, \qquad y_0 = y + \mu s \frac{dy}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{19}$$

Wir können nun eine elegante Konstruktion der Normalen in M_0 zu Γ_0 herleiten; beachten wir nämlich, daß die Normalen n und n_0 in M und M_0 von Γ und Γ_0 bzw. die Gleichungen haben

$$(X - x)\frac{dx}{ds} + (Y - y)\frac{dy}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{20}$$

$$\left(X - x - \mu s \frac{dx}{ds}\right)\left(\overline{1 + \mu}\,\frac{dx}{ds} + \mu s \frac{d^2x}{ds^2}\right)$$
$$+ \left(Y - y - \mu s \frac{dy}{ds}\right)\left(\overline{1 + \mu}\,\frac{dy}{as} + \mu s \frac{d^2y}{ds^2}\right) = 0 \quad . \tag{21}$$

---

1) *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti* (Ann. di Matem. IV, 1861).

2) *Développements de géométrie déscriptive* (Paris, 1843).

3) D. Levi, *Sulle evolventi allungate ed accorciate delle linee piane* (Atti Acc. Torino, IV, 1868—1869).

und kombinieren diese miteinander, so erhalten wir die Koordinaten X, Y des Punktes N, in welchem die Normalen sich schneiden. Nun ergibt sich aus (20) und (21)

$$(X-x)\frac{d^2x}{ds^2}+(Y-y)\frac{d^2y}{ds^2}=1+\mu$$

und diese Gleichung im Verein mit (13) und (20) führt zu

$$(X-x)=(1+\mu)R\frac{dy}{ds}, \qquad (Y-y)=-(1+\mu)R\frac{dx}{ds};$$

folglich ist $\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}=\overline{MN}=(1+\mu)R.$

Demnach: Ist das Krümmungszentrum C für den Punkt M der Kurve Γ gezeichnet, so hat man $\frac{MN}{MC}=1+\mu$ und also $\frac{CN}{MC}=\mu$. Vermittelst dieser Relation kann, wenn man für die Kurve Γ alle Konstruktionen auszuführen weiß, der Punkt N bestimmt werden, und somit auch die Normale n_0 für Γ_0. — Beispielshalber sei Γ der Kreis $x^2+y^2=r^2$; da $x=r\cos\frac{s}{r}$, $y=r\sin\frac{s}{r}$, so ergeben die Gleichungen (19)

$$x_0=r\cos\frac{s}{r}-\mu s\sin\frac{s}{r}, \qquad y_0=r\sin\frac{s}{r}+\mu s\cos\frac{s}{r};$$

oder, wenn wir $\frac{s}{r}=\omega$ setzen,

$$x_0=r\cos\omega-\mu r\omega\sin\omega, \qquad y_0=r\sin\omega+\mu r\omega\cos\omega.$$

Durch Differenzieren bekommen wir

$$\frac{dx_0}{d\omega}=-y-\mu r\sin\omega, \qquad \frac{dy_0}{d\omega}=x+\mu r\cos\omega,$$

$$\frac{d^2x_0}{d\omega^2}=-x-2\mu r\cos\omega, \qquad \frac{d^2x_0}{d\omega^2}=-y-2\mu r\sin\omega.$$

Sind daher R_0 und s_0 Krümmungsradius und Bogen der neuen Kurve, so findet man

$$\left(\frac{ds_0}{d\omega}\right)^2=r^2[(1+\mu)^2+\mu^2\omega^2], \qquad R_0=\frac{r\,[(1+\mu)^2+\mu^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}}{\mu^2\omega^2+(1+\mu)(1+2\mu)},$$

oder setzen wir $\mu r=a$, $(1+\mu)r=h$,

$$\frac{ds_0}{d\omega}=r\sqrt{h^2+a^2\omega^2}, \qquad R_0=\frac{[h^2+a^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2\omega^2+h^2+ah}.$$

Vergleichen wir diese mit den Gleichungen (5) und (7) in Nr. **209**, so sehen wir, daß diese Kurven von den früher erhaltenen nicht verschieden sind; **demnach sind die verlängerten Kreisevolventen Oliviers dieselben wie die früher mit diesem Namen bezeichneten Kurven,** für sie haben wir hier nur eine andere Erzeugungsweise.

III. Eine andere Verallgemeinerung der Evoluten ist folgende[1]): Man trage auf der Normalen vom Kurvenpunkte aus zum Krümmungs-

1) Brieflich mitgeteilt von cand. math. L. Braude an den Übersetzer.

zentrum hin ein bestimmtes Bruchstück μR des Krümmungsradius ab; die Endpunkte bilden eine neue Kurve, die man die Teil- oder Zwischenevolute der ursprünglichen nennen kann. Im allgemeinen ist, wenn s der Bogen der letzteren, s_1 der der neuen Kurve ist, $\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1-\mu}$. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der ursprünglichen Kurve, so hat das Krümmungszentrum die Koordinaten

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

der entsprechende Punkt der Teilevolute aber

$$\xi_1 = \frac{\lambda x + \xi}{1+\lambda}, \quad \eta_1 = \frac{\lambda y + \eta}{1+\lambda}, \quad \text{wo } \lambda = \frac{1-\mu}{\mu} \text{ ist.}$$

Z. B. für die Parabel $y = x^2$ erhält man

$$\xi_1 = \frac{x(\lambda - 4x^2)}{1+\lambda}, \quad \eta_2 = \frac{1 + 2x^2(\lambda+3)}{2(1+\lambda)}$$

eine (rationale) Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt; im Falle $\lambda = -3$ aber die Leitlinie, woraus folgt: Der Krümmungsradius ist doppelt so groß als das Stück der Normalen vom Kurvenpunkt bis zur Leitlinie. Für die Ellipse entstehen als Zwischenevoluten interessante rationale Kurven 6. Ordnung von einer Mannigfaltigkeit der Form, die der ihrer Parallelkurven analog ist. Für die Hyperbel findet man u. a., daß, wenn sie gleichseitig ist, R gleich der Hälfte des von der Kurve abgeschnittenen Normalenstückes ist, eine schöne Analogie zum Kreise. Für die reguläre Astroide $x = \cos^3\varphi$, $y = \sin^3\varphi$ erhält man

$$\xi_1 = \frac{(\lambda-2)\cos^3\varphi + 3\cos\varphi}{1+\lambda}, \quad \eta_1 = \frac{(\lambda-2)\sin^3\varphi + 3\sin\varphi}{1+\lambda},$$

wodurch u. a. eine rationale Kurve 6. Ordnung dargestellt wird. Für $\lambda = 2$, d. h. beim Teilen von R im Verhältnis $1:2$ sowie für $\lambda = -2$, d. h. wenn man R um sich selbst verlängert, erhält man den umbeschriebenen Kreis; für $\lambda = -4$, d. h. wenn man $\frac{R}{3}$ nach innen abträgt, erhält man die vierblätterige Rosenkurve. —

Gewisse Zwischenevoluten der Sinusspiralen sind wieder solche Kurven. Trägt man z. B. auf der Lemniskatennormale $\frac{3}{2}R$ ab, so erhält man die Hyperbel $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$, woraus die einfachste Konstruktion des Krümmungszentrums folgt. Trägt man nämlich den Winkel zwischen Vektor und x-Achse nach unten ab, so erhält man auf der Normalen den Punkt, der um $\frac{3}{2}R$ vom Kurvenpunkt entfernt ist.

Die gemeine Zykloide liefert die transzendenten Zwischenevoluten

$$\xi_1 = a\left(\varphi - \sin\varphi \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right), \quad \eta_1 = a(1-\cos\varphi)\cdot\frac{\lambda-1}{\lambda+1};$$

für $-1 < \lambda < 0$ entstehen Kurven mit Schleifen, für $\lambda = 1$, $y = 0$, d. h. die x-Achse halbiert alle R. Schließlich, was nicht zu verwundern (vgl. S. 67): Alle Zwischenevoluten der logarithmischen Spirale sind wieder solche Kurven.

Aus diesen wenigen Beispielen geht schon zur Genüge hervor, daß die Bedeutung der Zwischenevoluten darauf beruht, daß sie in den meisten Fällen die einfachste Konstruktion des Krümmungszentrums liefern, wenn man die Normale zeichnen kann.

258. IV. Denken wir uns einen biegsamen und undehnbaren Faden um eine Kurve geschlungen, dessen eines Ende in einem Punkte derselben befestigt ist, während das andere Ende in der Richtung der Tangente gespannt wird, und wickeln diesen Faden ab, so beschreibt das andere Ende eine der gewöhnlichen Evolventen der Kurve. Eine ganz andere Kurve aber entsteht, wenn beide Enden des Fadens auf zwei verschiedenen Kurven befestigt sind und der Faden durch einen Schreibstift so gespannt wird, daß immer beide Teile desselben die beiden Kurven berühren. An Stelle der zweiten Kurve kann auch ein Punkt treten; dann entsteht folgende

Aufgabe: „Ein Faden von der Länge l sei mit dem Ende F auf einer Kurve $\mathit{\Delta}$, mit dem anderen in einem Punkte O ihrer Ebene befestigt; die Kurve L aufzufinden, die ein Schreibstift M beschreibt, wenn er sich so bewegt, daß er immer beide Teile des Fadens gespannt erhält“[1]).

Auflösung: Für eine beliebige Lage von M seien OM und PM (Taf. V, Fig. 54) die beiden geradlinigen Teile des Fadens; sie geben zugleich mit dem Bogen $FP = s$ die Gesamtlänge des Fadens, folglich ist

$$\overline{OM} + \overline{MP} + s = l;$$

nehmen wir nun O als Anfangspunkt, nennen x, y die Koordinaten von P, und X, Y die von M, so haben wir

$$\sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = l - s. \quad . \quad . \quad (22)$$

Da aber die Gerade PM Tangente an $\mathit{\Delta}$ im Punkte P ist, so ist

$$\frac{Y-y}{X-x} = y', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

wo y', die Ableitung von y nach x, sich aus der bekannten Gleichung von $\mathit{\Delta}$ berechnen läßt. Nun kann man aus (22) und (23) X und Y in Funktionen von x, y ableiten; setzt man noch zur Abkürzung $(l-s)^2 - (x^2 + y^2) = \mu$, so erhält man

$$X = x - \frac{\mu}{\mu'}, \quad Y = y - \frac{\mu}{\mu'} y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

---

1) Diese Frage und ihre Lösung finden sich in der Abh. von Pietro Maggi, *Intorno una maniera più generale d'evolute ed evolventi, ed intorno un sistema di rette nello spazio* (Ann. Scienze Regno Lombardo-Veneto, VIII 1838 und IX 1839).

welche Gleichungen zur Bestimmung der Kurve L dienen können, wenn A und O gegeben sind. — Bevor wir hieraus einige Folgerungen ziehen, wollen wir bemerken, daß, wenn man, auf der Verlängerung MP, $MN = MO$ nimmt, $PN = PM + MN = PM + MO = l - s$ wird; daher sind die Koordinaten von N

$$x + (l - s)\frac{dx}{ds}, \qquad y + (l - s)\frac{dy}{ds},$$

oder, wenn wir die Ableitungen nach x durch Strichel bezeichnen,

$$x + \frac{l-s}{s'}, \qquad y + \frac{(l-s)y'}{s'};$$

infolgedessen lautet die Gleichung der Geraden ON:

$$\frac{Y}{X} = \frac{y + (l-s)\frac{y'}{s'}}{x + (l-s)\frac{1}{s'}}. \quad \text{(25)}$$

Nachdem dies festgesetzt, wollen wir die Tangente in M an die Kurve L aufsuchen; es genügt hierzu, ihren Neigungskoeffizienten zu bestimmen. Nun ergeben die Gleichungen (24)

$$X' = \frac{\mu\mu''}{\mu'^2}; \qquad Y' = \frac{\mu}{\mu'^2}(\mu'' y' - \mu' y''),$$

daher ist

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{\mu'' y' - \mu' y''}{\mu''},$$

oder, wenn für μ sein Wert gesetzt wird:

$$\frac{Y'}{X'} = -\frac{x + (l-s)\frac{1}{s'}}{y + (l-s)\frac{y'}{s'}}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung reziprok und entgegengesetzt dem Neigungskoeffizienten der durch Gleichung (25) dargestellten Geraden ON ist, so folgt, daß die Gerade m, Tangente der Kurve L in M nichts anderes ist als das von M auf ON gefällte Lot; diese Tangente ist also Höhe im Dreiecke NMO, und da dieses gleichschenklig, halbiert sie auch den Winkel NMO. **Die Tangente an L bildet also mit den beiden geradlinigen Teilen des Fadens gleiche Winkel**[1]. Infolgedessen bildet auch die Normale n mit PM und MO gleiche Winkel; erstere Gerade ist nun Tangente der Kurve A; denken wir uns also O als leuchtenden Punkt, die Kurve L als spiegelnd, so wird A die Enveloppe der reflektierten Strahlen sein, oder anders ausgedrückt, A ist die Brennlinie durch Reflexion oder Katakaustik von L, oder umgekehrt **L ist also die Antikaustik von A in bezug auf O als leuchtenden Punkt.** Konstruiert man die Ellipse E mit den Brennpunkten O und P, die durch M geht, so ist auch für sie

1) Dies ergibt sich auch daraus, daß man ein unendlich kleines Teilchen der Kurve als Ellipsenbogen ansehen darf.

m die Tangente in M, folglich berühren sich die beiden Kurven L und E im Punkte N. Man kann daher die Kurve Γ als Enveloppe der Ellipsen betrachten, deren einer Brennpunkt O, deren anderer ein Punkt P von $\varDelta$ ist, und deren große Achse gleich der Differenz zwischen der Gesamtlänge l des Fadens und der Länge des Bogens der Kurve $\varDelta$, gemessen vom festen Punkte F bis zum variabeln Punkte P. Diese Betrachtungsweise hat Veranlassung gegeben, die Kurve L als die elliptische Evolvente von $\varDelta$, diese dagegen als elliptische Evolute von L zu bezeichnen.

Durch Anwendung der obigen Sätze läßt sich zeigen, daß auch die elliptische Evolute einer logarithmischen Spirale in bezug auf das Auge als Punkt O wieder eine logarithmische Spirale ist; es genügt hierfür, sie als schräge Trajektorie eines Strahlenbüschels aufzufassen.

259. V. Statt die Enveloppe aller Normalen einer Kurve zu betrachten, kann man auch die Enveloppe des vom Berührungspunkte ausgehenden und in bezug auf zwei feste Punkte zur Tangente konjugiert harmonischen Strahles betrachten; man erhält dann eine Kurve, die G. Salmon Quasi-Evolute genannt hat.[1]) — Von noch größerer Allgemeinheit ist folgende Konstruktion: In der Ebene der Kurve Γ sei ein Kegelschnitt K gegeben; man lasse jedem Punkte M von Γ den Punkt M' entsprechen, in welchem die Tangente t in M an Γ die Polare von M in bezug auf K schneidet; der Ort Γ' der Punkte M' heißt dann die Halphensche Evolute nach dem Geometer, der sie zuerst betrachtet hat[2]). Verfährt man mit Γ' gerade so wie mit Γ, so erhält man eine zweite Kurve Γ'', dann eine dritte Γ''' usf. Auch für diese Reihe von Kurven gilt dasselbe wie für die Evoluten (Nr. **252**), daß, wenn Γ algebraisch ist, von einem gewissen Elemente an die Ordnungen und Klassen zwei arithmetische Progressionen mit derselben Differenz bilden.

Wenn wir, um es einfach zu machen, mit $\Gamma = 0$, $K = 0$ die Gleichungen von Γ und K in homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 bezeichnen, so haben die beiden Geraden, deren Schnitt der Punkt M' ist die Gleichungen

$$\Gamma_1 X_1 + \Gamma_2 X_2 + \Gamma_3 X_3 = 0, \qquad K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 = 0,$$

wo X_1, X_2, X_3 die laufenden Koordinaten, $\Gamma_1 \ldots K_1 \ldots$ die Werte der Abgeleiteten von Γ und K im Punkte $M(x_1, x_2, x_3)$ bedeuten. Die Koordinaten von M' werden dann gegeben durch die Relationen

$$x'_1, x'_2, x'_3 \equiv \left\| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{matrix} \right\| \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

1) *Analytische Geom. der höh. ebenen Kurven.* Deutsch v. Fiedler, II. Aufl. (Leipzig, 1882) S. 114.

2) S. die Abh. *Sur une série de courbes analogues aux développées* (Liouvilles Journ. 3e Sér. II, 1876).

Man beachte auch, daß, weil

$$x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2 + x_3 \Gamma_3 = 0, \quad dx_1 \cdot \Gamma_1 + dx_2 \cdot \Gamma_2 + dx_3 \cdot \Gamma_3 = 0$$

auch

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \equiv \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{Vmatrix};$$

und da

$$x_1 K_1 + x_2 K_2 + x_3 K_3 = 0, \quad dx_1 \cdot K_1 + dx_2 \cdot K_2 + dx_3 \cdot K_3 = 0,$$

so besteht die Beziehung

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ K_2 & K_3 \end{vmatrix} = \Gamma_1 \begin{vmatrix} .2K & dK \\ x_1 & dx_1 \end{vmatrix}$$

und noch zwei analoge. Zufolgedessen können die Gleichungen (25) durch folgende ersetzt werden, die in der Praxis meistens bequemer sind

$$\frac{x_1'}{x_1 \cdot dK - 2dx_1 \cdot K} = \frac{x_2'}{x_2 \cdot dK - 2dx_2 \cdot K} = \frac{x_3'}{x_3 \cdot dK - 2dx_3 \cdot K}.$$

Derselbe Geometer hat noch einen Spezialfall der obigen Konstruktion betrachtet[1]): Wenn nämlich der K genannte Kegelschnitt sich auf einen Kreis reduziert mit dem Mittelpunkte O und dem Radius Null, so ist der Punkt M' nichts anderes als der Schnitt der Tangente t mit der in O zum Vektor OM errichteten Senkrechten. Die Kurve Γ' heißt in diesem Falle die Tangentielle von Γ in bezug auf den Punkt O. Nehmen wir O als Pol, nennen ϱ, ω die Polarkoordinaten von M, ϱ', ω' die von M' und μ den Winkel der Tangente t mit dem Vektor OM, so haben wir

$$\varrho_1 = \varrho \operatorname{tg} \mu;$$

es ist aber bekanntlich

$$\operatorname{tg} \mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega},$$

und daher

$$\varrho_1 = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega},$$

oder auch

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

außerdem ist

$$\omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2}.$$

Diese beiden Gleichungen können zur Auffindung der Gleichung von Γ' dienen, wenn man die von Γ kennt. Ist z. B. Γ die Ährenkurve (Nr. **137**; Bd. I, S. 367) mit der Gleichung

$$\frac{a}{\varrho} = \cos \mu \omega,$$

so erhält man als Gleichung ihrer Tangentielle

$$\frac{a}{\varrho_1} = \sin \mu \omega = \cos \mu \left(\omega_1 - \frac{\pi}{2\mu}\right),$$

daher ist diese Tangentielle eine der ursprünglichen gleiche Kurve.

1) Halphen, *Étude sur les points singuliers de courbes algébriques planes. Appendice au Traité de courbes planes de G. Salmon* (Paris, 1883) S. 29.

Wenn Γ eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung ist, definiert durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

so ist es leicht die Ordnung von Γ' zu finden. Sind nämlich α, β die Koordinaten von O, so entsteht die Gleichung von Γ' durch Elimination von x, y aus (26) und den beiden folgenden

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

$$(X - \alpha)(x - \alpha) + (Y - \beta)(y - \beta) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Die auf einer gegebenen Geraden $Ax + By + C = 0$ gelegenen Punkte von Γ' erhält man, wenn man diejenigen Wertepaare X, Y aufsucht, die den obigen Gleichungen und

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

genügen. Um ihre Anzahl zu bestimmen, beachte man zunächst, daß, wenn man X, Y aus den Gleichungen (27) (28) (29) eliminiert, man erhält

$$(Ax + By + C)\left[(y - \beta)\frac{\partial f}{\partial x} - (x - \alpha)\frac{\partial f}{\partial y}\right] + \left[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2\right]\left(A\frac{\partial f}{\partial y} - B\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0. \quad . \; . \quad (30)$$

Die Anzahl der gesuchten Wertepaare X, Y ist also gleich der Anzahl der (variabeln) Schnitte der Kurven (26) und (30), ist daher im allgemeinen gleich $n(n + 1)$. Wenn aber z. B. der Anfang ein vielfacher Punkt von der Ordnung r für Γ ist, so ist er für die Kurve (30) im allgemeinen ein $(r - 1)$-facher, ruft daher in der Ordnung n' von Γ' eine Verminderung von $r(r - 1)$ hervor, ausgenommen wenn dieser vielfache Punkt sich in O befindet, wo er für die Kurve (30) von derselben Vielfachheit ist, also eine Verminderung um r^2 bewirkt. So wird z. B. ein Doppelpunkt von Γ im allgemeinen eine Verminderung von zwei Einheiten hervorrufen, wenn die Doppelpunktstangenten getrennt sind, jedoch von drei Einheiten, wenn sie zusammenfallen. Dies alles zeigt, wenn Γ' außer dem r-fachen Punkte O d Doppelpunkte und k Spitzen hat,

$$n' = n(n + 1) - r^2 - 2d - 3k.$$

Um dieser Relation eine einfachere Form zu geben, beachten wir, daß die Klasse ν gegeben wird durch

$$\nu = n(n + 1) - r(r - 1) - 2d - 3k;$$

zieht man die beiden Gleichungen voneinander ab, so bekommt man

$$n' - \nu = 2n - r, \qquad \text{oder} \quad n' = \nu + 2n - r,$$

und dies ist die gesuchte Formel.

Fünftes Kapitel.

Die Parallelkurven.

260. Behalten wir die in Nr. **252** eingeführten Bezeichnungen bei und erinnern uns der daselbst gemachten Betrachtungen, so werden wir leicht erkennen, daß die Gleichung

$$y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bei Variation der Konstanten c, ∞^1 Kurven darstellt, die mit der durch

$$y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0$$

dargestellten Kurve ihre Normalen gemeinsam haben; in entsprechenden Punkten sind daher ihre Tangenten parallel.[1]) Wir wollen sie, indem wir die von Leibniz[2]) vorgeschlagene Benennung adoptieren, die Parallelkurven der Kurve Γ nennen.[3]) Es ist einleuchtend, daß jede Parallelkurve von Γ auch als die Enveloppe eines Kreises von konstantem Radius c, dessen Mittelpunkt die Kurve Γ durchläuft, aufgefaßt werden kann[4]); die Untersuchung der Parallelkurve ist also ein Spezialfall des Problems der Enveloppen und kann daher durch Differentiation und Elimination gelöst werden. Wenn man jeder Kurve einer Ebene die zu ihr in einem gegebenen Abstande parallele Kurve entsprechen läßt, so erhält man eine besondere Art von Berührungstransformation, die S. Lie Dilatation genannt hat[5]); in ihr entsprechen den Punkten Kreise, den Geraden wiederum Gerade. Die Originalkurve und ihre Parallelkurven haben dieselben Brennpunkte gemeinsam. Ist Γ algebraisch, so sind es auch alle ihre Parallelkurven. Sind n und ν Ordnung und Klasse von Γ, d und δ die Zahl ihrer Doppelpunkte bzw. Doppeltangenten, k und $\varkappa$ die ihrer Spitzen und Wendepunkte, und sind n', ν', d', δ', k', $\varkappa'$ die ent-

1) Vgl. J. Bertrand, *Calcul différentiel* (Paris, 1864) S. 12 und 83.

2) *Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi provocationibus aliisque cognatis et eorum usibus nonnullis* (Acta erudit. 1692; *Leibniz*, ed. Gerhardt, V, S. 280). Eine Andeutung über den Begriff von Parallelkurven findet man schon bei A. Dürer (1525); vgl. S. Günther, *Geschichte des mathem. Unterrichts* (Berlin, 1887) S. 362.

3) Andere ziehen den Namen äquidistante Kurven vor.

4) Daraus kann man folgenden Satz ableiten: „Unterwirft man die Kurve Γ einer Translation, indem man einen ihrer Punkte einen Kreis durchlaufen läßt, so ist die Enveloppe von Γ eine ihrer Parallelkurven" (S. Roberts, *On the order and singularities of the parallel of an algebraic curve*, Proc. London math. Soc. III, 1869—1871). — Ebenfalls kann die Parallelkurve durch den Mittelpunkt eines auf Γ rollenden Kreises von festem Radius beschrieben werden, somit als spezielle Rollkurve aufgefaßt werden.

5) Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen* I. (Leipzig, 1896) S. 14.

sprechenden Zahlen für die Parallelkurve Γ', so sieht man leicht ein, daß im allgemeinen

$$\nu' = 2\nu, \quad \delta' = 2\delta, \quad \varkappa' = 2\varkappa.$$

Durch Anwendung der Plückerschen Formeln ergeben sich daraus die Werte für die anderen Charakteristiken, z. B. $n' = 2(n + \nu)$. Diese Zahlen erfahren jedoch Modifikationen, wenn Γ durch die Kreispunkte (sagen wir f-mal) hindurchgeht und die unendlich ferne Gerade (g-mal) berühren[1]); in diesem Falle findet man nämlich

$$n' = 2n + 2\nu - 2f - 2g; \quad \nu' = 2\nu; \quad n' = 2n;$$
$$k' = 6\nu + 2k - 6f - 6g; \quad f' = 2\nu - 2g; \quad g' = 2g.$$

Bemerkenswert ist der Fall $\nu = f + g$, dann werden diese Formeln

$$n' = 2n, \quad \nu' = 2\nu, \quad k' = 2k, \quad \varkappa' = 2\varkappa, \quad f' = 2f, \quad g' = 2g,$$
$$d' = n^2 + 2d, \quad \delta' = \nu^2 + 2\delta,$$

bei deren Untersuchung Cayley zu der Vermutung gelangte, daß die Kurve Γ' (wie es eintritt, wenn Γ eine Gerade oder ein Kreis ist) in zwei zerfiele, welche dieselben Charakteristiken hätten wie Γ; aber neuere Untersuchungen[2]) haben bewiesen, daß diese Vermutung unbegründet ist und E. Köstlin[3]) bewies, **daß die algebraischen Kurven, deren Konchoiden in bezug auf O zerfallen, die Polarreziproken in bezug auf einen Kreis vom Mittelpunkte O von Kurven sind, deren Parallelkurven zerfallen und als Laguereseche Richtungskurven angesehen werden können** (vgl. Nr. **160**, I. Bd. S. 436).

Zwischen den Längen entsprechender Bogen zweier Parallelkurven besteht eine sehr einfache Beziehung, die A. L. Crelle durch Rechnung nachgewiesen hat[4]), die man aber auch durch eine sehr einfache geometrische Überlegung nachweisen kann, die zugleich zu einer Quadraturformel führt, die man demselben Gelehrten verdankt.

Betrachten wir nämlich (Taf. V, Fig. 55) zwei aufeinanderfolgende Punkte M und N der Kurve Γ und die ihnen entsprechenden M', N' der parallelen Kurve Γ'. Die Geraden MM' und NN' sind dann sowohl zu Γ, als auch zu Γ' normal. Setzen wir nun $MN = ds$, $M'N' = ds'$, die Fläche $MNN'M' = d\mathcal{A}$ und den Winkel,

---

1) S. die schon zitierte Abh. von A. Cayley, *On evolutes and parallel Curves* (Quart. Journ. Math. XI, 1871; Math. Papers VIII, S. 31), daselbst die Parallelkurven auch in einer beliebigen projektiven Maßbestimmung betrachtet.

2) A. Ferrari, *Intorno alla spezzamento delle linee parallele alle curve piane algebriche* (Rend. Acc. Lincei, V. Ser., XIV, 2. Sem. 1905); H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig, 1908) S. 116.

3) *Über die ebenen algebraischen Kurven insbesondere dritter Ordnung, deren Konchoiden zerfallen* (Württemberg. Mitt., II. Reihe, X, 1908).

4) *Mémoire sur le parallélisme des courbes et surfaces courbes* (Ann. de Mathém. XII, 1821); vgl. Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene* (Berlin, 1833) S. 539.

den MM' mit einer festen Geraden bildet, $= v$, so dürfen wir den entsprechenden der Geraden NN' mit $v + dv$ bezeichnen. Ziehen wir nun die Parallele NP zu MM', so ist $\sphericalangle PNN' = dv$; das Viereck $MNPM'$ kann nun als Rechteck angesehen werden, und der Bogen PN' als Kreisbogen mit dem Mittelpunkte N. Ist nun der Abstand der beiden Parallelkurven c, so haben wir

$$PN' = M'N - MN = ds' - ds = c\,dv, \qquad d\mathcal{A} = \text{Fläche } MNN'M'$$
$$= \text{Rechteck } MNPM' + \text{Sektor } PNN' = c\,ds + \tfrac{1}{2}c^2 dv;$$

durch Integrieren erhält man nun

$$s' = s + cv + Const.; \qquad \mathcal{A} = cs + \tfrac{1}{2}c^2 v + Const. \quad . \quad . \quad (2)$$

Dies sind die gesuchten Beziehungen; die erste gibt uns den Bogen der Parallelkurve Γ' als Summe des entsprechenden Bogens von Γ und eines Kreisbogens, die zweite dient zur Bestimmung der Fläche des krummlinigen Vierecks, das von zwei entsprechenden Bögen von Γ und Γ', sowie den gemeinsamen Normalen in den Endpunkten begrenzt ist.

Wenn man die natürliche Gleichung einer Kurve Γ kennt, ist es leicht, die ihrer Parallelkurve Γ' zu finden; da nämlich Γ und Γ' die nämliche Evolute haben, so ergeben sich bei Anwendung von Formel (8) in Nr. **251** folgende Beziehungen

$$R\frac{dR}{ds} = R'\frac{dR'}{ds'}, \qquad R + c = R' + c';$$

setzt man zur Abkürzung $c - c' = a$, so ist $R' = R + a$ und die erste Gleichung wird

$$R\frac{dR}{ds} = (R + a)\frac{dR}{ds}\frac{ds}{ds'},$$

oder

$$\frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{a}{R};$$

hieraus geht hervor, daß man als natürliche Darstellung der Kurve Γ' folgendes Gleichungspaar ansehen kann

$$R' = R + a, \qquad s' = s + a\int\frac{ds}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

261. Die Parallelkurve einer Geraden besteht aus einem Geradenpaar parallel zur gegebenen Geraden in gleichem Abstande; die eines Kreises aus einem Paar konzentrischer Kreise. Neue Kurven erhalten wir dagegen in den Parallelkurven der Kegelschnitte. Betrachten wir zunächst die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Da man jede Parallelkurve derselben als Umriß der Projektion einer Ringfläche (Torus) ansehen kann, wenn diese von einem unendlich fernen Punkte auf eine beliebige Ebene projiziert wird, so ist sie

Toroide genannt worden[1]). Um ihre Gleichung zu finden, betrachten wir einen der sie umhüllenden Kreise, der durch die Gleichung

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

dargestellt sein möge, wo die α und β der Gleichung genügen müssen

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Die Gleichung der Toroide wird man erhalten, wenn man diese Gleichungen mit den Ableitungen nach α und β von folgender kombiniert

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-c^2+\lambda\left[\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right]=0,$$

wo λ ein noch zu bestimmender Parameter ist. Da nun diese Ableitungen sind

$$x-\alpha=\frac{\lambda\alpha}{a^2}, \qquad y-\beta=\frac{\lambda\beta}{b^2},$$

so hat man

$$\alpha=\frac{a^2x}{\lambda+a^2}, \qquad \beta=\frac{b^2y}{\lambda+b^2}.$$

Setzt man diese Werte in (4) und (5) ein, so erhält man

$$\frac{a^2x^2}{(\lambda+a^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(\lambda+b^2)^2}=1, \qquad \frac{\lambda^2x^2}{(\lambda+a^2)^2}+\frac{\lambda^2y^2}{(\lambda+b^2)^2}=c^2; \quad . \; . \; . \quad (5')$$

nun ist die Aufsuchung der Toroidengleichung auf die Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen zurückgeführt[2]); ausgeführt ist diese Rechnung von Catalan (o. a. O.) und Cayley[3]) und ergibt folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)^2\,(a^2y^2+b^2x^2-a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2)^2 \\ +4a^2b^2c^2\,(x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)-27a^4b^4c^4 \\ +18a^2b^2c^2\,(x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)\,(a^2y^2+b^2x^2-a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2) \\ +4\,(a^2y^2+b^2x^2-a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2)^3=0. \quad . \; . \; . \quad (6)\end{aligned}$$

Die Toroide ist demnach eine Kurve achter Ordnung, symmetrisch in bezug auf beide Achsen der Ellipse. Sie besteht aus zwei völlig getrennten in sich geschlossenen Zügen, einem äußeren und einem inneren. Der äußere Zug verläuft immer stetig, bei kleinem c nähert sich seine Gestalt der Ellipse, bei größer werdendem c einem

---

1) E. Catalan, *Sur la toroïde* (Nouv. Ann. Mathém. III, 1844); dort wird die Entdeckung des Zusammenhanges zwischen dem Kreisringe und der Parallelkurve der Ellipse dem Fleur St. Dénis zugeschrieben, und die Wahl des Namens der betr. Kurve auf diesen Zusammenhang zurückgeführt. — Der Beweis ist leicht: Man betrachte den Kreisring als die Parallelfläche eines Kreises K, also als die Enveloppe der Kugeln von gleichem Radius, die ihren Mittelpunkt auf K haben; K projiziert sich als Ellipse, die Kugeln als Kreise.

2) Vgl. A. Cauchy, *Notes sur divers théorèmes rélatifs à la rectification des courbes et à la rectification des surfaces* (C. R. XVIII, 1841).

3) *Sur la courbe parallèle à l'ellipse* (Ann. di Matem. XIII, 1860).

Kreise. Der innere hat je nach der Größe von c ganz verschiedene Gestalt: wenn 1. $c < \frac{b^2}{a}$, so ist er ellipsenähnlich. 2. $c = \frac{b^2}{a}$, ellipsenähnlich mit zwei dreifachen Punkten auf der großen Achse, die aber äußerlich nicht erkennbar, sich nur durch eine scharfe Biegung verraten. 3. $b > c > \frac{b^2}{a}$, mit zwei Doppelpunkten auf der großen Achse und vier reellen Spitzen. 4. $c = b$, vier Spitzen und ein Berührungsknoten im Mittelpunkte. 5. $a > c > b$, vier reelle Spitzen. Dieser Fall ist in Fig. 56 auf Taf. V dargestellt. 6. $c = a$, vier Spitzen und ein Berührungsknoten, aber mit der kleinen Achse als Doppeltangente. 7. $a < c < \frac{a^2}{b}$, vier Spitzen und zwei Doppelpunkte auf der kleinen Achse. 8. $c = \frac{a^2}{b}$, zwei dreifache Punkte wie im Falle 2. aber auf der kleinen Achse. 9. $c = \frac{a^2}{b}$, die Kurve hat wieder ellipsenähnliche Gestalt, die bei wachsendem c in Kreisform übergeht. In den letzten Fällen, wenn $2a > c > 2b$, wird der Zweig sogar die Ellipse schneiden[1]); wenn $c = 2a$ berührt er sie, und wenn $c > 2a$ liegt der innere Zweig ganz außerhalb der Ellipse.

Die Gleichung (6) ist so kompliziert, daß sie wenig geeignet ist, für die Untersuchung der Toroide benutzt zu werden. Besser ist es schon die Gleichungen (5') nach x und y aufzulösen, wobei man folgende beiden Ausdrücke erhält

$$x = \frac{\lambda + a^2}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda^2 - b^2c^2}{a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{\lambda + b^2}{\lambda}\sqrt{\frac{a^2c^2 - \lambda^2}{a^2 - b^2}}, \quad \ldots \quad (7)$$

also eine parametrische Darstellung.

Auch folgende analytische Darstellung kann man anwenden. Es sei $P_1\,(x_1, y_1)$ ein Punkt der Ellipse, $P\,(x, y)$ der entsprechende der Toroide; da die Strecke $P_1P = c$ und normal zur Ellipse ist, so bestehen folgende Gleichungen:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = c^2, \quad \frac{x - x_1}{b^2 x_1} = \frac{y - y_1}{a^2 y_1},$$

und daher ist

$$x = x_1 \pm \frac{b^2 c x_1}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}}, \quad y = y_1 \pm \frac{a^2 c y_1}{\sqrt{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}}; \quad \ldots \quad (8)$$

Nehmen wir das + Zeichen, so erhalten wir den äußeren Kurventeil, das — Zeichen, den inneren. Zu beachten ist noch, daß die x_1, y_1

---

1) Daß sich zwei parallele Kurven schneiden, und daß die eine Spitzen hat, während die andere kontinuierlich verläuft, erscheint geradezu paradox. Dieser Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß die Parallelkurven ihrer innern Natur nach Tangentengebilde sind; für eine Kurve als Tangentengebilde aber ist eine Spitze keine Singularität, weil ja in einem solchen Punkte die Tangente sich kontinuierlich weiter bewegt. (Anm. d. Übers.)

durch die Gleichung $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ miteinander verknüpft sind; daher kann man setzen $x_1 = a\cos\omega$, $y_1 = b\sin\omega$, und dann schreiben

$$x = a\cos\omega + \frac{bc\cos\omega}{\sqrt{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}}, \quad y = a\sin\omega + \frac{ac\sin\omega}{\sqrt{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}}.$$

Aus dieser parametrischen Darstellung kann man ebenfalls entnehmen, daß die Toroide 8 **Doppelpunkte** hat: vier liegen im Endlichen, zwei auf der x-Achse, zwei auf der y-Achse, von diesen beiden Paaren ist höchstens eins reell; die anderen vier liegen im Unendlichen, zwei fallen mit den unendlich fernen Punkten der Ellipse, zwei mit den Kreispunkten zusammen. Sie hat ferner **12 Spitzen**: acht von diesen sind immer imaginär, vier können reell sein; sie liegen an den Stellen, wo der Krümmungsradius der Ellipse gleich c ist. Sie hat **keine Wendepunkte**, aber **zwei Doppeltangenten**, die nur dann reell sind, wenn die Doppelpunkte imaginär, und zugleich die Spitzen reell sind. Aus dem Obigen folgt dann: **Die Toroide ist von der vierten Klasse und vom Geschlechte Eins.** Dasselbe ergibt sich, wenn man die Tangentialgleichung der Kurve bestimmt. Hierzu benutzen wir die Gleichungen, die entstehen, wenn man die (5′) nach x, y auflöst; diese liefern dann als Gleichung der Tangente im Punkte (λ)

$$x\sqrt{a^2c^2 - \lambda^2} + y\sqrt{\lambda^2 - b^2c^2} = (\lambda + c^2)\sqrt{a^2 - b^2};$$

daher sind die Koordinaten u und v der Tangente

$$u = \frac{\sqrt{a^2c^2 - \lambda^2}}{(\lambda + c^2)\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad v = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2c^2}}{(\lambda + c^2)\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Durch Elimination von λ ergibt sich dann

$$[(a^2 - c^2)v^2 + (b^2 - c^2)u^2 - 1]^2 = 4c^2(u^2 + v^2) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als Tangentialgleichung der Toroide; sie ist bedeutend einfacher als die Punktgleichung[1]). Überhaupt lassen sich die Parallelkurven bequemer vermittels Linienkoordinaten untersuchen; insbesondere eignen sich für die der Kegelschnitte die bekannten Unverzagt-Schweringschen Linienkoordinaten[2]).

Wenden wir auf die Toroide die Crelleschen Sätze (S. 280) über die Rektifikation und Quadratur der Parallelkurven an, so erkennt man: **Die Differenz zwischen der Länge des äußeren und des inneren Zweiges der Toroide ist gleich $4\pi c$,** wenn $2c$ ihr gegenseitiger Abstand ist; **die von ihnen umschlossene Fläche ist gleich einem Recht-**

1) Weitere Eigenschaften der bezüglichen Kurven findet man in einer Abh. von F. Gomes Teixeira, *Sur les courbes parallèles à l'ellipse* (Mém. cour. par. l'Ac. de Belgique LVIII, 1898).

2) K. Schwering, *Die Parallelkurve der Ellipse als Kurve vom Range Eins, unter Anwendung eines neuen Linienkoordinatensystems* (Progr. Brilon, 1878) und *Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten* (Leipzig, 1884) S. 69.

eck, dessen Länge gleich dem Umfange der gegebenen Ellipse, dessen Breite gleich $2c$ ist.[1])

Wechseln wir in den Formeln (7) und (8) das Vorzeichen, so bekommen wir die analytische Darstellung der Parallelkurve der Hyperbel; die früheren Doppeltangenten werden dann zu Asymptoten der Kurve. Eine ähnliche analytische Darstellung hat die Parallelkurve der Parabel, welche von der sechsten Ordnung und vierten Klasse ist. Die bezüglichen Rechnungen auszuführen, wollen wir dem Leser überlassen.

262. Eine Kurvenfamilie, bei welcher die Untersuchung der Parallelkurven leicht wird, ist die der Epi- bzw. Hypozykloiden.[2]) Benutzen wir nämlich die Gleichung (4_e) aus Nr. **204**, so sehen wir, daß die Parallelkurve zu der durch diese Gleichungen für den Fall $h = r$ dargestellten Epizykloide, die Enveloppe des Kreises:

$$\left[x - \frac{n+1}{n} r \cos n\psi + r \cos(n+1)\psi\right]^2 + \left[y - \frac{n+1}{n} r \sin n\psi + r \sin(n+1)\psi\right]^2 = c^2$$

ist; kombiniert man diese mit ihrer Ableitung nach ψ, so erhält man

$$x = \frac{n+1}{n} r \cos n\psi - r \cos(n+1)\psi \mp c \sin \frac{2n+1}{2}\psi,$$

$$y = \frac{n+1}{n} r \sin n\psi - r \sin(n+1)\psi \pm c \cos \frac{2n+1}{2}\psi,$$

wodurch die fragliche Kurve dargestellt wird. Führen wir komplexe Variabeln ein, so erhalten wir

$$z = \frac{n+1}{n} re^{ni\psi} - re^{(n+1)i\psi} - ke^{\frac{2n+1}{2}i\psi}.$$

Erinnern wir uns nun der in Note 2) S. 101 erwähnten Gleichung, so ergibt sich: **Die Parallelkurven der gemeinen Epi- oder Hypozykloiden sind Zykloiden zweiter Ordnung.**

Ein besonderes Interesse bietet der Fall der vierspitzigen Hypozykloide oder regulären Astroide, der zu einer wichtigen Folgerung führt, zu deren Nachweis wir folgende Bemerkungen vorausschicken.

Zwei beliebige sich schneidende Geraden können immer durch Gleichungen von der Form

$$y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$$

dargestellt werden. Es sei ferner

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$$

---

1) Dienger, *Über die Rektifikation und Quadratur der Toroide* (Arch. Math. Phys. IX, 1847).

2) S. einen Aufsatz von Audibert im *Intermédiaire* III, 1896, S. 72—73, wo die Rektifikation dieser Kurven behandelt wird.

die Gleichung einer beliebigen Geraden, aus welcher die beiden obigen eine Strecke von der Länge l ausschneiden. Es ergibt sich dann leicht, daß

$$p = \frac{l \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha};$$

daher kann die von diesen Geraden eingehüllte schiefe Astroide angesehen werden als definiert durch die Gleichung (vgl. Nr. **251**)

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{l \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha},$$

oder die äquivalente

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} [\cos 2\varphi + \cos 2\alpha]. \quad . \quad (11)$$

Differenzieren wir diese, so bekommen wir

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \sin 2\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und kombinieren wir sie mit der vorigen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \left[\frac{3}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2} \cos 3\varphi + \cos 2\alpha \cdot \cos\varphi\right] \\ y &= \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \left[-\frac{3}{2} \sin\varphi - \frac{1}{2} \sin 3\varphi + \cos 2\alpha \cdot \sin\varphi\right] \end{aligned}\right\} . \quad . \quad (13)$$

Aus dieser parametrischen Darstellung der schiefen Astroide erhält man folgenden Wert für den Differentialquotienten des Bogens

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} (\cos 2\alpha - 3 \cos 2\varphi),$$

und nach Integration

$$s = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \left(\varphi \cos 2\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\varphi\right) + Const. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Differenzieren wir Gleichung (12) von neuem, so erhalten wir

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{2l}{2 \sin 2\alpha} \cos 2\varphi;$$

daher wird der Krümmungsradius der schiefen Astroide gegeben durch

$$R = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} (\cos 2a - 3 \cos 2\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Setzen wir nun $2\varphi = \omega + \frac{\pi}{4}$ und wählen den Anfang und den positiven Sinn in geeigneter Weise, so können die Gleichungen (14) und (15) ersetzt werden durch

$$R = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} (3 \sin\omega + \cos 2\alpha), \quad s = \frac{l}{4 \sin 2\alpha} (3 \cos\omega - \omega \cos 2\alpha). \quad (16)$$

Da nun diese R und s in Funktionen der unabhängigen Variabeln ω geben, so ist das System derselben äquivalent mit der natürlichen Gleichung der schiefen Astroide (welche man eben durch Elimination von ω aus (16) erhalten würde). Beachten wir nun, daß die Gleichungen (16) von folgender Form sind:

$$R = k \sin\omega + a, \quad s = \frac{1}{2} (k \cos\omega - a\omega), \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

so entsteht die Frage, ob zwei Gleichungen vom Typus (17) immer eine Astroide darstellen. Um diese zu beantworten, beachten wir, daß die Gleichungen (17) sich mit (16) identifizieren, wenn man setzt

$$k = \frac{3l}{2\sin 2\alpha}, \quad a = \frac{l}{2\operatorname{tg} 2\alpha};$$

hieraus ergibt sich

$$\cos 2\alpha = \frac{3a}{k}, \qquad l = \frac{2\sqrt{k^2 - (3a)^2}}{3},$$

und diese Gleichungen liefern für α und l nur dann reelle Werte, wenn

$$|k| > 3\,|a|. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Wir können daher schließen: **Die Gleichungen (17) stellen nur dann eine Astroide dar, wenn die Konstanten a und k der Bedingung (18) genügen.** Wenn dies nicht zutrifft, so stellen die Gleichungen (17) eine Kurve dar, die nicht mehr in reeller Weise wie die Astroide in Nr. **106** (Bd. I, S. 265) erzeugt werden kann; sie soll als Parastroide bezeichnet werden[1]), und kann auf reelle Weise durch ein Verfahren konstruiert werden, das wir jetzt darlegen wollen: Betrachten wir die reguläre durch folgende Gleichungen dargestellte Astroide (s. die Gleichung (16), in welchen $2\alpha = \pi$ zu setzen ist)

$$R = \frac{3l}{2}\sin\omega, \qquad s = \frac{3l}{4}\cos\omega,$$

und benutzen die Formel (2), so erhalten wir für die Parallelkurve derselben

$$R = \frac{3l}{2}\sin\omega + a, \qquad s = \frac{3l}{4}\cos\omega - \frac{a}{2}. \quad \ldots \quad (19)$$

Folglich: **Die Parallelkurve einer regulären Astroide ist im allgemeinen eine Parastroide.** Aus der Gleichung (18) ersieht man, daß sie nur dann eine Astroide ist, wenn

$$|a| < \frac{l}{2}.$$

Somit ergibt sich die Notwendigkeit, die Tragweite eines von Salmon dargelegten Satzes[2]) einzuschränken, wie aus der aufmerksamen Prüfung der angewandten Begründung hervorgeht. Überdies verlangen die auf S. 280 aufgestellten Formeln, daß die fragliche Kurve von der 12. Ordnung sei; nun zeigt uns die geometrische Überlegung leicht, daß die Parallelkurve der regulären Astroide aus zwei kongruenten Kurven besteht; jede von diesen gehört teils dem äußeren, teils dem inneren Zweige an, wie es Taf. V, Fig. 57 zeigt.

263. Wir schließen dieses Kapitel mit einem Satze, der die Theorie der Parallelkurven mit der Betrachtung gewisser Hüllkurven

1) G. Loria, *Les courbes parallèles aux astéroïdes sont-elles toujours des astéroïdes?* (Mathésis, 2e Sér. X, 1900); vgl. die darauf folgende *Note sur l'astéroïde et ses courbes parallèles* von J. Neuberg, wo auf ältere Arbeiten von A. Mannheim und M. d'Ocagne über dasselbe Thema hingewiesen wird.

2) Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Kurven,* II. Aufl. (Leipzig, 1882) S. 129.

in Zusammenhang bringt und folgendermaßen lautet: **Die Hüllkurve H_r der Kreise, deren Zentrum auf einer Kurve Γ liegt und die einen festen Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius r berühren, ist die Parallelkurve der analogen Hüllkurve H_0, bei der $r = 0$ ist,** d. h. der Hüllkurve der Kreise, deren Zentrum auf Γ liegt, und die alle durch den festen Punkt O gehen.

Beweis: Hat eine Kurve die folgende parametrische Darstellung

$$x = \varphi(\lambda), \qquad y = \psi(\lambda),$$

so kann ihre Parallelkurve im Abstande n dargestellt werden durch

$$x = \varphi(\lambda) - \frac{n \cdot \psi'(\lambda)}{\sqrt{\overline{\varphi'(\lambda)}^2 + \overline{\psi'(\lambda)}^2}}, \quad y = \psi(\lambda) + \frac{n \cdot \varphi'(\lambda)}{\sqrt{\overline{\varphi'(\lambda)}^2 + \overline{\psi'(\lambda)}^2}}. \quad (20)$$

Sind nun ξ, η die parametrischen Ausdrücke der Koordinaten eines beliebigen Punktes von Γ, so haben die ∞^2 im Satze genannten Kreise offenbar die allgemeine Gleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \left(r + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)^2,$$

oder einfacher

$$\xi x + \eta y = \frac{x^2 + y^2 - r^2}{2} - r\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Um deren Enveloppe zu erhalten, differenzieren wir diese nach dem Parameter λ und erhalten

$$\xi' x + \eta' y = -r \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus dieser Gleichung ist nun λ zu eliminieren, doch ist die Elimination nur ausführbar, wenn die Funktionen ξ, η spezifiziert sind. Jedoch kann man die parametrische Darstellung der Enveloppe erhalten, wenn man die Gleichung (21), (22) nach x und y auflöst, sie liefern dann

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x^2 + y^2 - r^2}{2(\xi\eta' - \xi'\eta)}\,\eta' - \frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ y &= -\frac{x^2 + y^2 - r^2}{2(\xi\eta' - \xi\eta')}\,\xi' - \frac{r\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \end{aligned}\right\}.$$

Quadriert und addiert man diese beiden, so erhält man

$$x^2 + y^2 - r^2 = \frac{(x^2 + y^2 - r^2)^2\,(\xi'^2 + \eta'^2)}{4(\xi\eta' - \xi'\eta)^2} - \frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

folglich

$$\frac{x^2 + y^2 - r^2}{2(\xi\eta' - \xi'\eta)} = \frac{2(\xi\eta' - \xi'\eta)\left(r + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)}{(\xi'^2 + \eta'^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Infolgedessen werden die vorigen Ausdrücke für x, y zu

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2(\xi\eta' - \xi'\eta)}{\xi'^2 + \eta'^2}\,\eta' - r\,\frac{2\xi'\eta\eta' - \xi\eta'^2 + \xi\xi'^2}{(\xi'^2 + \eta'^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \\ y &= \frac{2(\xi'\eta - \xi\eta')}{\xi'^2 + \eta'^2}\,\xi' - r\,\frac{2\eta'\xi\xi' - \eta\xi'^2 + \eta\eta'^2}{(\xi'^2 + \eta'^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Dies ist die parametrische Darstellung der betrachteten Hüllkurve. Setzt man nun die beiden ersten Glieder gleich $\varphi(\lambda)$ bzw. $\psi(\lambda)$, so sieht man, daß die Gleichungen (23) vom Typus der Gleichung (20) sind, wenn $u = r$ gesetzt wird, und somit ist der Satz bewiesen[1]).

Kennt man statt der parametrischen Darstellung von Γ ihre kartesische Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$, so ist die parametrische Darstellung von H_r, wie eine nicht schwere Berechnung zeigt,

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + 2\,\frac{r+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \cdot \frac{\xi\frac{df}{d\xi}+\eta\frac{df}{d\eta}}{\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2} \cdot \frac{df}{d\xi} \\ y &= -\frac{r\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + 2\,\frac{r+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \cdot \frac{\xi\frac{df}{d\xi}+\eta\frac{df}{d\eta}}{\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2} \cdot \frac{df}{d\eta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (24)$$

Wenden wir den obigen Satz und die Cayleyschen Formeln (S. 280) an, so lassen sich die Plückerschen Charakteristiken von H_r finden, wenn man die von H_0 kennt. Ist z. B. Γ ein Kreis, so ist H_0 (s. Bd. I, S. 150) eine Pascalsche Schnecke bzw. eine Kardioide.[2])

Sechstes Kapitel.

Die Radialen.[3])

264. Nach dem Vorschlage von R. Tucker[4]) bezeichnet man mit dem Namen Radiale einer ebenen Kurve Γ den Ort Γ_0 der Endpunkte der von einem festen Punkte O ausgehenden und mit den Krümmungsradien der Kurve Γ äquipollenten (d. h. gleichen und gleichgerichteten) Strecken. Aus dieser Definition ergibt sich: 1. daß die Radiale für eine Kurve eine ähnliche Bedeutung hat wie der Hodograph[5]) für eine Bewegung; so wie dieser eine graphische Darstellung der Änderungen der Geschwindigkeit liefert, so gibt diese

1) G. Loria, *Sopra certi inviluppi di cerchi* (Math. Annalen LXIV, 1907).

2) S. die S. 150 Bd. I zitierte Diss. von Losehand, oder Math. Ann. LXIV, 1907.

3) G. Loria, *Intorno alle radiali delle curve piane* (Rendic. Circ. matem. Palermo XVI, 1902) und *La radiale di una curva algebrica* (Period. matem. XVII, 1901). Die Anwendbarkeit der Vektoranalysis zur Erforschung der Eigenschaften der Radialen wurde von C. Burali-Forti (*Sulle radiali*; Rend. Circ. matem. Palermo, XVI, 1902) bewiesen; während die Nützlichkeit der magischen Gleichung der Geraden (vgl. Nr. **252**) von P. Ernst im Aufsatze *Die Radiale einer ebenen Kurve* (Arch. Math. Phys.,' III. Reihe, XIV, 1908) hervorgehoben wurde; so hat Ernst mehrere schöne Sätze über diese Kurvenklasse entdeckt.

4) *On radial curves* (Proc. London Math. Soc. I, 1865).

5) R. W. Hamilton, *Elements of Quaternions* (London, 1866) S. 100.

ein Bild davon, wie sich die Krümmung der Kurve ändert; 2. daß, wenn man den festen Punkt O verlegt, die Radiale ihre Größe und Lage beibehält, also nur eine Verschiebung in der Ebene erleidet.

Es sei nun

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die auf ein gewöhnliches kartesisches System bezogene Gleichung der beliebigen Kurve Γ. Wir nehmen an, daß die Funktion f partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitze, und bezeichnen diese bzw. mit $f_1, f_2, f_{11}, f_{12} = f_{21}$ und f_{22}. Aus bekannten Formeln (s. S. 249) ergibt sich dann, daß die Projektionen der Strecke zwischen dem Punkte $P(x, y)$ von Γ und dem entsprechenden Krümmungszentrum $C(x_1, y_1)$, also die Größen $x_1 - x$ und $y_1 - y$ die Produkte sind aus f_1 bzw. f_2 und dem Quotienten

$$(f_1^2 + f_2^2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Sind nun α, β die Koordinaten des festen Punktes O, und x_0, y_0 die des Punktes P_0 auf Γ_0, welcher dem Punkte $P(x, y)$ auf Γ entspricht, so ist offenbar

$$x_0 - \alpha = x_1 - x, \qquad y_0 - \beta = y_1 - y,$$

und daher zufolge der vorigen Gleichung:

$$x_0 = \alpha + (f_1^2 + f_2^2) : \Delta, \qquad y_0 = \beta + (f_1^2 + f_2^2) : \Delta, \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn wir die in (2) vorkommende Determinante der Einfachheit halber mit Δ bezeichnen. Für jedes Wertepaar x, y, welches der Gl. (1) genügt, liefern uns diese Gleichungen die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Radialen; man würde also durch Elimination von x und y aus den drei Gleichungen (1) und (3) zu Gleichungen der Radialen gelangen. Diese Elimination ist nicht im allgemeinen ausführbar, aber auch ohne sie auszuführen kann man den Grad der resultierenden Gleichung, d. i. die Ordnung der Radiale bestimmen für den Fall, daß f eine rationale algebraische Funktion von n^{tem} Grade ist. Betrachten wir nämlich eine beliebige Gerade g in der Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

sein möge. Wenn g den Punkt P_0 enthält, dessen Koordinaten durch (3) gegeben sind, so hat man

$$(A\alpha + B\beta + C)\Delta + (Af_1 + Bf_2)(f_1^2 + f_2^2) = 0. \quad . \quad . \quad (4)$$

Dies ist aber die Gleichung einer Kurve, im allgemeinen von der Ordnung $3(n-1)$, die die gegebene also in $3n(n-1)$ Punkten schneidet, in der Weise, daß die entsprechenden Punkte der Radiale zugleich auf die Gerade g fallen. Dies berechtigt uns zu dem Schlusse: **Die Radiale einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung ist im all-**

gemeinen von der Ordnung $3n(n-1)$. Beispiele: Die Radiale eines Kegelschnittes ist im allgemeinen eine Kurve sechster Ordnung, welches Resultat schon von Tucker gefunden wurde (vgl. Bd. I, S. 263); die einer Kurve dritter Ordnung ist von der Ordnung 18; usw.

Die gefundene Ordnungszahl $3n(n-1)$ erfährt jedoch beträchtliche Änderungen, wenn die Originalkurve vielfache Punkte enthält. Nehmen wir nämlich an, daß diese im Anfange einen p-fachen Punkt habe, so kann man schreiben

$$f(x, y) = f^{(p)} + f^{(p+1)} + \cdots + f^{(n)},$$

wo $p > 1$ und $f^{(k)}$ $(k = p, p+1, \ldots, n)$ eine binäre Form vom Gerade k in x, y ist; $f^{(p)} = 0$ stellt dann die Gruppe der p Tangenten im Anfangspunkte dar. Setzen wir nun diesen Wert von f in die Gleichungen (3) ein und ordnen nach fallenden Potenzen von x, y, so erkennen wir, daß die Gruppe der Glieder niedrigsten Grades gegeben wird durch

$$(A\alpha + B\beta + C) \cdot \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & f_{1}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & f_{2}^{(p)} \\ f_{1}^{(p)} & f_{2}^{(p)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenden wir jetzt den Eulerschen Satz über die homogenen Funktionen an und führen an der obigen Determinante einige übliche Transformationen aus, so kann dieser Ausdruck nach und nach in folgenden umgewandelt werden

$$\frac{A\alpha + B\beta + C}{p-1} \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & x f_{11}^{(p)} + y f_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & x f_{12}^{(p)} + y f_{22}^{(p)} \\ f_{1}^{(p)} & f_{2}^{(p)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{A\alpha + B\beta + C}{p-1} \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & 0 \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & 0 \\ f_{1}^{(p)} & f_{2}^{(p)} & -(x f_{1}^{(p)} + y f_{2}^{(p)}) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{p}{p-1} (A\alpha + B\beta + C) f^{(p)} \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Ausdrucke geht hervor, daß der Anfangspunkt für die durch Gleichung (4) dargestellte Hilfskurve ein Punkt von der Vielfachheit $p + 2(p-2) = 3p - 4$ ist, und daß die Tangenten dort an diese Kurve insgesamt bilden: 1. die p Tangenten an die gegebene Kurve Γ; 2. die Hessesche der von diesen gebildeten Gruppe. In dem allgemeinen Falle, daß alle Tangenten an Γ im Anfangspunkte getrennt sind, sind in diesem Punkte $p(3p-4) + p = 3p(p-1)$

Schnitte der Hilfskurve mit Γ vereint, daher: **Jeder p-fache Punkt der Originalkurve mit lauter getrennten Tangenten verursacht bei der Ordnung der Radiale eine Verminderung von $4p(p-1)$ Einheiten.** Um auch in dem Falle, daß von den Tangenten mehrere zusammenfallen, den Einfluß zu bestimmen, ist dieselbe Methode anzuwenden, die das Verhalten der Hesseschen in einem vielfachen Punkte der Fundamentalkurve aufdeckt, und es ist zu beachten: 1. daß ein s-faches Element $(s<p)$ einer Gruppe von p Elementen einer Form I. Spezies ein $2(p-1)$-faches für die Hessesche der Gruppe ist; 2. daß die Hessesche einer Gruppe von p zusammenfassenden Elementen unbestimmt ist.

Wenden wir das Vorige auf den Fall $p=2$ an, so bekommen wir: **Jeder Doppelpunkt mit getrennten Tangenten bewirkt bei der Ordnung der Radiale eine Verminderung um sechs Einheiten**[1]. Hat aber die Originalkurve im Anfangspunkte eine Spitze, mit der x-Achse als Spitzentangente, so sieht man leicht ein, daß die Hilfskurve (4) ebendaselbst einen dreifachen Punkt hat, in welchem zwei Tangenten mit der Spitzentangente zusammenfallen; daraus ergibt sich eine Verminderung der Ordnung um 8 Einheiten. Hat nun die Originalkurve d Doppelpunkte und k Spitzen, so erhält man für die Ordnung n_r der Radiale

$$n_r = 3n(n-1) - 6d - 8k.$$

Nun ist bekanntlich die Zahl der Wendepunkte w einer Kurve n^{ter} Ordnung

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8k,$$

folglich ist $\quad n_r - w = 3n, \quad$ oder $\quad n_r = 3n + w.$

Das heißt: **Die Ordnung der Radiale einer algebraischen Kurve ist im allgemeinen gleich der dreifachen Ordnung, vermehrt um die Zahl der Wendepunkte dieser Kurve.** Erinnern wir uns noch des in Nr. **251** gefundenen Satzes, so können wir auch sagen: **Die Radiale einer algebraischen Kurve ist von derselben Ordnung wie die Evolute.**

---

1) Eine Bestätigung dieses Resultats ist folgende: Man denke sich eine Kurve Γ, die aus ν Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ besteht, deren Ordnungen bzw. $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ seien und keine vielfachen Punkte haben. Γ ist dann als Kurve von der Ordnung $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu$ mit $\Sigma n_i \cdot n_k$ Doppelpunkten $(i, k = 1, 2, \ldots, \nu)$, zufolge des obigen Satzes muß dann die Radiale von Γ von der Ordnung sein

$$3(n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu)(n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - 1) - 6\sum_{i,k} n_i n_k$$
$$= 3(n_1 + n_2 + \cdots n_\nu)^2 - 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu) - 6\sum_{i,k} n_i n_k$$
$$= 3(n_1{}^2 + n_2{}^2 + \cdots + n_\nu^2) - 3(n_1 + n_2 + \cdots n_\nu) = \sum_i 3n_i(n_i - 1)$$

und dies Resultat mußte eintreten, da die Radiale von Γ nichts anderes ist als die Gesamtheit der Radialen von $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$.

Ist die Kurve Γ rational und hat die gewöhnlichen singulären Punkte von der Vielfachheit $p_1, p_2, p_3 \ldots$, so ist

$$\sum_i \frac{p_i(p_i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Die Ordnung der Radiale Γ_0 wird also sein

$$3n(n-1) - \sum_i 3p_i(p_i-1) = 3n(n-1) - 3(n-1)(n-2)$$
$$= 6(n-1);$$

folglich: **Die Radiale einer rationalen Kurve n^{ter} Ordnung ist im allgemeinen von der Ordnung $6(n-1)$**[1]. Diese Zahl erfährt aber Abänderungen, wenn die Kurve mit der unendlich fernen Geraden besondere Beziehungen hat; um dies an einem Beispiele zu zeigen, betrachten wir die durch

$$x = \xi(\tau), \qquad y = \eta(\tau) \quad . \quad . \quad \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dargestellte Kurve, wo ξ und η ganze Polynome n^{ten} Grades sind; diese Kurve hat ihre sämtlichen Schnitte mit der unendlich fernen Geraden in einem Punkte vereinigt, und ist allgemeiner als die Parabelen höherer Ordnung. Als parametrische Darstellung der entsprechenden Radiale findet man leicht

$$x = \frac{\eta'(\xi'^2 + \eta'^2)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}, \qquad y = \frac{\xi'(\xi'^2 + \eta'^2)}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'};$$

die Radiale ist also eine rationale Kurve nur von der Ordnung $3(n-1)$; für $n = 2$ erhalten wir: **Die Radiale einer gewöhnlichen Parabel ist eine Kurve dritter Ordnung.**

Schließlich möge noch hervorgehoben werden, was sich aus der Definition der Radiale leicht ergibt: **Den Wendepunkten und den unendlich fernen Punkten der Originalkurve entsprechen die unendlich fernen Punkte der Radiale**; auch analytisch läßt sich dies mit Hilfe der Gl. (3) nachweisen.

265. Aus den obigen Entwicklungen ersieht man schon, daß die Untersuchung der Radiale einer durch eine kartesische Gleichung gegebenen Kurve — selbst wenn man sich auf algebraische Kurven beschränken wollte — mühsame Forschungen erheischt, und daß die Bestimmung ihrer Gleichung im allgemeinen unausführbare Eliminationen erfordert, oder in den günstigeren Fällen sehr mühevolle. Es dürfte sich daher folgende Bemerkung als nützlich erweisen: **Im allgemeinen ist es möglich, durch eine begrenzte Anzahl wohl bestimmter Operationen die Gleichung der Radialen einer Kurve in Polarkoordinaten zu finden, wenn man deren natürliche Gleichung**

1) Vgl. das Beispiel der Kegelschnitte I. Bd., S. 262.

kennt. Es sei diese, wenn wie sonst s den Bogen, R den Krümmungsradius bedeutet,

$$s = \varphi(R). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Ist nun θ der Winkel der Normalen im Punkte P der gegebenen Kurve (also die Gerade, auf welcher der Krümmungsradius in P liegt) mit einer festen Geraden, z. B. der x-Achse, so hat man

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \quad \text{oder} \quad ds = R \cdot d\theta.$$

Aus der Gleichung (6) folgt nun

$$ds = \varphi'(R) \cdot dR,$$

daher

$$R \cdot d\theta = \varphi'(R) \cdot dR,$$

bzw.

$$\theta = \int \frac{\varphi'(R) \cdot dR}{R}.$$

Bezeichnen wir nun mit ϱ, ω die Polarkoordinaten des dem Punkte P entsprechenden Punktes P_0 der Radialen, und kommen überein, als Pol immer den gemeinsamen Ausgangspunkt der die Radiale erzeugenden Strecken zu nehmen, so wird offenbar $\varrho = R$ sein und $\omega = \theta$; deswegen ist die Polargleichung dieser

$$\omega = \int \frac{\varphi'(\varrho) \cdot d\varrho}{\varrho}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wobei zu beachten ist, daß die Integrationskonstante nur Einfluß auf die Lage der dargestellten Kurve hat.

Für den Krümmungsradius R_0 der Radiale ergibt sich leicht eine Formel aus dem Ausdrucke desselben in Polarkoordinaten

$$R_0 = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho\,\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}.$$

Da nämlich für die Radiale $\varrho = R$, $\omega = \theta$, so hat man, wenn wie gewöhnlich R_1 und R_2 die Krümmungsradien der ersten und zweiten Evolute sind,

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{dR}{d\theta} = R_1 \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = \frac{d^2R}{d\theta^2} = R_2;$$

daraus folgt

$$R_0 = \frac{(R^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2R_1^2 - RR_1} \text{ [1]}.$$

B e i s p i e l e. Wenden wir obiges Rechnungsverfahren auf spezielle ebene Kurven an, so erhalten wir Sätze, die uns Beziehungen zwischen Kurven ganz verschiedener Natur enthüllen: die hervorstechendsten

---

1) Dem Verfasser brieflich mitgeteilt von E. Cesàro im J. 1902. Vgl. auch Sucharda, *Construction de la normale et du centre de courbure de la radiale d'une courbe plane quelconque* (Bull. international Ac. Sciences, IV, Prag 1897).

Resultate, zu denen man auf diese Weise gelangt, mögen hier Platz finden.

I. Wir betrachten eine beliebige Epizykloide, etwa die durch die natürliche Gleichung
$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{R^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
dargestellte. Dann ist
$$s=a\sqrt{1-\frac{R^2}{b^2}}.$$
Differenzieren wir und setzen dann an Stelle von ds seinen Wert $R\cdot d\theta$, so haben wir
$$\frac{b}{a}d\theta=-\frac{d\frac{R}{b}}{\sqrt{1-\frac{R^2}{b^2}}},$$
folglich ist die Polargleichung der Radialen
$$\frac{b\omega}{a}=\arccos\frac{\varrho}{b},$$
oder
$$\varrho=b\cdot\cos\frac{b\omega}{a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$
Da nun diese (vgl. Nr. **133**) immer eine Rhodonee darstellt, so gewinnen wir als Resultat: **Die Radiale einer beliebigen Epizykloide ist eine Rhodonee.** Ist das Verhältnis $\frac{b}{a}$ rational, so sind die beiden Kurven algebraisch; die zweite ist von der Ordnung $a+b$, wenn a und b beide ungerade sind, andernfalls von der Ordnung $2(a+b)$ (Bd. I S. 363). Z. B. die Radialen einer Kardioide, einer dreispitzigen Hypozykloide und einer regulären Astroide (Kurven von der Ordnung 4, 4, 6) haben bzw. Polargleichungen von folgendem Typus
$$\varrho=b\cos\frac{\omega}{3},\qquad \varrho=b\cos 3\omega,\qquad \varrho=b\cos 2\omega$$
und sind von der Ordnung bzw. 4, 4, 6.

II. Wir betrachten mit E. Cesàro[1]) die Kurven mit folgender natürlichen Gleichung
$$s=\int\frac{\lambda\cdot dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\mu}-1}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$
Bei Anwendung des dargelegten Verfahrens erhält man
$$d\theta=\frac{\lambda\cdot dR}{R\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\mu}-1}}.$$
Nun ist die rechte Seite ein binomisches Differential, das immer integrierbar ist; setzt man nämlich
$$\left(\frac{R}{a}\right)^{\mu}-1=y^2,$$

1) *Sur une classe de courbes planes remarquables* (Nouv. Ann. Mathém. 3e Sér. XIX, 1900).

so findet man
$$d\theta = \frac{2\lambda}{\mu} \cdot \frac{dy}{y^2+1},$$
daher
$$\theta = \frac{2\lambda}{\mu} \operatorname{arc\,tg} y,$$
wenn man, was ja erlaubt ist, die Integrationskonstante gleich Null setzt. Setzt man für y seinen Wert wieder ein, so ergibt sich, daß
$$\varrho = \frac{a}{\cos^{\frac{2}{\mu}} \frac{\mu \omega}{2\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$
die Polargleichung der gesuchten Radiale ist. — Die durch diese Gleichung dargestellten Kurven sind (soweit uns bekannt) in ihrer Allgemeinheit noch nicht untersucht worden; wenn man jedoch den Konstanten λ und μ spezielle Werte zuerteilt, so können sowohl die Gleichungen (10) als auch (11) schon bekannte Kurven darstellen, von denen wir die hauptsächlichsten anführen wollen.

a) $\mu = -2$, $\lambda = 1$; Gleichung (10) stellt dann eine Zykloide dar, (11) wird zu $\varrho = a \cos \omega$; folglich: **Die Radiale einer Zykloide ist ein Kreis**, bei welchem der feste Punkt, von dem die den Krümmungsradien äquipollenten Strecken ausgehen, auf der Peripherie liegt.

b) $\mu = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$; alsdann gehört (10) einer Kettenlinie an, und (11) wird zu $\varrho = \frac{a}{\cos^2 \omega}$; vergleichen wir dies mit Gleichung (8) auf S. 383, I. Bd., so schließen wir: **Die Radiale einer Kettenlinie ist eine Kampyla des Eudoxus.**

c) $\mu = 2$, $\lambda = 1$; (10) stellt dann eine Kettenlinie gleichen Widerstandes dar (vgl Nr. **235**), während (11) übergeht in $\varrho = \frac{a}{\cos \omega}$, d. h. $x = a$. **Die Kettenlinie gleichen Widerstandes hat als Radiale eine Gerade.**

d) $\mu = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$; dann stellt (10) eine Parabel, (11) die Kurve $\varrho = \frac{a}{\cos^3 \omega}$ dar, welches eine Multiplikatrix ist (vgl. Bd. I S. 381).

e) $\mu = \frac{4}{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$; (10) stellt dann eine gleichseitige Hyperbel dar; (11) gibt mit einer leichten Veränderung
$$\varrho^2 \cos^3 2\omega = a^2;$$
beim Übergang zu kartesischen Koordinaten wird diese
$$(x^2 - y^2)^3 = a^2 (x^2 + y^2)^2,$$
die eine Kurve 6. Ordnung mit O als vierfachen Punkt darstellt.

III. Die Originalkurve sei die durch folgende natürliche Gleichung definierte Traktrix
$$R = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Schreiben wir diese, wie folgt

$$\frac{2s}{a} = \log\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right),$$

so erhalten wir daraus

$$d\theta = \frac{d\frac{dR}{a}}{1 + \frac{R^2}{a^2}}.$$

Hieraus ergibt sich dann, daß

$$\varrho = a \cdot \operatorname{tg} \omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

die Gleichung der zugehörigen Radiale sein muß; diese stellt nun, wie uns S. 198, Bd. I lehrt, eine Kappa-Kurve dar, wir erhalten also als Resultat: **Die Radiale einer Traktrix ist die Kappa-Kurve**[1].

IV. Die Gleichung

$$y^{m+n} = p^m x^n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

stellt, wenn das Verhältnis der beiden positiven Zahlen m, n rational ist, eine Parabel höherer Ordnung dar (Nr. **116**; Bd. I S. 305), wenn es aber irrational ist, eine W-Kurve von Klein und Lie (Nr. **225**). Im ersteren Falle kann man m und n immer als ganz und relativ prim annehmen; in jedem Falle aber kann (14) durch folgende beiden ersetzt werden,

$$x = p\lambda^{m+n}, \qquad y = p\lambda^n;$$

wo λ ein beliebiger Parameter ist; daraus folgt nun

$$\frac{ds}{d\lambda} = p\lambda^{n-1}\left[(m+n)^2\lambda^{2m} - n^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$R = \frac{p\lambda^{n-m}\left[(m+n)^2\lambda^{2m} + n^2\right]^{\frac{3}{2}}}{mn(m+n)};$$

zufolge der allgemeinen Relation $ds = R \cdot d\theta$ wird diese Gleichung nach einigen Reduktionen zu

$$\frac{d\theta}{mn(m+n)} = \frac{\lambda^{m-1} \cdot d\lambda}{(m+n)^2\lambda^{2m} + n^2}.$$

Setzen wir hierin

$$\mu = \frac{m+n}{n}\lambda^m,$$

so ergibt sich

$$d\theta = \frac{d\mu}{1+\mu^2},$$

und daher

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \mu$$

oder

$$\frac{m+n}{n}\lambda^m = \operatorname{tg}\theta.$$

Eliminieren wir mit Hilfe dieser Beziehung den Parameter λ aus dem Werte für R, ersetzen R durch ϱ, θ durch ω, so folgt

$$\varrho = \frac{pn^2}{m(m+n)} \frac{\left(\frac{n}{m+n}\operatorname{tg}\theta\right)^{\frac{n-m}{m}}}{\cos^3\theta} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

---

1) Obige Rechnung kann mit geringen Abänderungen auch für eine Pseudotraktrix angewendet werden.

als Polargleichung der Radiale der betrachteten Kurven. Die entsprechende kartesische Gleichung ist

$$\frac{x^{3m}}{(x^2+y^2)^m} = \left[\frac{pn^2}{m(m+n)}\right]^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n-m}.$$

Wenn das Verhältnis $m:n$ rational ist, so stellt diese Gleichung eine Kurve von der Ordnung $2m+n$ dar, wenn $n > m$; wenn hingegen $n < m$, so läßt sich die ganze Gleichung durch x^{m-n} dividieren, und wird nach Abscheidung dieses Faktors vom Grade $3m$; folglich: **Die Radiale der Parabel $y^{m+n} = p^m x^n$ ist eine Kurve, deren Ordnung gleich der größeren der beiden Zahlen $2m+n$ und $2m$ ist.** Z. B. für die gewöhnliche Parabel ist die Radiale von der dritten (s. o.), für die semikubische ($y^3 = px^2$) von der vierten, für die kubische ($y^3 = p^2x$) von der sechsten Ordnung.

V. Führen wir eine ähnliche Rechnung wie die obige für die Kurve

$$x^m y^n = a^{m+n} \qquad (16)$$

aus, so bekommen wir die Polargleichung der Radialen als

$$\varrho = \frac{a}{n(m+n)} \frac{m}{\left(\frac{m}{n}\operatorname{tg}\omega\right)^{\frac{2m+n}{m+n}} \cdot \cos^3\omega}. \qquad (17)$$

Aus dieser ergibt sich, daß, wenn m, n ganze, relativ prime Zahlen sind, diese Kurve algebraisch und von der Ordnung $3(m+n)$ ist **Die Radiale der durch $x^m y^n = a^{m+n}$ dargestellten Hyperbel ist eine Kurve von der Ordnung $3(m+n)$.**

VI. Ähnliche andere Sätze würde man erhalten, wenn man die dargelegten allgemeinen Betrachtungen auf die Kurven anwendet, bei denen der Bogen proportional einer Potenz des Krümmungsradius ist; es ist leicht einzusehen, daß ihre Radialen Spiralen höheren Grades sind[1]).

266. Das obige Verfahren zur Auffindung der Radiale einer Kurve, deren natürliche Gleichung man kennt, läßt sich umkehren und führt zu dem umgekehrten Probleme der Radialen, nämlich die Aufsuchung derjenigen Kurven — Antiradialen wollen wir sie nennen — die eine vorher bestimmte Kurve als Radiale haben. Ist nämlich eine Kurve gegeben, die in Polarkoordinaten dargestellt wird durch

$$\omega = f(\varrho), \qquad (18)$$

so erhält man, wenn man $\omega = \theta$, $\varrho = R$ setzt und differenziert

$$d\theta = f'(R) \cdot dR.$$

---

1) Eine Bemerkung von G. Pirondini. — Die Radialen der Delaunayschen Kurven (Nr. 214) findet man ausführlich untersucht in dem Aufsatze von F. P. Ruffini, *Intorno alle radiale della linea generata dal fuoco di una conica la quale rotoli sopra una retta* (Rend. Acc. Bologna 1901—1902).

Multipliziert man mit R und beachtet, daß $R \cdot d\theta = ds$, so ergibt sich schließlich

$$s = \int R \cdot f'(R) \cdot dR, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und dies ist die natürliche Gleichung der Antiradialen der Kurve (18).

Suchen wir z. B. die Antiradiale einer beliebigen Geraden

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0;$$

wir transformieren diese Gleichung, indem wir Polarkoordinaten einführen, und bekommen

$$\omega = \alpha + \operatorname{arc} \cos \frac{p}{\varrho}.$$

Da nun hier $f(\varrho) = \alpha + \operatorname{arc} \cos \frac{p}{\varrho}$, so liefert uns die Gleichung (19)

$$s = \int \frac{p \cdot dR}{\sqrt{R^2 - p^2}},$$

daher ist

$$\frac{s}{p} = \frac{1}{2} \log \frac{R + \sqrt{R^2 - p^2}}{R - \sqrt{R^2 - p^2}},$$

oder auch

$$R = \frac{e^{\frac{s}{p}} + e^{-\frac{s}{p}}}{2};$$

vergleichen wir das Resultat mit der Gleichung (21) in Nr. **236**, so ergibt sich: **Die Antiradiale einer beliebigen Geraden ist eine Kettenlinie gleichen Widerstandes.**

Die Antiradiale eines Kreises ist eine neue Kurve, die man schon untersucht hat[1]).

Schlußbemerkungen. I. G. Pirondini hat vor kurzem ein Ableitungsgesetz für Kurven ausgedacht und angewendet, das ähnlich dem zur Radiale führenden ist, so daß er die entstandenen Kurven als Pseudoradialen bezeichnete[2]). Es lautet: Durch einen festen Punkt der Ebene einer Kurve Γ ziehe man die Radienvektoren ϱ gleich den Krümmungsradien R von Γ und so gerichtet, daß ein Bogen s_1 der Kurve Γ_1, welche der Ort der Endpunkte dieser Vektoren ist, gleich wird dem entsprechenden Bogen s von Γ. Γ_1 ist dann die Pseudoradiale von Γ. Die Beziehung zwischen Γ und Γ_1 ist also eine solche, daß die entsprechenden Bogen gleich lang sind, und die Krümmungsradien der ersteren gleich der Radienvektoren der zweiten.

II. Die erste der zu Anfang von Nr. **264** (S. 289) angeführten Eigenschaften der Radialen teilen diese mit einer anderen Kurve Γ_*, die man aus Γ auf folgende Weise erhält: Man verbinde einen festen Punkt O der Ebene von Γ mit einem beliebigen Punkte P der Kurve

1) C. Mineo, *Le antiradiali del cerchio* (Rend. Circ. matem. Palermo, XXIV. 1907).

2) *Proprietà caratteristiche di alcune linee piane e a doppia curvatura* (Le matematiche pure ed applic. II, 1903).

und trage auf OP von O aus die Strecken OP_1 gleich dem Krümmungsradius von Γ in P ab; der Ort der Punkte P_1 ist die Kurve Γ_*. Es ist leicht zu zeigen, daß, wenn Γ algebraisch und von der Ordnung n ist, Γ_* auch algebraisch und im allgemeinen von der Ordnung $2n(3n-2)$ ist. Diese Zahl erniedrigt sich auf die Hälfte, wenn Γ den Punkt O als Symmetriezentrum hat. Wir wissen z. B., wenn O das Zentrum einer Ellipse Γ ist, dann ist Γ_* eine Kurve 8. Ordnung (s. Bd. I S. 288). Sie erniedrigt sich weiterhin um $2r(3r-2)$, wenn O ein r-facher Punkt von Γ ist. Usw.

Ist die Polargleichung von Γ als $\varrho = f(\omega)$ bekannt, so erhält man alsbald daraus die von Γ_* als

$$\varrho = \frac{[f^2 + f'^2]^{\frac{3}{2}}}{f^2 + 2f'^2 - ff''}.$$

Ist z. B. Γ die logarithmische Spirale $\varrho = c \cdot e^{\omega \cdot \operatorname{ctg} \mu}$, so erhält man für Γ_* die durch

$$\varrho = \frac{c}{\sin \mu} e^{\omega \cdot \operatorname{ctg} \mu}$$

dargestellte Kurve, die wiederum mit Γ identisch ist; damit ist die Zahl der Fälle, in denen sich jene wunderbare Spirale in sich selbst reproduziert (S. 67), wieder um einen vermehrt. — Diese neuen Radialen sind bis jetzt nur für den Fall der Ellipse untersucht worden.

Siebentes Kapitel.

Die Brennlinien[1]).

267. In einer Ebene sei ein einfach unendliches System S von leuchtenden Strahlen gegeben, die ein bestimmtes Gesetz befolgen; wir können sie entweder als parallel, oder in einem Punkt zusammenlaufend, oder allgemeiner als eine gegebene Linie A berührend, oder als zu einer anderen A' (der Evolvente von A) senkrecht stehend annehmen. Es sei dann in derselben Ebene eine Kurve Γ gegeben, die entweder als spiegelnd oder Grenze eines lichtbrechenden Mediums angesehen werde. Dann verwandeln sich die Strahlen des Systems S in die eines anderen S', die dann ihrerseits eine andere Kurve B tangieren bzw. zu einer anderen B' (der Evolvente von B) normal sind. B heißt dann die Brennlinie (Kaustika) von Γ und genauer — um eine übliche, von Johann Bernoulli[2]) vorgeschlagene

1) Ausführliche bibliographische Notizen über diese Kurven finden sich in der *Dissertatio mathematica de invenienda aequatione causticarum* (Lugd. Batav., 1837) von C. J. Matthes; außerdem in einigen Artikeln als Beantwortung einer von A. Cornu im *Intermédiaire* gestellten Frage (II, 1895, S. 208 u. 321; VI, 1899, S. 101).

2) S. die Abh. *Lineae cycloidales, evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, pericausticae* (Acta erud. Mai 1692; *Joh. Bernoulli Opera* I, S. 491—802).

Benennung zu benutzen — die Katakaustika, wenn Γ spiegelnd, Diakaustika, wenn Γ als brechende Kurve gedacht wird[1]). Der gewöhnliche Fall ist der, daß S ein Strahlenbüschel mit endlichem oder auch unendlich fernem Scheitel ist, und diesen Fall hatte auch Tschirnhausen im Auge, der — wenn man von einigen unbestimmten Äußerungen von Maurolico[2]) absieht oder von solchen in der Optik Barrows[3]) — als der erste bezeichnet werden müßte, der die Idee der berühmten Kurven, denen dies Kapitel gewidmet ist, gefaßt hat[4]), „wenn er sie nicht 1678 in Paris durch Huygens kennen gelernt hat“[5]).

Die älteste bestimmte Spur derselben findet sich in einem Briefe Tschirnhausens an Leibniz vom 7. April 1681, in welchem er diesen fragt, ob er sich schon mit der Kurve beschäftigt habe, die durch die Schnitte (paralleler) Lichtstrahlen entstehe, nachdem diese

1) Außer diesen Kurven hat Bernoulli noch zwei andere Kurven betrachtet, deren Definition folgende ist: „Wenn alle Strahlen eines Systems S durch einen Punkt F gehen, und es ist FM einer derselben, MP der von der Kurve Γ reflektierte Strahl, wobei M der Einfallspunkt und P der Berührungspunkt mit der Kaustika ist; ist ferner P_1 der zu P symmetrische Punkt auf dem austretenden Strahle, und P_2 der Punkt des Einfallsstrahles, der von M denselben Abstand hat, wie P, so heißt der Ort der Punkte P_1 die Antikaustika, der von P_2 die Perikaustika von Γ.“ Diese Bemerkung steht in Zusammenhang mit der anderen, daß man jede beliebige Kurve (ausgenommen die Gerade) ansehen kann als durch Reflexion oder Refraktion aus einer anderen geeignet gewählten entstanden; die Aufsuchung der letzteren bildet das „inverse Problem der Kaustiken“: diesem ist eine Abhandlung gewidmet von G. W. Strauch, *Das umgekehrte Problem der Brennlinien* (Wiener Denkschriften, XX, 1859). — Die oben definierten Kurven sind nicht die einzigen, die ihre Entstehung der geometrischen Optik verdanken; wir führen noch die von Leibniz als Acampta, Aclasta und Synacampta bezeichneten an (vgl. den Anhang zu einem Briefe an Joh. Bernoulli vom 7. Januar 1764, *Leibniz*, ed. Gerhardt, III, S. 734) sowie die von Mairan betrachteten (*Quatrième partie des Recherches physico-mathématiques sur la réflexion des corps,* Mém. de Paris, 1740) und von Fontenelle angegebenen (*Historie de l'Acad. des Sciences*, 1740, S. 89—102); eine derselben nannte er courbe réfractoire ou anaclastique, eine andere courbe réflexoire ou anacamptique. Die Anaklastika Mairans ist eine Kurve 4. Ordnung, ähnlich der Konchoide des Nikomedes; ihre Gleichung ist

$$\frac{m^2-n^2}{n^2}y^2 = \frac{(a^2-x^2)(x+b)^2-a^2b^2}{x^2}.$$

Bei der Untersuchung dieser Kurven bediente sich Mairan gewisser erzeugender Kurven, die von ihm „courbes des sécantes ouvertes en éventail“ bzw. „courbes sécantes fermées en éventail“ genannt wurden, und die nichts anderes als zentrische Kegelschnitte sind.

2) Macri, *Commemorazione del IV Centenario di Francesco Maurolico* (Messina MDCCCXCIV), S. 111.

3) Montucla, *Histoire des Mathématiques* II. Nouv. éd. (Paris, 1799) S. 389.

4) Vgl. den § 9 des Werkes von Weissenborn, *Lebensbeschreibung von E. W. von Tschirnhausen* (Eisenach, 1866).

5) So M. Cantor, *Vorlesungen* III. (2. Aufl., Leipzig 1901) S. 148.

eine Reflexion an einer Kurve erlitten haben, wobei er hinzufügte, daß jene geometrisch sei, wenn diese es ist[1]). Leibniz antwortete unterm 13. Mai desselben Jahres[2]), indem er erklärte, daß er die ihm vorgelegte Frage wohl nicht richtig verstanden habe, da es ihm schiene, daß die Schnitte der reflektierten Strahlen keine Kurve bildeten, sondern die ganze Ebene bedeckten. In der Erwiderung, geschrieben von Paris unterm 27. Mai 1682[3]), wurden dann die Gesetze über die Brennlinien dargelegt, die Tschirnhausen in den *Acta eruditorum* vom November 1682 unter dem Titel *Inventa nova, exhibita Parisiis Societati regiae Scientiarum* veröffentlichte; die hauptsächlichsten von ihnen finden sich auch in einem Briefe von Leibniz an denselben Tschirnhausen.[4]) Nächst Leibniz ist Johann Bernoulli derjenige, der die Theorie mit größerem Erfolge bearbeitete[5]); ihm verdankt man die Betrachtung solcher Strahlen, die in einem besonderen Punkte zusammenlaufen, den Begriff der Diakaustik, sowie die Bestimmung der Brennlinien spezieller Kurven; durch ihn erlangte die Theorie der bezüglichen Kurven schon einen solchen Grad der Vollkommenheit, daß die Geometer längere Zeit hindurch dieses Thema fallen ließen, da es keine Früchte zu bringen versprach, die der Mühe lohnten.

Der von Tschirnhausen und später von anderen angewendete Kunstgriff bei der Bestimmung der Brennlinien durch Reflexion besteht in der Betrachtung der „Länge des reflektierten Strahles“; darunter versteht man die Länge l der Strecke zwischen dem Einfallspunkte und demjenigen Punkte, in welchem der Strahl die von ihm umhüllte Brennlinie berührt. Für diese Länge erhält man nämlich einen sehr einfachen Ausdruck in dem Falle, daß die Lichtstrahlen parallel sind. Diese kann durch folgende Rechnung erhalten werden.

Es sei

$$f(\xi, \eta) = 0 \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

die Gleichung der spiegelnden Kurve Γ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten. Nehmen wir den unendlich fernen Punkt der Ordinatachse als leuchtenden Punkt, so wird $x - \xi = 0$ die Gleichung eines beliebigen Lichtstrahles, $(x - \xi) + (y - \eta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, die der entsprechenden Normalen sein, und demnach

$$(x - \xi)\left[1 - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right] + 2\,(y - \eta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

---

1) *Leibniz*, ed. Gerhardt, IV, (Halle a. S. 1859) S. 484. 2) Das.
3) Das. S. 487. 4) Das. S. 491.
5) Die bezügl. Arbeiten finden sich in *Joh. Bernoulli Opera*, in Abschnitten, die man leicht vermittelst des *Index rerum* bei dem Artikel *Caustica* auffinden kann. An diese knüpfen sich einige Schriften Jacob Bernoullis, die in *Jacobi Bernoulli Opera* S. 473, 549 u. 1077 stehen. Vgl. auch de l'Hôpital, *Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction* usw. (Mém. de Paris, X, 1666—1699).

die des reflektierten Strahles. Die Katakaustika, die ja die Enveloppe dieser Strahlen ist, hat zur Gleichung das Resultat der Elimination von ξ und η, aus (1), (2) und der Abgeleiteten von (2), also der Gleichung

$$-(x-\xi)\frac{d\eta}{d\xi}+(y-\eta)=\frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{2\frac{d^2\eta}{dx^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

werden nun die Gleichungen (2), (3) nach $x-\xi$, $y-\eta$ aufgelöst, so erhält man

$$x-\xi=-\frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \quad y-\eta=\frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{2\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

wodurch die Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes der Katakaustika in Funktionen der Koordinaten ξ, η des Einfallspunktes gegeben sind. Aus ihnen ergibt sich

$$l^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\frac{1}{2}\frac{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}.$$

Ist nun R der Krümmungsradius und τ der Reflexionswinkel, so hat man

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \qquad \cos\tau=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

und daher

$$l=\frac{1}{2}R\cos\tau. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Dies ist die angekündigte Beziehung; sie sagt aus: Ist $M(\xi,\eta)$ ein **Punkt der spiegelnden Kurve und C das zugehörige Krümmungszentrum, so findet man den entsprechenden Punkt $P(x,y)$ der Brennlinie für parallele Strahlen, indem man dem Mittelpunkt der Strecke MC auf den reflektierten Strahl projiziert**[1]).

Wenden wir die erhaltenen Resultate auf spezielle Kurven an, so erhalten wir interessante Resultate, wie folgende Beispiele zeigen.

a) Die spiegelnde Kurve sei ein Kreis $\xi^2+\eta^2=a^2$. Betrachten wir (Taf. V, Fig. 58) einen beliebigen in M parallel mit der y-Achse einfallenden Strahl i, der die x-Achse in N schneidet und

---

1) Weitere Einzelheiten insbesondere über die quadratische Verwandtschaft zwischen dem System der leuchtenden Punkte und der Bildpunkte, über das umgekehrte Problem aus B die Kurve Γ zu finden, sowie über die Krümmung der Brennlinien findet der Leser in der neueren Arbeit von E. Stübler: *Über Brennlinien durch Reflexion* (Zeitschr. für math. u. nat. Unterr. 39. Jahrg. 1908, S. 121—144); insbesondere sei dort der Satz bemerkt: In den Berührungspunkten von B mit Γ verhalten sich die Krümmungsradien wie 3 : 4.

den entsprechenden reflektierten r. Projizieren wir nun die Mitte Q des Radius OM auf r als P, so ist P ein Punkt der Katakaustik, ist nun H die Mitte der Strecke MN, so ist offenbar $MH = MP$, folglich läßt sich die Katakaustik des Kreises punktweise konstruieren, wenn man auf jedem reflektierten Strahl vom Einfallspunkte aus ein Viertel der auf dem einfallenden Strahle abgeschnittenen Kreissehne abträgt. — Die analytische Darstellung der fraglichen Kurve erhält man leicht, indem man entweder obige Konstruktion in Formeln kleidet, oder die Gleichung (4) benutzt[1]). Setzt man $\xi = a \cos \varphi$, $\eta = a \sin \varphi$, so findet man auf die eine oder andere Weise

$$x = \frac{a}{4}(3 \cos \varphi + \cos 3\varphi), \qquad y = \frac{a}{4}(3 \sin \varphi + \sin 3\varphi),$$

und diese Gleichungen zeigen: **Die Katakaustik eines Kreises mit dem Radius a für parallele Strahlen ist eine gemeine Epizykloide, die entsteht, wenn ein Kreis mit dem Radius $\frac{a}{4}$ auf einem andern mit dem Radius $\frac{a}{2}$ rollt**[2]) (vgl. S. 95—96).

b) Eine neue bemerkenswerte Kurve erhält man, wenn man von der Parabel

$$\eta^2 = 2p\xi$$

ausgeht.[3]) Dann liefern uns die Gleichungen (4)

$$x = 3\xi, \qquad y = \frac{\eta(3p - 2\xi)}{2p};$$

eliminiert man ξ, η, so gelangt man zu

$$54py^2 = x(2x - 9p)^2,$$

als Gleichung der gesuchten Katakaustik. Diese läßt sich jedoch noch auf eine andere Weise darstellen, die ihre interne Natur klarlegt. Aus der letzten Gleichung erhalten wir nämlich für das Bogendifferential und den Krümmungsradius

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2x + 3p}{2\sqrt{6px}}, \qquad R = \frac{(2x + 3p)^2}{12p};$$

durch Elimination von x erhält man dann

1) Die Tangentialgleichung der fraglichen Brennlinie findet sich bei J. Booth, *A treatise on some new geometrical methods* I. (London, 1873) Cap. XIII.

2) Diese elegante Folgerung, sowie die vorige Punktkonstruktion der Kaustika wurde von de La Hire entdeckt und in der Abh. *Examen de la courbe formée par les rayons réfléchis dans un quart de cercle* (Mém. Acad. Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699, Paris 1730, S. 294—310) dargelegt. Daselbst ist übrigens irrtümlich folgende, von Tschirnhausen angegebene Konstruktion bewiesen: Man beschreibe einen Kreis, der den zu den Lichtstrahlen senkrechten Radius OA des gegebenen Kreises zum Durchmesser hat, nehme auf jeder Ordinate die Mittelpunkte D des Segmentes BC, das von beiden Seiten begrenzt wird; diese bilden die Katakaustik des gegebenen Kreises.

3) Vgl. N. Fuß, *De novis quibusdam causticae parabolae proprietatibus* Nova. Acta Petr. VIII, 1712).

$$s = -\frac{1}{2}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\frac{3}{4}p}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}}$$

als natürliche Gleichung. **Die Brennlinie der Parabel ist also** (den Entwicklungen in Bd. I, S. 476 zufolge) **eine Sinusspirale mit dem Index** $-\frac{1}{3}$; infolgedessen kann die fragliche Kurve in Polarkoordinaten durch

$$\varrho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \cos\left(-\frac{1}{3}\omega\right) \quad \text{oder} \quad a = \varrho \cos^3 \frac{\omega}{3}$$

dargestellt werden. Diese Kurve ist uns daher schon früher als Trisektrix von Catalan (Bd. I, S. 91) begegnet.

c) E. Köstlin hat gezeigt[1]), daß die Brennlinie der dreispitzigen Hypozykloide für parallele Strahlen stets eine reguläre Astroide von konstanter Größe ist.

d) Nehmen wir als spiegelnde Kurve die Zykloide

$$\xi = a \arccos \frac{a-\eta}{a} - \sqrt{2a\eta - \eta^2},$$

so findet man als Gleichung der Brennlinie:

$$\eta = a - \sqrt{a^2 - ay}, \qquad \xi = x - \sqrt{a\eta} + \sqrt{a\eta - \eta^2}$$

und nach Elimination von ξ, η

$$x = \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2y}{a} - \sqrt{ay - y^2}.$$

Die Brennlinie einer Zykloide ist also eine andere Zykloide, bei welcher der Durchmesser der rollenden Kreises gleich dem Radius des die ursprüngliche erzeugenden Kreises ist. Dieses Resultat verdanken wir Joh. Bernoulli.

e) Wir betrachten die logarithmische Kurve, dargestellt durch

$$\frac{y}{a} = \log \frac{x}{a}$$

und ein System von Lichtstrahlen, die parallel zur x-Achse einfallen. Der Strahl $y = k$ wird alsdann reflektiert in die Gerade mit der Gleichung

$$x - ae^{\frac{k}{a}} - \frac{y-k}{2}\left(e^{\frac{k}{a}} - e^{-\frac{k}{a}}\right) = 0.$$

Differenzieren wir nach k, so erhalten wir $k = y + a$. Durch Eliminieren von k findet man dann die Gleichung

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+a}{2}} + e^{-\frac{y+a}{2}}\right),$$

1) Mitteil. d. math.-nat. Vereins Württemberg Bd. 8, S. 88.

die eine Kettenlinie darstellt. Folglich: **Die logarithmische Kurve $y = a \log \frac{x}{a}$ hat für parallel der x-Achse einfallende Strahlen zur Katakaustik die Kettenlinie** $x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+a}{2}} + e^{-\frac{y+a}{2}}\right)$[1].

f) Die Brennlinien der schiefen Parallelprojektionen der Loxodrome eines geraden Kreiskegels sind Kurven von derselben Art.[2])

268. Wir kehren zu allgemeinen Betrachtungen zurück und bemerken zunächst, daß die Gleichung (6) nur ein Spezialfall der Beziehung ist, welche die Länge l des einfallenden Strahles mit der Länge l' des reflektierten oder gebrochenen Strahles verknüpft, in dem allgemeinen Falle, daß der leuchtende Punkt in endlicher Entfernung liegt. Bezeichnen wir den Einfalls- und den Brechungswinkel bzw. mit μ und μ' und das konstante Verhältnis ihrer Sinus (den sog. Brechungskoeffizienten) mit $\frac{n}{n'}$, so lautet die allgemeine Beziehung

$$n'\left\{\frac{\cos\mu}{R} \pm \frac{\cos^2\mu}{l}\right\} = n\left\{\frac{\cos\mu'}{R} \pm \frac{\cos^2\mu'}{l'}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wozu bemerkt werden möge, daß im Falle der Reflexion $n + n' = 0$ und $\mu + \mu' = 0$. Der Hauptsache nach findet sie sich in den Werken Joh. Bernoullis, in dieser Form jedoch in der *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833, S. 467) von Magnus. Den Beweis wollen wir uns schenken, da das Feld ihrer Anwendbarkeit kein großes ist; desgleichen den Beweis für die Relation

$$n'[l_1 - l_1 \pm s] = n[l_2' - l_1' \pm s'],$$

die den Bogen s der reflektierenden Kurve, der begrenzt ist von den Punkten, die vom leuchtenden die Abständen l_1 und l_2 haben, mit dem entsprechenden der Kaustik verknüpft.[3])

Ein neuer mächtiger Antrieb zum Studium der Kaustiken ging 1808 von Malus aus durch seine berühmte *Mémoire sur l'Optique* (Journ. de l'École polyt. VII). Es ist hier nicht der Ort, auf die bewunderungswürdigen Resultate derselben einzugehen, zumal sie größtenteils die Verteilung der Lichtstrahlen im Raume betreffen und somit mehr Beziehung zur Geometrie der Oberflächen und der Linienkongruenzen als zur Geometrie der Ebene haben, auf die wir uns hier beschränken müssen. Nur eine Ausnahme soll gemacht werden, und zwar wegen eines Satzes, dem man die Einführung eines neuen Begriffes verdankt, der so fundamental ist, daß er eine radikale Änderung in der Theorie der Kaustiken hervorgerufen hat.

---

1) Briefliche Mitteilung (1901) von Oberlehrer J. Finsterbusch in Zwickau.

2) S. die S. 303 a. Abh. v. Stübler, S. 137.

3) Magnus, o. a. O. S. 543. Im Falle $n + n' = 0$ geht (7) auf die Bernoullische Gleichung zurück.

Wir betrachten zu dem Zwecke die Kurve **A**′, zu der alle einfallenden Strahlen normal sind; ξ', η' seien die Koordinaten eines beliebigen Punktes derselben, x, y die des entsprechenden der Kurve Γ, welche die brechenden Medien trennt. Wenn wir dann mit ξ, η die laufenden Koordinaten bezeichnen und $\frac{dy}{dx} = p$ setzen, so werden die Gleichungen des einfallenden Strahles, der Normale zur Kurve Γ und des austretenden Strahles bzw. von folgender Gestalt sein

$$\eta - y = k'(\xi - x), \quad \eta - y = -\frac{1}{p}(\xi - x), \quad \eta - y = k(\xi - x);$$

da nun der einfallende Strahl durch den Punkt (ξ', η') der Kurve **A**′ geht, so ist

$$\eta' - y = k'(\xi' - x),$$

während die Gleichung

$$\frac{n'(1 + kp)}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{n(1 + k'p)}{\sqrt{1 - k'^2}}$$

das Grundgesetz ausdrückt, welches die Erscheinung der Refraktion beherrscht. Mit Berücksichtigung der vorigen Gleichung kann nun diese geschrieben werden

$$n' \frac{\xi - x + p(\eta - y)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} = n \frac{\xi' - x + p(\eta' - y)}{\sqrt{(\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2}};$$

sie stellt den austretenden Strahl dar und wird offenbar befriedigt durch die Koordinaten ξ, η eines Punktes N, von der Art, daß

$$\frac{n'\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{n\sqrt{(\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2}} = 1, \qquad \frac{n'^2[\xi - x + p(\eta - y)]}{n^2[\xi' - x + p(\eta' - y)]} = 1.$$

Schreiben wir diese Beziehungen folgendermaßen:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{n^2}{n'^2}\left((\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2\right);$$

$$(\xi - x) + p(\eta - y) = \frac{n^2}{n'^2}\left((\xi' - x) + p(\eta' - y)\right),$$

so sehen wir, indem ξ, η die laufenden Koordinaten sind, daß die erste dieser Gleichungen einen Kreis **K** darstellt, dessen Zentrum im Inzidenzpunkt liegt, und dessen Radius das Produkt aus dem Brechungskoeffizienten $\frac{n}{n'}$ und dem Abstande jenes Punktes vom leuchtenden Punkte ist. Die zweite Gleichung entsteht dann durch Differenzieren der ersten nach x. $N(\xi, \eta)$ ist demnach der Berührungspunkt des Kreises **K** mit der Kurve **B**′, die von allen diesen analog konstruierten Kreisen umhüllt wird. Der austretende Strahl enthält sowohl diesen Punkt N als auch den Mittelpunkt (x, y) von **K**, er ist daher normal zu diesem Kreise, also auch zu der umhüllten Kurve; letztere ist also normal zu allen austretenden Strahlen, mit anderen Worten: **B**′ ist eine Evolvente der Kaustik **A**. Die Kurven **B**′, die Evolventen der

Brennlinien B, tragen den ihnen von Quetelet[1]) gegebenen Namen sekundäre Kaustiken (Nebenbrennlinien). Aus allem diesen ergibt sich nun folgender Satz von Gergonne: **Die Kaustik B einer beliebigen (spiegelnden oder brechenden) Kurve Γ für solche Strahlen, die eine Kurve A berühren (oder zu einer Kurve A′, der Evolvente von A, normal sind), ist die Evolute der sekundären Kaustik.**[2]) Zufolge dieses Satzes zerfällt die Untersuchung der Brennlinie in zwei Teile, nämlich 1. die Untersuchung der Enveloppe des nach einem bestimmten Gesetze variabeln Kreises und 2. die der Evolute einer gegebenen Kurve, und diese beiden können sowohl geometrisch, als auch analytisch ausgeführt werden.

Wenden wir den soeben bewiesenen Satz von Gergonne an für den Fall der Refraktion, wenn die Brechungskurve eine Gerade ist und die Strahlen von einem Punkte ausgehen, so finden wir, daß die sekundäre Kaustik eine Ellipse ist; ist dagegen die brechende Kurve ein Kreis, so ist sie ein Cartesisches Oval[3]). **Die Diakaustik einer Geraden ist also die Evolute einer Ellipse**[4]); **die eines Kreises ist im allgemeinen die Evolute eines Cartesischen Ovales**[5]), liegt aber der leuchtende Punkt auf der Peripherie des Kreises, so ist die Diakaustik eine Kardioide, welcher Umstand schon dem Joh. Bernoulli bekannt war.

Der Satz von Gergonne, der auf die Existenz der sekundären Kaustiken hinweist, bedeutet einen Höhepunkt in der Geschichte der Theorie der Brennlinien; die späteren Arbeiten haben zu den bekannten Resultaten nur weniges von Bedeutung hinzugefügt: einige wandten auf diese Kurven die Methoden der natürlichen Koordinaten an[6]), andere suchten den Zusammenhang mit einer anderen Klasse von Kurven, nämlich den Fußpunktkurven[7]), wieder andere stellten Beziehungen auf zwischen den Kaustiken und der Theorie der Bewegungen[8]), noch andere beschäftigten sich mit den Sätzen über ihre

1) *Démonstration et développements des principes fondamentaux de la théorie des caustiques sécondaires* (Mém. Acad. Bélgique V, 1829).

2) Gergonne, *Sur les caustiques planes* (Annales de Math. XV, 1824—25).

3) Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Kurven*, II. Aufl. (Leipzig, 1882) S. 127.

4) Dieser spezielle Satz wurde von Gergonne schon 1820 bewiesen (*De la manière dont les poissons nous voyent et dont nous les voyons*, Annales de Math. XI, 1820—21); ein direkter analytischer Beweis steht in Schlömilch, *Compendium d. höh. Analysis* (5. Aufl. Braunschweig, 1881) I, S. 132.

5) Auch dieser Satz ist älteren Datums als der von Gergonne, indem er sich schon in den *Recherches d'analyse sur les caustiques planes* von C. Sturm findet (Ann. de Math. XV, 1824—25).

6) Habich, *Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes* (Ann. di Mat. 2. Ser. II, 1868—69).

7) Vgl. Em. Weyr, *Über die Identität der Brennlinien mit den Evoluten der Fußpunktkurven* (Zeitschr. Math. Phys. XIV, 1869).

8) G. Koenigs, *Leçons de cinématique* (Paris, 1897) S. 166.

Rektifikation.[1]) Viel zahlreicher jedoch sind die Schriften, die sich mit der Bestimmung und Untersuchung der Brennlinie spezieller Kurven befaßt haben: unter ihnen ragt die *Memoir upon Caustics* von A. Cayley hervor (Phil. Trans. CXLVII, 1857 und CXVII 1867), worin der Fall, daß die betrachtete Kurve eine Gerade oder ein Kreis sei, erschöpfend behandelt ist. Nicht zu vergessen seien auch die Arbeiten, in denen die Katakaustik einer Kardioide bestimmt wird[2]), sowie der Beweis, daß jede Kurve, die eine Polargleichung von der Form

$$a^n = \varrho^n (\cos m\omega)^{\pm 1}$$

hat, zur Katakaustik eine Kurve von folgender Gleichung hat[3])

$$\varrho = a \cos^{\pm 2} p\omega \cdot \sin q\omega.$$

Nennenswert sind auch die Arbeiten G. F. Steiners[4]), die sich die Bestimmung der Plückerschen Charakteristiken der Katakaustiken einer algebraischen Kurve, deren Charakteristiken bekannt sind, zur Aufgabe gestellt haben; sich stützend auf die fundamentalen Betrachtungen Björlings in der Arbeit *Über entsprechende Singularitäten in algebraischen ebenen Kurven* (Nova Acta Reg. Soc. Upsal. 1879) gelangt der Verfasser zur Lösung dieses Problemes, nicht ohne bemerkenswerte Benutzung von Resultaten, die an speziellen Kurven erhalten sind; die uns gesteckten Grenzen verbieten uns, mehr als diesen Hinweis auf jene Forschungen zu geben.

269. Der Begriff der Kaustik erhielt eine bemerkenswerte Verallgemeinerung[5]), die wir hier nicht unbeachtet lassen dürfen. — In einer Ebene sei eine Kurve Γ und ein Büschel paralleler Lichtstrahlen gegeben. Man betrachte einen beliebigen dieser Strahlen a; M sei der Einfallspunkt, μ der Winkel, den er mit der Tangente m an Γ in M bildet (Taf. V, Fig. 59), durch M ziehe man alsdann eine Gerade b, die mit m einen Winkel μ' bildet derart daß immer

$$\frac{\mu}{\mu'} = \varrho. \qquad \qquad (7)$$

Ist $\varrho = 1$, so ist die Enveloppe der Strahlen b die gewöhnliche Katakaustik der Kurve Γ, hat ϱ einen beliebigen Wert, so heißt die Enveloppe die Kaustikoide. Bemerkenswert sind die Fälle $\varrho = -\frac{1}{2}$

---

1) A. Genocchi, *Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie* (Annali di Matem. VI, 1864).

2) A. H. Curtis, *Geometrical proof, that the caustic by reflexion of a cardioid produced by rays proceeding from its cusp is an epicycloid* (Mess. Mathem. 2. Ser. XII, 1882).

3) Lord M'Laren, *On the reflexion-caustics of symetrical curves* (Proc. R. Soc. Edinbourgh XVII, 1889).

4) *Über die Katakaustiken algebraischer ebener Kurven* (Dissert. Lund, 1896).

5) Grane, *Über Kurven mit gleichartigen sukzessiven Developpoiden* (Dissert. Lund, 1894).

und $\varrho = -2$; im ersteren Falle ist b die Halbierungslinie des Winkels (a, m), im zweiten dagegen die Halbierungslinie des Winkels (b, m), wie es die Figuren 60, Taf. V und 61, Taf. VI zeigen.

Die bequemste analytische Darstellung der Kaustikoiden erhält man, wenn man die Kurve Γ als durch die Gleichung einer beliebigen ihrer Tangenten, in der Art wie in Nr. **252** dargestellt, ansieht, also durch

$$y \cos \tau - x \sin \tau = F(\tau).$$

Setzen wir $\tau = \theta - \frac{\pi}{2}$ und $F\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = f(\theta)$, so können wir sie schreiben auch als

$$x \cos \theta + y \sin \theta = f(\theta).$$

Wir bezeichnen nun mit $y \cos \alpha - x \sin \alpha = 0$ die Gleichung der durch den Anfang parallel zu den einfallenden Strahlen gezogenen Geraden. Die allgemeine Gleichung der Geraden b ist offenbar von der Form

$$(x - f \cos \theta + f' \sin \theta) \cos \lambda + (y - f \sin \theta - f' \cos \theta) \sin \lambda = 0$$

oder $$x \cos \lambda + y \sin \lambda = f(\theta) \cos (\lambda - \theta) + f'(\theta) \sin (\lambda - \theta). \quad . \quad (8)$$

Da nun $\mu = \theta - \alpha$, $\mu' = \lambda - \theta$, so wird die Gleichung (7) zu

$$\frac{\theta - \alpha}{\lambda - \theta} = \frac{1}{\varrho},$$

und diese ermöglicht uns, θ aus der Gleichung (8) zu eliminieren; man erhält

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda = f\left(\frac{1 - a}{\varrho + 1} + \alpha\right) \cdot \cos \frac{\varrho(\lambda - \alpha)}{\varrho + 1}$$
$$+ f'\left(\frac{\lambda - a}{\varrho + 1} + \alpha\right) \cdot \sin \frac{\varrho(\lambda - \alpha)}{\varrho + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dies ist die „magische Gleichung“ einer beliebigen Tangente der Kaustikoide und kann somit als analytische Darstellung der Kurve selbst angesehen werden. Setzen wir im speziellen $\varrho = 1$ und verwandeln der Bequemlichkeit halber λ in θ, so erhalten wir

$$x \cos \theta + y \sin \theta = f\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cdot \cos \frac{\theta - \alpha}{2} + f'\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cdot \sin \frac{\theta - \alpha}{2},$$

oder auch

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 2 \frac{d}{d\theta}\left[f\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cdot \sin \frac{\theta - \alpha}{2}\right];$$

nun entsteht diese Gleichung durch Differenzieren folgender Gleichung nach θ

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 2f\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cdot \sin \frac{\theta - \alpha}{2},$$

demnach stellt die letzte Gleichung die Evolvente der durch die vorletzte dargestellten Kurve dar, also der sekundären Kaustik von Γ; die Existenz dieser Kurve ist somit von neuem dargetan und außerdem eine bequeme analytische Darstellung derselben gezeigt worden.

Schließlich soll eine einfache Anwendung der Gleichung (9) gemacht werden, nämlich für den Fall, daß Γ ein Kreis mit dem Zentrum O, dem Radius a sei. Dann ist $f(\theta) = a$, folglich wird Gleichung (9)

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda = a \cos \frac{\varrho(\lambda - \alpha)}{\varrho + 1},$$

die (nach Nr. **253**) interpretiert aussagt: **Alle Kaustikoiden eines Kreises sind Epizykloiden**, die algebraisch sind oder nicht, je nachdem ϱ rational oder irrational ist.

Achtes Kapitel.

Fußpunktkurven, Gegenfußpunktkurven und Podoiden.

270. Gegeben eine Kurve Γ und ein fester Punkt P, man fälle von diesem auf alle Tangenten von Γ das Lot, die Fußpunkte dieser Lote bilden dann eine neue Kurve, die man die Fußpunktkurve oder Pedale von Γ in bezug auf P nennt. Der Begriff rührt von Maclaurin[1]) her; der Name jedoch wurde ihr von O. Terquem gegeben.[2]) Wenn man dagegen den Punkt P auf alle Normalen von Γ projiziert, so erhält man die Fußpunktkurve der Evolute von Γ in bezug auf P; sie heißt die Gegenfußpunktkurve oder Kontrapedale[3]) und kann punktweise konstruiert werden, indem man durch P die Parallelen zu den Tangenten zieht und ihren Schnitt mit der jedesmal zugehörigen Normale bestimmt. Wenn man zu jeder Kurve in der Ebene die Fußpunktkurve bestimmt hat, so hat man damit eine spezielle Berührungstransformation ausgeführt, die S. Lie die Fußpunkttransformation[4]) genannt hat; sie kann als das Produkt einer Inversion und einer Polarität in bezug auf einen Kreis aufgefaßt werden.[5])

Um die Natur dieser Transformation besser zu kennzeichnen[6]) nehmen wir O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinaten-

1) Phil. Trans. R. Soc. London 1718 und 1719: *Geometria organica* (London, 1720) S. 95 ff. Bilden die durch P gezogenen Geraden einen konstanten, aber von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel, so hat man dagegen eine schiefe Fußpunktkurve; vgl. Barisien, *Aire de la podaire oblique de la développée oblique de l'ellipse* (Nouv. Ann. Math. 4e Sér. I. 1900).

2) Nouv. Ann. Math. V, 1848, S. 239. Alte und neue *Konstruktionen für Fußpunktkurven* findet man bei E. Janisch (Arch. Math. Phys., 2. Reihe, IX, 1870).

3) Craig, *The counter-pedal surface of the Ellipsoid* (Amer. Journ. Mathem. IV, 1882).

4) Siehe S. Lie und G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen* I. (Leipzig, 1896) S. 17. 5) Daselbst S. 27—29.

6) Für das Folgende s. G. Loria, *Le trasformazione pedali ed antipedali nel piano e nello spazio* (Period. matem. XXII, 1907).

systems und nennen die Plückerschen Koordinaten einer beliebigen Geraden g der Ebene ξ, η. Dann hat der Fußpunkt P des von O auf g gefällten Lotes die Koordinaten

$$x = -\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}. \quad \ldots \quad (1)$$

Lösen wir auch ξ, η auf, erhalten wir

$$\xi = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \ldots \quad (2)$$

als Koordinaten durch $P(x, y)$ zur Geraden OP gezogenen Senkrechten. Die Gleichungen (1) und (2) liefern die analytische Darstellung der Fußpunkttransformation und ihrer Umkehrung und zeigen, daß es sich um eine birationale Verwandtschaft zwischen den Punkten P und den Geraden g handelt. Um sie näher kennen zu lernen, lassen wir **erstens** den Punkt (x, y) die Gerade $\bar{g}$

$$\Xi x + \mathrm{H} y + 1 = 0$$

durchlaufen. Die entsprechenden Geraden umhüllen dann die Kurve

$$\Xi \xi + \mathrm{H} \eta - (\xi^2 + \eta^2) = 0, \quad \ldots \quad (3$$

d. i. eine Parabel mit O als Brennpunkt und $\bar{g}$ als Leitlinie. — **Zweitens** lassen wir die Gerade (ξ, η) um den Punkt (X, Y) rotieren; die entsprechenden Punkte beschreiben dann die Kurve

$$Xx + Yy - (x^2 + y^2) = 0, \quad \ldots \quad (4)$$

d. i. den Kreis mit dem Durchmesser OG. Die beiden homaloiden Kurvensysteme bestehen also: das eine aus Parabeln mit dem Brennpunkte O, das andere aus allen durch O gehenden Kreisen; die Jacobische des ersten besteht also aus dem Punkte O und den beiden Kreispunkten I und J, die des zweiten aus der unendlich fernen Geraden und den beiden OI und OJ. Mit Benutzung dieser Bemerkungen und der bekannten Beziehungen, die die Plückerschen Charaktere zweier Kurven, die sich in einer quadratischen Korrespondenz entsprechen, miteinander verknüpfen, ist es leicht die Eigenschaften der Fußpunkt- und Gegenfußpunktkurve einer Kurve Γ, deren Plückersche Zahlen bekannt sind, zu ermitteln. Ist nämlich

n die Ordnung,	ν die Klasse
d die Zahl der Doppelpunkte,	δ die der Doppeltangenten
s die der Spitzen	σ die der Wendepunkte

von Γ und bezeichnen wir die entsprechenden Zahlen der Antipedale Γ' durch einen Strichel, so finden wir $\nu' = 2n$, und daß Γ' sowohl die unendlich ferne, als auch die Geraden OI und OJ zu n-fachen Tangenten hat und d Doppeltangenten und s Wendetangenten hat. Wenden wir nun eine der Plückerformeln an, so ergibt sich

$$n' = 2n(2n-1) - 2\left(3\,\frac{n(n-1)}{2} + d\right) - 3s = n^2 + n - (2d + 3s);$$

jedoch ist $\quad \nu = n(n-1) - (2d + 3s)$ und daher

$$n' = 2n + \nu.$$

Und da nun

$$2d' + 3s' = (2n + \nu)(2n + \nu - 1) - 2d$$
$$2d' + 2s' = (2n + \nu - 1)(2n + \nu - 2) - \nu + 2n - s - 2,$$

so folgt $\quad s' = 2\nu + s, \quad d' = \frac{(2n+\nu)(2n+\nu-1)}{2} - n - 3(3\nu + s).$

Damit sind die Charaktere der Gegenfußpunktkurve alle bestimmt. Welche Modifikationen eintreten, wenn Γ durch den Pol oder die Kreispunkte geht (vgl. Nr. **273**), dies zu untersuchen überlassen wir dem Leser.[1])

Setzt man z. B. voraus, daß Γ eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O sei, dann ist Γ' die sogenannte Talbotsche Kurve[2]), eine rationale Kurve sechster Ordnung und vierter Klasse, die sechs Spitzen und vier Doppelpunkte besitzt und die unendlich ferne Gerade sowie die Geraden OI, OJ als Doppeltangenten hat. Ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung von Γ und setzt man zur Abkürzung

$$a^2 + b^2 = 2s^2, \qquad a^2 - b^2 = 2d^2,$$

so ist die Gleichung von Γ'

$$[3(a^2x^2 + b^2y^2) - 4(s^4 + 3d^4)]^3 + [9(s^2 + 3d^2)a^2n^2 + 9(s^2 + 3d^2)b^2y^2 - 8d^2(s^4 - 9d^4)]^2 = 0.^{3)} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Ändert man das Vorzeichen von b^2, so erhält man die Gleichung der ersten negativen Fußpunktkurve der Hyperbel, die im Falle $b = a$ die Polargleichung

$$\varrho^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos\left(-\frac{2}{3}\omega\right)$$

hat und daher eine Sinusspirale ist.[4])

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß die Fußpunktkurve in bezug auf den Pol O einer Kurve von der Klasse ν, im allgemeinen von der Ordnung 2ν und dem Geschlechte $\frac{(n-1)(\nu-2)}{2}$ ist und O, I, J

---

1) Ein anderes mehr analytisches Verfahren, um diese und verwandte Fragen zu lösen, findet sich in der Dissertation von A. Rosén, *Om fotpunktkurvers karakteres* (Lund, 1884).

2) Zur Erinnerung an den englischen Geometer, der ihre Rektifikation mittels elliptischer Integrale ausführte (Ann. de Mathém. XIV, 1823—1824, S. 380).

3) B. Tortolini, *Sopra l'equazione di una curva del sest' ordine, che s' incontra in un problema riguardante l'ellissi* (Crelles Journal XXXIII, 1846); *Inviluppo d'una perpendicolare condotta a un diametro dell' ellisse all' estremità di questo diametro* (Nouv. Ann. Mathém. V, 1846).

4) Ann. de Mathém. XII, S. 321 und XIII, S. 115 und 142. — Ein anderes Beispiel einer speziellen negativen Fußpunktkurve findet sich in der Abh. von F. Ruffini, *Delle linee piane algebriche le podali delle quali possano essere curve che hanno potenze in ogni punto del loro piano* (Mem. Accad. Bologna V, Ser. IV 1895).

als ν-fache Punkte hat. Sie ist daher im allgemeinen von der Klasse $\nu(\nu+1)$ und hat $3\nu(\nu-1)$ Wendepunkte und $\nu(\nu-1.)(\nu^2-3\nu-6)$ Doppeltangenten. Die Modifikationen, die diese Zahlen erleiden, wenn Γ die Geraden OI, OJ, IJ berührt oder andere besondere Geraden als singuläre Tangenten hat, sind leicht anzugeben (vgl. Nr. **273**).

Beispiele: *a*) Setzt man voraus, daß die gegebene Kurve noch die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{[1]}$$

sei und daß α, β die Koordinaten des festen Pols seien, so wird die Fußpunktkurve folgendermaßen dargestellt werden:

$$[x^2+y^2-(\alpha x+\beta y)]^2 = a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2. \quad . \quad (6)$$

Die Fußpunktkurve ist also eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung mit dem Pol als Doppelpunkt. Geben wir dem b^2 das entgegengesetzte Vorzeichen, so erhalten wir die Fußpunktkurve der Hyperbel. Besonders bemerkenswert ist der Fall, daß P auf eine Achse oder in das Zentrum des Kegelschnittes fällt; im letzten Falle ist die Kurve eine Boothsche Lemniskate (vgl. Bd. I, S. 133).

Liegt aber P auf einer der Geraden, welche ein Brennpunkt des Kegelschnittes mit einem singulären Punkt verbindet, so ist die Fußpunktkurve eine (imaginäre) Kurve dritter Ordnung, die sonderbare Eigenschaften besitzt.[2])

b) Die Fußpunktkurve einer Parabel ist eine zirkulare Kurve dritter Ordnung[3]), in speziellen Fällen eine Slusesche Konchoide (Bd. I, S. 74), eine Ophiuride (S. 50) oder eine Kissoide (S. 39).

c) Die Fußpunktkurve eines Kreises ist eine Pascalsche Schnecke (Bd. I, S. 147).

d) Fußpunktkurven der dreispitzigen Hypozykloide sind im I. Bd. S. 167ff. behandelt; die der vierspitzigen resp. der Astroide ist eine rationale Kurve 8. Ordnung mit der Polargleichung[4])

$$\varrho = a\cdot\cos\omega\cdot\sin\omega - b\cdot\cos\omega - c\cdot\sin\omega,$$

wenn b und c die Koordinaten des Poles sind. Die kartesische Gleichung der fraglichen Fußpunktkurve ist nämlich das Resultat der Elimination von φ aus den Gleichungen

$$\frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}=a, \qquad \frac{x-b}{\sin\varphi}=\frac{y-c}{\cos\varphi},$$

sie ist daher

1) Vgl. S. Roberts, *On the pedals of conic sections* (Proc. London math. Soc. III, 1869—1871).

2) W. Blaschke, Arch. Math. Phys., III. Reihe, XIV, 1908, S. 163.

3) E. N. Barisien, *Podarie rispetto alla parabola* (Period. matem. XVI, 1900—1901).

4) Mitgeteilt von Leop. Braude an den Übersetzer.

$$(x-b)^2+(y-c)^2=\left[\frac{a(x-b)(y-c)}{x(x-b)+y(y-c)}\right]^2;$$

und wenn man

$$x-b=\varrho\cos\omega,\quad y-c=\varrho\sin\omega$$

setzt, so erhält man die obige Gleichung. Im Speziellen erhalten wir die Käferkurve (Bd. I, S. 272) oder das Vierblatt (Das. S. 365).

e) Die Fußpunktkurve der Kreuzkurve $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ in bezug auf den Anfangspunkt ist die Kurve 8. Ordnung $(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)^3 = 27a^4x^2y^2$ mit vier auf einem Kreise gelegenen Spitzen und einem isolierten Punkt im Zentrum.

f) Die Fußpunktkurve der Toroide (Nr. **262**) in bezug auf den Mittelpunkt ist eine Kurve 8. Ordnung, die F. Gomes Teixeira[1]) ausführlich untersucht hat.

g) Wenn Γ_1 die Fußpunktkurve von Γ in bezug auf P ist, so kann man natürlich in derselben Weise auch die von Γ_1 in bezug auf P konstruieren als Γ_2, sowie die Fußpunktkurve Γ_3 von Γ_2 usw.; die so entstandenen Kurven heißen die zweite, dritte ... Fußpunktkurve. — Betrachten wir z. B. die Sinusspirale mit der Gleichung

$$\varrho^m\cos m\omega=a^m,$$

so erhält man als Gleichung der n^{ten} Fußpunktkurve in bezug auf den Pol

$$\varrho^{-\frac{m}{mn-1}}\cdot\cos\left(-\frac{m}{mn-1}\,\omega\right)=a^{-\frac{m}{mn-1}},$$

weshalb die erhaltene Kurve wiederum eine Sinusspirale ist.[2]) Z. B. ist die Fußpunktkurve der Lemniskate, die ja eine Sinusspirale mit dem Index $m=-2$ ist (Bd. I, S. 467), eine neue Sinusspirale mit dem Index $m=-\frac{2}{3}$ (Bd. I, S. 481).

271. Wenn Γ eine geschlossene und überall konvexe Kurve ist und der Punkt P innerhalb derselben liegt, so besteht zwischen den Flächen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_1$ der Fußpunktkurve und der Gegenfußpunktkurve von Γ eine bemerkenswerte Beziehung, die 1881 von E. Catalan

1) *Tratado de las curvas* usw. S. 309 ff. Obras IV, S. 368.

2) Unter den Kurven, deren sukzessive Fußpunktkurven zu wichtigen Folgerungen führen, tritt besonders die gleichseitige Hyperbel hervor; nimmt man als festen Punkt das Zentrum der Kurve, so erhält man Linien, die seit 1847 von W. Roberts als Verallgemeinerungen der Bernoullischen Lemniskate betrachtet wurden (s. die Abh. *Généralisation d'une propriété de la lemniscate*, Liouvilles Journ. XII, 1847); er schuf dadurch eine bedeutende Erweiterung des Talbotschen Satzes (vgl. C. Sturm, *Démonstration de deux théorèmes sur la lemniscate*; Annales de Math. XIV, 1823—1824), die besagt: „Multipliziert man die Differenz zwischen dem unendlich langen Bogen der gleichseitigen Hyperbel $x^2-y^2=a^2$ und ihrer Asymptote mit der Länge des Quadranten der Lemniskate $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$, so erhält man $\frac{\pi a^2}{4}$."

entdeckt wurde[1]), die sich 1894 bei K. Tsuruta[2]) wiederfindet und auf welche im folgenden Jahre einige Mitarbeiter des *Intermédiaire des mathématiciens* stießen, als sie einige von E. Barisien[3]) ausgesprochene Sätze verallgemeinerten. Um diese Beziehung zu erhalten, machen wir zweckmäßig von der „magischen Gleichung“ der Tangente von Γ Anwendung, indem wir diese so schreiben:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wo p eine gegebene Funktion von φ ist. Es ist klar, daß φ und p die Polarkoordinaten eines erzeugenden Punktes der Fußpunktkurve von Γ in bezug auf den Anfangspunkt sind; daher hat man

$$A = \frac{1}{2}\int p^2 \cdot d\varphi,$$

wobei das Integral auf den ganzen Umfang von Γ auszudehnen ist. Differenzieren wir (7), so erhalten wir

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - p' = 0$$

oder auch $$x \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + y \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - p' = 0;$$

da diese eine Normale der Kurve Γ darstellt, so ist klar, daß $\frac{\pi}{2} + \varphi$ und p' die Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes der Gegenfußpunktkurve sind. Infolgedessen ist

$$A_1 = \frac{1}{2}\int p'^2 \cdot d\varphi;$$

und daher $$A - A_1 = \frac{1}{2}\int (p^2 - p'^2) \cdot d\varphi. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Bezeichnen nun ϱ, ω die Koordinaten eines Punktes von Γ, so erkennt man alsbald, daß die Relationen bestehen

$$p = \varrho \cos(\omega - \varphi), \qquad p' = \varrho \sin(\omega - \varphi),$$

oder auch $$p^2 + p'^2 = \varrho^2, \qquad \omega - \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{p'}{p};$$

daraus folgt $$d\omega - d\varphi = \frac{pp'' - p'^2}{p^2 + p'^2} \cdot d\varphi,$$

daher $$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{p^2 + pp''}{\varrho^2} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 d\omega = (p^2 + pp'') \cdot d\varphi.$$

Wird nun die Fläche der Kurve Γ mit C bezeichnet, so erhält man

$$C = \frac{1}{2}\int (p^2 + pp'') \cdot d\varphi,$$

---

1) Vgl. die *Mélanges mathématiques* (Mém. Soc. Liège, 2e Sér. XIII, 1886) S. 230.

2) *Counter pedals* (Mess. math., 2. Ser. XXIII, 1894).

3) *Intermédiaire* II, 1896, S. 107—109 und 344—345.

wobei das Integral sich über die ganze Kurve Γ zu erstrecken hat. Integriert man teilweise, so erhält man

$$\int pp'' \cdot d\varphi = pp' - \int p'^2 \cdot d\varphi,$$

der integrierte Teil wird aber zu Null, wenn das Integral sich über die ganze Kurve erstreckt, demnach ist

$$C = \frac{1}{2}\int (p^2 - p'^2) \cdot d\varphi \qquad (9)$$

Ein Vergleich der beiden Gleichungen (8) und (9) ergibt dann

$$C = A - A_1, \qquad (10)$$

welche Beziehung folgender Satz ausdrückt: **Die Differenz der Flächeninhalte der Fußpunktkurve und Gegenfußpunktkurve einer geschlossenen, überall konvexen Kurve Γ in bezug auf einen innerhalb Γ gelegenen Punkt P ist gleich der Fläche der Kurve Γ selbst.**

Als Beispiel nehmen wir für Γ eine Ellipse mit den Halbachsen a, b ($< a$) und als P einen ihrer Brennpunkte; dann ist bekanntlich die Fußpunktkurve ein Kreis mit dem Radius a, also $A = \pi a^2$; da $C = ab\pi$, so ist die Fläche der Gegenfußpunktkurve gleich $\pi a(a-b)$, ist also an Inhalt gleich einer Ellipse mit den Halbachsen a und $a - b$.

Auf die Fläche der Fußpunktkurve einer geschlossenen und konvexen Linie bezieht sich auch ein bemerkenswerter Satz, den J. Steiner entdeckt hat.[1]) Um diesen darzulegen, erinnern wir zunächst daran, daß man nach diesem Geometer unter dem Krümmungsschwerpunkt einer Kurve denjenigen Schwerpunkt versteht, den die Kurve haben würde, wenn die Dichtigkeit ihres Umfanges nicht gleichmäßig, sondern der Krümmung proportional wäre. Ist daher s der Bogen, R der Krümmungsradius der Kurve Γ, so werden die Koordinaten x_0, y_0 des Krümmungsschwerpunktes gegeben sein durch

$$x_0 = \frac{\int \frac{x \cdot ds}{R}}{\int \frac{ds}{R}}, \qquad y_0 = \frac{\int \frac{y \cdot ds}{R}}{\int \frac{ds}{R}},$$

wobei die Integration sich über alle Punkte von Γ zu erstrecken hat. Führen wir noch den Kontingenzwinkel $d\tau = \frac{ds}{R}$ ein, so daß also τ den Winkel der Normalen mit der x-Achse bezeichnen würde, so können wir einfacher schreiben:

$$x_0 = \frac{\int x \cdot d\tau}{\int d\tau}, \qquad y_0 = \frac{\int y \cdot d\tau}{\int d\tau}.$$

---

1) S. die berühmte Abhandlung *Vom Krümmungsschwerpunkte ebener Kurven* (Crelles Journ. XXI, 1838; *Gesammelte Werke* II, S. 97). Allgemeinere Sätze enthält die neue Abh. von M. Pelišek, *Über die Beziehungen zwischen den Bogenlängen der Rollkurven und der Fußpunktkurven* (Bull. intern. Acad. Sciences Bohême, 1909).

Da nun nach der Annahme Γ eine geschlossene Kurve ist, so ist $\int d\tau = 2\pi$, also

$$x_0 = \frac{1}{2\pi}\int x \cdot d\tau, \quad y_0 = \frac{1}{2\pi}\int y \cdot d\tau. \quad \ldots \quad (11)$$

Nehmen wir nun die Kurve Γ als durch die magische Gleichung ihrer Tangente dargestellt an

$$x \cos \tau + y \sin \tau - f(\tau) = 0 \quad \ldots \quad (12)$$

und kombinieren diese Gleichung mit ihrer Abgeleiteten

$$-x \sin \tau + y \cos \tau - f'(\tau) = 0,$$

so bekommen wir

$$x = f \cdot \cos \tau - f' \cdot \sin \tau, \quad y = f \cdot \sin \tau + f' \cdot \cos \tau,$$

und dann werden die Gleichungen (11) zu

$$2\pi x_0 = \int f \cdot \cos \tau \cdot d\tau - \int f' \cdot \sin \tau \cdot d\tau,$$
$$2\pi y_0 = \int f \cdot \sin \tau \cdot d\tau + \int f' \cdot \cos \tau \cdot d\tau.$$

Integrieren wir aber teilweise

$$\int f' \cdot \sin \tau \cdot d\tau = f \cdot \sin \tau - \int f \cdot \cos \tau \cdot d\tau,$$
$$\int f' \cdot \cos \tau \cdot d\tau = f \cdot \cos \tau + \int f \cdot \sin \tau \cdot d\tau,$$

so verschwinden, da die Integration sich über die ganze Kurve erstrecken soll, die integrierten Teile, und es bleibt nur

$$\pi x_0 = \int f \cdot \cos \tau \cdot d\tau, \quad \pi y_0 = \int f \cdot \sin \tau \cdot d\tau.$$

Betrachten wir nun, nachdem dies vorausgeschickt, einen beliebigen Punkt $P(\alpha, \beta)$ in der Ebene der durch Gleichung (12) definierten Kurve, so hat das von P auf die durch diese Gleichung dargestellte Gerade gefällte Lot die Länge

$$l = \alpha \cos \tau + \beta \sin \tau - f(\tau)$$

und bildet mit der x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} + \tau$. Demnach wird die Fläche S der Fußpunktkurve von Γ in bezug auf P gegeben durch

$$S = \frac{1}{2}\int (\alpha \cos \tau + \beta \sin \tau - f)^2 \cdot d\tau,$$

wobei die Integration sich wieder über alle Punkte von Γ zu erstrecken hat. Daraus folgt

$$2S = \alpha^2 \int \cos^2 \tau \cdot d\tau + \beta^2 \int \sin^2 \tau \cdot d\tau + 2\alpha\beta \int \sin \tau \cdot \cos \tau \cdot d\tau$$
$$- 2\alpha \int f \cos \tau \cdot d\tau - 2\beta \int f \sin \tau \cdot d\tau + \int f^2 \cdot d\tau.$$

Nun ist

$$\int \cos^2 \tau \cdot d\tau = \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{\sin 2\tau}{2}\right), \quad \int \sin^2 \tau \cdot d\tau = \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{\sin 2\tau}{2}\right),$$
$$2 \int \sin \tau \cdot \cos \tau \cdot d\tau = -\frac{\cos 2\tau}{2},$$

wenn wir daher zwischen $\tau = \tau_0$ und $\tau = \tau_0 + 2\pi$ integrieren, erhalten wir bzw. die Resultate π, π, 0. Daher können wir schreiben

$$2S = \pi(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta x_0) + \int f^2 \cdot d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Aus dieser bemerkenswerten Formel ergeben sich mehrere Folgerungen. Schreiben wir sie in folgender Weise

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta x_0 + \frac{\int f^2 \cdot d\tau - 2S}{\pi} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

so erkennen wir: **Diejenigen Punkte, in bezug auf welche die Fläche der Fußpunktkurve einer gegebenen geschlossenen und konvexen Linie konstant ist, liegen auf einem Kreise, dessen Zentrum der Krümmungsschwerpunkt jener Linie ist.** — Wir schreiben nun die Gleichung (13) in folgender Weise:

$$S = \pi \frac{(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2}{2} + \frac{\int f^2 \cdot d\tau - \pi(x_0{}^2 + y_0{}^2)}{2}. \quad . \quad . \quad (13')$$

Da die Fläche S ihren kleinsten Wert erhält, wenn der Punkt P mit dem Krümmungsschwerpunkte M zusammenfällt, so ist dieses Minimum

$$S_0 = \frac{\int f^2 \cdot d\tau - \pi(x_0{}^2 + y_0{}^2)}{2}$$

und daher wird die Gleichung (13′) zu

$$S = \frac{\pi}{2}\overline{PM}^2 + S_0.$$

Dies besagt: **Die Fläche der Fußpunktkurve einer geschlossenen konvexen Linie in bezug auf einen Punkt P ihrer Ebene ist gleich der Fläche der Fußpunktkurve in bezug auf den Krümmungsschwerpunkt, vermehrt um die Fläche des Halbkreises, der den Abstand dieses Punktes von P zum Radius hat.** Wenn z. B. die betrachtete Kurve ein Kreis mit dem Zentrum C und dem Radius r ist, so ist die Fläche der Fußpunktkurve eines beliebigen Punktes P gleich der Fläche des gegebenen Kreises vermehrt um den Halbkreis, dessen Radius PC ist; im speziellen, wenn P auf der Peripherie liegt, ist die Fläche der Fußpunktkurve, die eine Kardioide ist, (vgl. Bd. I S. 147, 152) gleich $\frac{3}{2}\pi r^2$.

272. Andere Formeln, die sich auf die Fläche der Fußpunktkurven beziehen, erhält man unschwer, wenn man die Kurve Γ, von der man ausgeht, als durch eine Polargleichung dargestellt annimmt, also durch $\varrho = f(\omega)$, wobei man den festen Punkt O als Pol nimmt. Wir wollen allgemein mit ϱ_m, ω_m die Koordinaten des Punktes M_m der m^{ten} Fußpunktkurve (S. 315) Γ_m bezeichnen, der dem Punkte $M(\varrho, \omega)$ von Γ entspricht, und mit A_m die Fläche dieser Fußpunktkurve. Da der Winkel OM_1M ein rechter ist, so geht der Kreis mit dem Durchmesser OM durch M_1; betrachten wir ein ebensolches Punktepaar M', M'_1 von Γ und Γ_1, so erkennt man, daß der Kreis mit dem Durchmesser OM' durch M'_1 gehen muß. Wenn nun M' dem M unendlich

nahe kommt, so wird auch M'_1 mit M_1 zusammenrücken, und die Gerade $M_1 M'_1$ wird sowohl mit der Tangente in M_1 an Γ_1, als auch mit der Tangente in M_1 an den Kreis OM_1M zusammenfallen. Demnach berührt die Tangente t_1 in M_1 an Γ_1 den Kreis OM_1M, infolgedessen geht die Normale in M_1 zu Γ_1 durch den Mittelpunkt C der Strecke OM.[1]) (Vgl. hierzu die Fig. 62, Taf. VI.) Der Fußpunkt M_2 des von O auf die Tangente des Kreises über OM in M_1 gefällten Lotes gehört also der zweiten Fußpunktkurve Γ_2 an. Ähnlich findet man den Punkt M_3 usw., alle die dem Punkte M entsprechenden Punkte der sukzessiven Fußpunktkurven.

Ist nun (Taf. VI, Fig. 62) μ der Winkel, den die Tangente in M an Γ mit dem Vektor bildet, so hat man bekanntlich,

$$\operatorname{tg} \mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}, \qquad \text{oder} \quad \mu = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varrho}{\varrho'}, \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei die Akzente immer die Ableitungen in bezug auf ω bedeuten. Außerdem ergibt sich aus der einfachen Betrachtung der Figur, daß

$$\mu = \omega_1 - \omega + \frac{\pi}{2},$$

daher

$$\frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{d\mu}{d\omega} + 1$$

und wegen der obigen Gleichung (15)

$$\frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Überdies hat man $\varrho_1 = \varrho \sin \mu$, und deshalb wegen Gleichung (15)

$$\varrho_1 = \frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Kombiniert man die Gleichungen (16) und (17), so bekommt man folgenden Ausdruck für die Ableitung der Fläche der ersten Fußpunktkurve

$$\frac{dA_1}{d\omega} = \frac{1}{2}\varrho_1{}^2 \frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{\varrho^4}{2} \frac{\varrho^2 + 2\varrho' - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)}.$$

Ebenso findet man

$$\omega_2 = 2(\omega_1 - \omega) + \omega, \qquad \varrho_2 = \varrho_1 \sin \mu,$$

oder zufolge des Vorhergehenden

$$\omega_2 = 2\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right) + \omega, \qquad \varrho_2 = \varrho \sin^2 \mu.$$

Ähnlich findet man dann, daß im allgemeinen

$$\omega_m = m\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right) + \omega, \quad \varrho_m = \varrho \sin^m \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

---

1) J. Bertrand, *Calcul différentiel* (Paris, 1864) S. 10 und 73; G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887) S. 91; Lie-Scheffers, a. a. O. S. 17.

und daher ist
$$\frac{dA_m}{d\omega} = \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{\varrho^2}{\varrho^2+\varrho'^2}\right)^m \cdot \left(m\frac{\varrho'^2-\varrho\varrho''}{\varrho^2+\varrho'^2}+1\right) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

als bemerkenswerter Ausdruck für die Fläche der m^{ten} Fußpunktkurve. Diesen z. B. für die Sinusspiralen anzuwenden, überlassen wir dem Leser.[1])

273. Die Reihe der aufeinander folgenden Fußpunktkurven einer gegebenen Kurve Γ kann man auch rückwärts fortsetzen und somit die Kurve Γ_{-m} betrachten, von welcher Γ die m^{te} Fußpunktkurve sein würde. Sie wird als die m^{te} negative Fußpunktkurve bezeichnet, und auf sie kann man auch die Gleichung (19) anwenden, wenn man das Vorzeichen von m wechselt. Insbesondere handelt es sich meistens um die erste dieser Kurven, die man schlechthin als die negative Fußpunktkurve von Γ bezeichnet. Ein Beispiel hiervon liefert uns die Trisektrix von Catalan (Bd. I, S. 90), welche die negative Fußpunktkurve einer Parabel in bezug auf den Brennpunkt ist. Es ist klar, daß Γ_{-1} die Enveloppe derjenigen Geraden ist, die in den Punkten von Γ auf den Verbindungslinien mit dem festen Punkte O senkrecht stehen. Hieraus ergibt sich ein einfaches Verfahren, die Gleichung der negativen Fußpunktkurve zu erhalten für eine Kurve Γ, die durch die Polargleichung $\varrho = f(\omega)$ dargestellt ist, unter der Annahme, daß der feste Punkt O mit dem Pole zusammenfällt. Da in diesem Falle

$$x \cos \omega + y \sin \omega - f(\omega) = 0$$

die allgemeine Gleichung der genannten Senkrechten ist, so hat man nur aus dieser und ihrer Ableitung, $-x \sin \omega + y \cos \omega - f'(\omega) = 0$, ω zu eliminieren, um die Enveloppe zu erhalten.

Man hat weiterhin auch bemerkt, daß das analytische Problem der Auffindung der Gleichung der negativen Fußpunktkurve nicht verschieden ist von dem, die Parallelkurve zu bestimmen. Um diese Beobachtung zu beweisen, betrachten wir eine beliebige Kurve Γ mit der Gleichung $f(x, y) = 0$, sowie diejenige Γ', die man erhält, wenn man die vom Anfangspunkte aus gezogenen Vektoren von Γ verdoppelt; dann ist die Gleichung von Γ' offenbar $f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 0$. Die Parallelkurve von Γ' im Abstande k ist die Enveloppe des Kreises $(X-x)^2 + (Y-y)^2 = k^2$; wenn man nun $x = 2\xi$, $y = 2\eta$ setzt, so wird ihre

1) Betreffs weiterer Entwickelungen über diesen Gegenstand sehe man die Note von E. N. Barisien, *Sur les podaires successives d'une courbe* (Nouv. Ann. Mathém. 3e Sér. XIV, 1895) und für die Untersuchung einer speziellen Klasse von Fußpunktkurven die Abh. von F. P. Ruffini, *Delle pedali delle parabole cubiche divergenti* (Mem. Accad. Bologna 5. Ser. V, 1896).

Gleichung das Resultat der Elimination von ξ, η aus den drei folgenden Gleichungen sein

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad (X - 2\xi)^2 + (Y - 2\eta)^2 = k^2, \quad \frac{X - 2\xi}{\frac{\partial f}{\partial \xi}} = \frac{Y - 2\eta}{\frac{\partial f}{\partial \eta}}. \quad (20)$$

Nun ist aber die negative Fußpunktkurve von Γ, wenn der Pol im Anfangspunkte liegt, die Enveloppe der ∞^1 durch die Gleichung

$$(X - x)x + (Y - y)y = 0$$

dargestellten Geraden, wobei der Punkt (x, y) auf Γ variiert; demnach ist deren Gleichung das Resultat der Elimination von x, y aus den dreien

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y) = 0, \quad (X - 2x)^2 + (Y - 2y)^2 = (X^2 + Y^2), \\ \qquad \dfrac{X - 2x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \dfrac{Y - 2y}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \end{array}\right\} \quad . \; . \; (21)$$

Vergleichen wir die beiden Systeme (20) und (21) miteinander, so sehen wir sogleich, daß das letztere aus dem ersteren hervorgeht, indem man k an Stelle von $\sqrt{X^2 + Y^2}$ setzt; daher kann man folgenden Schluß ziehen: **Es sei eine ebene Kurve Γ gegeben; man konstruiere eine zweite Γ', indem man die von einem festen Punkte P ausgehenden Vektoren von Γ' verdoppelt. Hat man nun die Gleichung der Parallelkurve von Γ' im Abstande k gefunden, so erhält man die der negativen Fußpunktkurve von Γ in bezug auf P, wenn man in jener Gleichung k durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ ersetzt.**[1])

Die Definition der negativen Fußpunktkurve einer Kurve Γ als Enveloppe aufgefaßt ist so einfach, daß sie uns gestattet, durch geometrische Überlegungen ganz leicht viele von den Eigenschaften jener Kurve abzuleiten, insbesondere wenn Γ algebraisch ist; dies soll im folgenden gezeigt werden.[2])

Um anzudeuten, daß die Ausgangskurve von der Ordnung n sein soll, wollen wir sie im folgenden mit Γ^n bezeichnen und ihre negative Fußpunktkurve in bezug auf den Pol O mit Π. Bemerken wir zunächst, daß einem r-fachen Punkte von Γ^n eine r-fache Tangente von Π entspricht, insbesondere einem Doppelpunkte von Γ^n eine Doppeltangente von Π, einer Spitze aber ein Wendepunkt. — Greifen wir in der Ebene der beiden Kurven einen beliebigen Punkt P heraus und beschreiben über OP als Durchmesser einen Kreis, so wird dieser die Γ^n in $2n$ Punkten schneiden; jeder von diesen ist Ausgangspunkt einer durch P gehenden Tangente von Π; somit gibt es $2n$ Tangenten

---

1) Dieser Satz ist von Strebor (d. i. W. Roberts) ausgesprochen in der Note: *Théorème sur le courbes planes* (Nouv. Ann. Mathém. XIX, 1860).

2) A. Ameseder, *Theorie der negativen Fußpunktkurven* (Arch. Math. Phys. LXIV, 1879).

derselben, die durch P gehen, und da es andere nicht gibt, so folgt: **Die negative Fußpunktkurve Π von Γ^n ist im allgemeinen von der Klasse $2n$.** Aus den gemachten Überlegungen geht auch hervor, daß, wenn P ein k-facher Punkt von Γ^n wäre und diese i-mal durch die unendlich fernen Kreispunkte ginge, die Klasse von Π auf $2(n-i)-k$ sinken würde. Wenn z. B. n gerade und $i = k = \frac{n}{2}$ wäre, so würde die Klasse der negativen Fußpunktkurve $= \frac{n}{2}$ sein, was im Falle $n = 2$ offenbar zutrifft.

Es sei U ein unendlich ferner Punkt von Γ^n, der nicht mit einem der Kreispunkte zusammenfällt; das von U auf PU gefällte Lot fällt dann mit der unendlich fernen Geraden zusammen, daher wird diese eine Tangente von Π, und sie ist dies so oft, als es unendlich ferne Punkte auf Γ^n gibt, die nicht Kreispunkte sind. Demnach: **Wenn Γ^n i-mal durch jeden der Kreispunkte geht, so hat ihre negative Fußpunktkurve Π die unendlich ferne Gerade als $(n-2i)$-fache Tangente.** Wenn in diesem Falle P ein k-facher Punkt von Γ^n ist, so schneidet die Gerade, welche ihn mit einem der Kreispunkte verbindet, außerdem die Kurve Γ^n in $n-k-i$ Punkten Q; die von Q auf PQ gefällten Lote fallen bekanntlich mit diesen Geraden selbst zusammen; daher: **Die negative Fußpunktkurve einer Kurve mit k-fachem Punkte P, die i-mal durch jeden der beiden unendlich fernen Kreispunkte geht, hat die Geraden, welche P mit den Kreispunkten verbinden, als $(n-k-i)$-fache Tangenten.**

Wir beschreiben den Kreis über OP als Durchmesser, wo P zunächst beliebig ist, und betrachten zwei seiner Schnittpunkte M_1 und M_2 mit der gegebenen Γ^n. $PM_1 \equiv t_1$ und $PM_2 \equiv t_2$ werden dann Tangenten der negativen Fußpunktkurve von Γ^n sein. Stellen wir uns nun vor, daß dieser Kreis sich in der Weise verschiebe, daß M_1 und M_2 zusammenrücken, dann kommt t_2 der t_1 unendlich nahe, und der Punkt P, in welchem sich t_1 und t_2 schneiden, strebt dahin, mit dem Berührungspunkte der Geraden t_1 mit ihrer eigenen Enveloppe zusammenzufallen, d. h. mit einem Punkte von Π. Greifen wir daher auf Γ^n beliebig den Punkt P_1 heraus und beschreiben den Kreis, der durch O geht und Γ^n in P_1 berührt, so ist der zweite Endpunkt M des durch O gehenden Durchmessers ein Punkt der negativen Fußpunktkurve von Γ^n in bezug auf O, und die Gerade P_1M ist die zugehörige Tangente. (S. Fig. 63, Taf. VI.) Damit haben wir eine Punktkonstruktion für die negative Fußpunktkurve Π.

Es sei t eine der von O an Γ^n gezogenen Tangenten, T der zugehörige Berührungspunkt; die in T zu t errichtete Senkrechte n wird dann eine Tangente von Π sein. Konstruieren wir jetzt den Berührungspunkt nach dem oben angegebenen Verfahren, so sehen

wir, daß er ins Unendliche fällt. **Die negative Fußpunktkurve hat also so viele Asymptoten, als es Tangenten vom Pole O an die Fundamentalkurve gibt;** sie entsprechen den Normalen der Fundamentalkurve selbst. Ist Γ^n eine allgemeine Kurve ihrer Ordnung, und gehört der Punkt O dieser nicht an, so ist die Zahl der Asymptoten $n(n-1)$, und da in diesem Falle die unendlich ferne Gerade eine n-fache Tangente von Π ist (s. oben), so hat diese insgesamt $n(n+1)$ Schnitte mit der unendlich fernen Geraden; das zeigt, **daß die negative Fußpunktkurve einer Kurve von der Ordnung n im allgemeinen von der Ordnung $n(n+1)$ ist.** Die Veränderungen, die diese Zahl in speziellen Fällen erleidet, lassen sich leicht durch einfache Modifikationen der hier angewendeten Schlüsse ermitteln.

Wenn ein durch O gehender Kreis Γ^n sowohl in M als auch in $\overline{M}$ berührt, so ist der dem Punkte O diametral gegenüberliegende Punkt P ein Berührungspunkt der negativen Fußpunktkurve Π sowohl mit der Geraden PM, als auch mit $P\overline{M}$; demnach ist P ein Doppelpunkt von Π. **Die Kurve Π hat also so viele Doppelpunkte, als es doppeltberührende Kreise Γ^n gibt, die durch O gehen,** ähnlich erkennt man, **daß Π so viele Spitzen hat, als es Schmiegungskreise von Γ_n gibt, die durch P gehen.** Wenn insbesondere Γ^n eine rationale Kurve ist, die zum Punkte P keine spezielle Lage hat, so hat die Kurve Π $4(n-1)\cdot(2n-3)$ Doppelpunkte und $6(n-1)$ Spitzen.

Nehmen wir z. B. an, daß Γ^n ein zentrischer Kegelschnitt sei[1]), so wird die negative Fußpunktkurve Π im allgemeinen sechster Ordnung sein, von der vierten Klasse und mit vier Doppelpunkten und 6 Spitzen; Doppeltangenten derselben sind die unendlich ferne Gerade und die Geraden, welche den festen Punkt O mit den Kreispunkten verbinden. Ist aber Γ^n eine Parabel, so ist ihre negative Fußpunktkurve auch von der vierten Klasse, aber nur von der fünften Ordnung; sie hat 4 Spitzen; der unendlich ferne Punkt der Parabelachse ist für sie ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente, usw.

274. Wenn man den Ort der Punkte aufsucht, die symmetrisch in bezug auf die Tangenten einer Kurve Γ zu einem festen Punkte O sind, so erhält man eine neue Kurve, die offenbar homothetisch zur Fußpunktkurve von Γ in bezug auf den Punkt O ist, indem das Homothetie-Verhältnis gleich 2 ist. Sie heißt die Podoide von Γ in bezug auf O.[2])

---

1) A. Ameseder, *Negative Fußpunktkurven der Kegelschnitte* (Arch. Math. Phys. LXIV, 1879).

2) H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar le-Duc, 1897) S. 221.

Wenn man O als Anfang nimmt und $f(x, y) = 0$ als Gleichung von Γ, so ist die der Tangente im Punkte x, y

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

wo X, Y die laufenden Koordinaten sind. Sind nun x_1, y_1 die des entsprechenden Punktes M der Podoide, so wird die Gleichung der Geraden, welche die Strecke OM senkrecht halbiert,

$$Xx_1 + Yy_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = 0$$

sein; diese fällt aber nach der Annahme mit jener Tangente zusammen, daher muß

$$\frac{x_1}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y_1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

und folglich

$$x_1 = \frac{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad y_1 = \frac{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\frac{\partial f}{\partial y}. \quad . \quad (22)$$

Diese Gleichungen stellen analytisch die podoidale Transformation dar.[1])

Bei dieser entspricht, in gleicher Weise wie bei der Fußpunkttransformation, jeder Tangente einer Kurve ein Punkt: wie jene, ist sie in gewissem Sinne analog zu derjenigen, welche jeder Tangente das Zentrum des Kreises, in welchen sie sich durch eine gegebene Transformation durch reziproke Radien verwandelt, entsprechen läßt. Nehmen wir als Anfang das Zentrum und nehmen

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - f(\varphi) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

als „magische Gleichung" der Tangente an die gegebene Kurve (S. 255), und ist k^2 die Potenz jener Transformation, so verwandelt sich die Gerade (23) in den Kreis

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{f(\varphi)}(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Da sein Mittelpunkt nun die Koordinaten hat

$$x_0 = \frac{k^2 \cos \varphi}{2f(\varphi)}, \quad y_0 = \frac{k^2 \sin \varphi}{2f(\varphi)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

so ist dies die parametrische Darstellung der sog. Inversionskurve zur gegebenen.[2])

1) Es ist leicht zu sehen, daß auch diese eine birationale Punkt-Geraden-Verwandtschaft ist.

2) R. Raimondi, *Sulle curve d'inversione* (Giorn. di Matem. XXVI, 1888).

Neuntes Kapitel.

Die isoptischen und orthoptischen Kurven.

275. Bewegt man einen Winkel α so, daß seine beiden Schenkel immer dieselbe Kurve Γ berühren, so beschreibt der Scheitelpunkt A eine neue Kurve, mit der sich schon Jacobi beschäftigt hat[1]), und welche die isoptische Kurve von Γ heißt, weil sie offenbar der Ort der Punkte ist, von welchen aus die Kurve Γ unter dem gleichen Winkel α gesehen wird. Ist dieser Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so heißt die Kurve die orthoptische.[2]) Ist z. B. Γ ein zentrischer Kegelschnitt, so ist die orthoptische Kurve ein Kreis, ist sie eine Parabel, so ist jene eine Gerade (nämlich die Direktrix); die isoptischen Kurven der Kegelschnitte dagegen sind uns schon bekannte Kurven vierter Ordnung (s. Nr. **64**, Bd. I, S. 131).

Es ist leicht zu beweisen, daß die Tangente in einem Punkte A der isoptischen Kurve von Γ daselbst auch den Kreis berührt, der durch A und die beiden entsprechenden Berührungspunkte der Schenkel des bewegten Winkels mit Γ geht.[3])

Ist die Kurve Γ durch die magische Gleichung ihrer Tangente definiert

$$y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

so ist klar, daß die isoptische Kurve durch das System der Gl. (1) und

$$y \cos(\tau + \alpha) - x \sin(\tau + \alpha) - f(\tau + \alpha) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

dargestellt wird. Leitet man nun hieraus die folgenden ab,

$$\left.\begin{aligned} x \sin \alpha &= \sin(\tau + \alpha) \cdot f(\tau) - \sin \tau \cdot f(\tau + \alpha), \\ y \sin \alpha &= \cos(\tau + \alpha) \cdot f(\tau) - \cos \tau \cdot f(\tau + \alpha), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

so hat man eine parametrische Darstellung der isoptischen Kurve. Die Aufstellung der Kurvengleichung (das direkte Problem der isoptischen Kurve) erfordert also nur algebraische Operationen.

---

1) Vgl. L. Königsberger, *C. G. J. Jacobi* (Leipzig, 1904) S. 113.

2) Diese Namen wurden von C. Taylor (*Note on a theory of orthoptic and isoptic loci*, Proc. R. Soc. London XXXVII, 1884; Rep. Brit. Ass. 1885; Mess. of math. XVI, 1886) vorgeschlagen. Für den Fall der Kegelschnitte wandte Laquière (*Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections plans de la cyclide*, Nouv. Corr. math. VI, 1880) aus leicht begreiflichen Gründen den Namen parallaktische Kurven an, den man auch im allgemeinen benutzen könnte. O. Zimmermann (*Über die Brennpunkte, die Leitlinien und die Orthogonale einer algebraischen Kurve beliebiger Klasse:* Journ. f. Math., CXXVI, 1903) hat dagegen den Namen Orthogonalen gebraucht.

3) J. Bertrand, *Calcul différentiel* (Paris, 1864) S. 13 u. 84.

Schwieriger ist das umgekehrte Problem der isoptischen Kurven: dahin gehört u. a. die Aufsuchung derjenigen Kurven, die mit den Kegelschnitten die Eigenschaft teilen, daß ihre orthoptischen Kurven Kreise seien.[1])

Die Betrachtung der hier besprochenen Kurven geht bis in den Anfang des 18. Jahrhunderts zurück, indem schon de l'Hôpital die isoptischen Kurven der Parabel untersuchte[2]) und de La Hire die isoptischen der Kegelschnitte[3]) und der Zykloiden[4]) bestimmt hat, und bald darauf Clairaut sich mit dem inversen Problem der isoptischen Kurven beschäftigte[5]) und Fontanes mit dem direkten.[6]) Später entdeckte Chasles[7]), daß die isoptische einer gemeinen Epizykloide eine verlängerte bzw. verkürzte Epizykloide ist, eine Erweiterung eines der von La Hire erhaltenen Resultate.

Wenn Γ eine algebraische Kurve ist, so werden es auch alle isoptischen sein; daher ergibt sich die Aufgabe, die Plückerschen Charakteristiken derselben zu bestimmen, wenn die von Γ bekannt sind; diese wurde teils von E. de Jonquières[8]), eingehender von C. Taylor[9]) behandelt, und mit Benutzung der Björlingschen Methoden von A. T. Ljungh[10]) vollständig gelöst.

---

1) Es ist dies die Question 1049 der Nouv. Ann., gestellt von Kiepert und gelöst von Bouret (Das. 2. Ser. XII, 1873, S. 328); vgl. auch die Bemerkungen von Doucet (Das. S. 571), außerdem Nouv. Ann. 2. Ser. XVIII, 1878. S. 144.

2) *Sections coniques* (Paris 1720; druckfertig seit 1704) S. 266.

3) *Construction générale des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux, droits, aigus ou obtus qui sont formés par les touchantes des sections coniques* (Mém. de Paris 1704). Die isoptische eines Kegelschnittes in einer allgemeinen projektiven Maßbestimmung ist der Ort der Punkte, von denen man an zwei Kegelschnitte zwei Paare von Tangenten ziehen kann, die ein gegebenes Doppelverhältnis haben; dieser ist eingehend von Cayley untersucht worden (*On a locus derived from a conic,* Quart. Journ. Math. VIII. 1867).

4) *Description d'un lieu géométrique, où sont les sommets des angles égaux, formés par deux touchantes d'une cycloïde* (Mém. Acad. de Paris, 1704).

5) *Solution de plusieurs problèmes où il s'agit des courbes dont la propriété consiste dans une certaine rélation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée* (Mém. de Paris, 1724).

6) Ebendaselbst.

7) *Aperçu historique* (2. Aufl. Paris, 1875) S. 125 Note. Vgl. Loucher, *Sur le lieu des sommets des angles constantes circonscrits ou normaux à une épicycloïde* (Nouv. Ann. Math. 2e Sér. XI, 1892). Übrigens scheint dieser Chaslesche Satz nicht ganz richtig zu sein, da z. B. (Nr. 211) die orthoptische Kurve einer Kardioide (die bekanntlich eine spezielle Epizykloide ist) aus einem Kreise und einer Pascalschen Schnecke besteht: vgl. Wolstenholme, Proc. London Math. Soc. IV, 1873, S. 330 und 418 und O. Gütsche, Progr. Breslau 1907, S. 11.

8) *Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de classe n* (Nouv. Ann. Math. XX, 1861).

9) S. die in Note 2 S. 326 zitierten Schriften.

10) S. die Diss. *Über isoptische und orthoptische Kurven* (Lund, 1895), wo die allgemeinen Resultate auf einige bemerkenswerte Kurvenfamilien, wie die Parabeln höherer Ordnung, die Epizykloiden usw. angewandt sind.

Der Begriff der isoptischen Kurve läßt sich verallgemeinern: man kann den Ort der Scheitel eines Winkels von konstanter Größe betrachten, dessen Schenkel fortwährend zwei gegebene Kurven Γ', Γ'' berühren[1]). Wenn diese algebraisch sind, so ist es auch die resultierende Kurve[2]) und man kann auch ihre Charakteristiken erhalten, indem man die Resultate für die Plückerschen Zahlen der isoptischen einer Kurve in Anwendung bringt. Wenn man nämlich die beiden Kurven Γ' und Γ'' als eine einzige Γ betrachtet, so wird die isoptische von Γ bestehen 1. aus der von Γ', 2. aus der von Γ'', 3. aus der von Γ' und Γ''; da man nun die Charakteristiken von Γ', Γ'', Γ kennt und die der Kurven 1. und 2. bestimmen kann, so lassen sich die von 3. daraus ableiten. — Wenn der konstante Winkel ein Rechter ist, so wird die erhaltene Kurve auch die Fußpunktkurve der einen Kurve in bezug auf die andere genannt[3]). Reduziert sich nämlich die eine der beiden Kurven auf einen Punkt, so haben wir wieder die Fußpunktkurve der anderen im gewöhnlichen Sinne; damit ist eine Beziehung zwischen den orthoptischen und den Fußpunktkurven hergestellt.

Das Problem der orthoptischen Kurve zweier Kurven (sowie das der isoptischen) läßt sich ebenfalls umkehren. Sind nämlich zwei Kurven Γ und Γ' gegeben, so kann man eine dritte Kurve Γ'' aufsuchen, derart, daß Γ die orthoptische der beiden Kurven Γ' und Γ'' wird. Γ'' ist dann offenbar die Enveloppe des zweiten Schenkels des rechten Winkels, dessen erster Schenkel fortwährend die Kurve Γ' berührt und dessen Scheitel Γ durchläuft. Die Aufsuchung von Γ'' bietet also keine theoretischen Schwierigkeiten. Wenden wir dies an auf den Fall, daß Γ' die logarithmische Kurve mit der Gleichung

$$\frac{y}{a} = \log \frac{x}{a}$$

sei und die Kurve Γ ihre Asymptote $x = 0$.[4]) Da nun

$$Y + a - a \log \frac{x}{a} - \frac{a}{x} X = 0$$

die allgemeine Gleichung der Tangente ist, so muß die gesuchte Kurve Γ'' die Enveloppe der ∞^1 Geraden sein, die bei Variation von x dargestellt werden durch

---

1) H. G. S. Schotten, *Über Fußpunktskurven* (Prog. Hersfeld, 1887). — Auf derartige Kurven bezieht sich die Question 187, gestellt von Chasles in den Nouv. Ann. Math.

2) Sind z. B. Γ', Γ'' Kreise, so besteht der fragliche Ort aus einer Gruppe von Pascalschen Schnecken (A. Mannheim, *Limaçon de Pascal,* Nouv. Ann. Math. XV, 1856).

3) Habich, *Annali di Matem.* 2. Ser. II, 1868—69, S. 141.

4) Die folgenden Sätze wurden dem Verfasser 1901 brieflich mitgeteilt von J. Finsterbusch in Zwickau.

$$Y + a - a \log \frac{x}{a} + \frac{x}{a} X = 0.$$

Differenzieren wir nach x, so erhalten wir $x = \frac{a^2}{X}$, daher wird die vorige Gleichung

$$Y + 2a - a \log \frac{a}{X} = 0,$$

oder

$$-\frac{Y + 2a}{a} = \log \frac{X}{a};$$

diese Gleichung beweist, **daß die gesuchte Kurve selbst eine der gegebenen gleiche Kurve ist.** Die beiden Kurven Γ' (die gegebene) und Γ'' (die gesuchte) entsprechen sich Punkt für Punkt; die Gerade, **welche zwei entsprechende Punkte P' und P'' verbindet, umhüllt eine Kettenlinie,** die, wie sich leicht zeigen läßt, die Gleichung hat

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+a}{a}} + e^{-\frac{y+a}{a}}\right);$$

ebensoleicht läßt sich zeigen, **daß diese der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken $P'P''$ ist.**

Zehntes Kapitel.

Die Differential- und Integralkurven; ähnliche Ableitungsgesetze.

276. Ist die Gleichung einer Kurve in kartesischen Koordinaten,

$$y = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

gegeben, so kann man dem Beispiele Kästners folgend, eine neue Kurve betrachten, die durch die Gleichung

$$y = f'(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

dargestellt wird. Diese heißt die Differentialkurve[1]) oder Derivationskurve[2]) der gegebenen. Verfährt man nun mit der Kurve (2) wie mit (1), so erhält man eine zweite Differentialkurve, dann eine dritte usw.; das Verfahren würde nur dann zu einem Abschlusse kommen, wenn f ein ganzes Polynom von x wäre. Die Eigenschaften der abgeleiteten Kurve lassen sich mit Leichtigkeit aus denen der Originalkurve herleiten, wenn man die Beziehungen beachtet, die zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung bestehen: so entsprechen den Kulminationspunkten der ursprünglichen Kurve die Schnitte der abgeleiteten mit der x-Achse, den Wendepunkten jener die Kulminationspunkte dieser, usw.

1) M. Cantor, *Vorlesungen über Gesch. d. Math.* III, 2. Aufl. (Leipzig, 1901), S. 583.

2) E. Rehfeld, *Die Derivationskurve der Zykloide* (Diss. Marburg, 1884).

Die Betrachtung der Differentialkurve bietet namentlich dann ein gewisses Interesse, wenn $f(x)$ eine transzendente Funktion, $f'(x)$ aber algebraisch ist, weil dann der Fall vorliegt, daß eine transzendente Kurve mit einer algebraischen eng verknüpft ist. Dies trifft insbesondere zu bei der Zykloide. Diese hat nämlich die Gleichung

$$y = a \cdot \arccos \frac{x-a}{a} + \sqrt{2ax - x^2};$$

ihre Differentialkurve aber ist

$$y = -\frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

oder

$$(x - 2a)y^2 + x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Sie ist daher eine Kurve dritter Ordnung, die symmetrisch in bezug auf die x-Achse ist und ganz innerhalb des von den Geraden $x = 0$, $x = 2a$ begrenzten Streifens liegt, letztere Gerade ist eine Wendeasymptote derselben, die übrigen reellen Wendepunkte haben die Koordinaten $x = \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; sie hat also die Gestalt einer Serpentine. Ihre Hessesche hat zur Gleichung

$$xy^2 + 4ay^2 + x - 2a = 0;$$

setzt man hierin $2a - x = \xi$, so wird diese zu

$$(\xi - 6a)y^2 + \xi = 0,$$

die sich von (3) nur durch den Übergang von x in ξ und von a in $3a$ unterscheidet. Folglich: **Die Differentialkurve der Zykloide ist eine Kurve dritter Ordnung, deren Hessesche eine dieser ähnliche Kurve ist**; es ist dies die hervorragendste Eigenschaft derselben.

Auch für Polarkoordinaten sind die Differentialkurven betrachtet worden, und zwar von J. Sobotka[1]). Ist $\varrho = f(\omega)$ die Gleichung einer Kurve, so ist $\varrho' = \frac{df}{d\omega}$ die der zugehörigen Differentialkurve. Denkt man sich nun den Vektor ϱ' von demselben Pole aus abgetragen, aber in senkrechter Richtung zu ϱ, so ist sein Endpunkt bekanntermaßen der Endpunkt der zugehörigen Subnormalen. Wir haben es also in diesem Falle mit dem geometrischen Orte Γ' der Endpunkte der Polarsubnormalen einer Kurve Γ zu tun[2]). Die Beziehung zwischen den Punkten $P(\varrho, \omega)$ von Γ und den Punkten $P'(\varrho', \omega')$ von Γ' wird durch die Formeln

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega}, \qquad \omega' = \omega + \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

1) S. § II des *Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralkurven* (Wiener Ber. CVIII, 1898).

2) Vgl. Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis* I. (III. Aufl. Leipzig, 1878) S. 124.

ausgedrückt. Ist Γ algebraisch, so wird es auch Γ' sein, und es entsteht dann die Frage, welche Beziehung zwischen den Ordnungen der beiden Kurven bestehe. Nehmen wir daher an, daß $f(x, y) = 0$ die Gleichung von Γ in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten sei, so hat man, um den Punkt $P'(x', y')$ von Γ' zu finden, der dem Punkte $P(x, y)$ entspricht, den Schnittpunkt der Tangente in P an Γ mit der in O zu OP errichteten Senkrechten aufzusuchen. Nun haben die genannten Geraden, wenn X, Y die laufenden Koordinaten sind, bezüglich die Gleichungen

$$X\frac{\partial f}{\partial y} - Y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Xx + Yy = 0;$$

infolgedessen ist

$$x' = y\,\frac{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad y' = -x\,\frac{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Formeln liefern für jedes Wertepaar x, y, das der Gleichung (4) genügt, die Koordinaten des entsprechenden Punktes x', y'. Um die Ordnung von Γ' zu finden, müssen wir aufsuchen, wie viele ihrer Punkte sich auf der beliebigen Geraden r

$$Ax + By + C = 0$$

befinden. Es muß dann auch

$$Ax' + By' + C = 0$$

sein, oder wegen Gleichung (5)

$$(Ay - Bx)\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + C\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Nun stellt diese Gleichung im allgemeinen eine Kurve von der Ordnung $n + 1$ dar, welche die Kurve n^{ter} Ordnung $f(x, y) = 0$ in denjenigen Punkten P schneidet, deren entsprechende Punkte P' auf der Geraden r liegen; also: **Der Ort der Endpunkte der Polarsubnormalen einer Kurve n^{ter} Ordnung ist im allgemeinen von der Ordnung $n(n+1)$.**[1]) Jeder p-fache Punkt vermindert diese Zahl im allgemeinen um $p(p-1)$ Einheiten[2]); für eine rationale Kurve n^{ter}

---

1) Z. B. für einen Kegelschnitt ist sie eine Kurve sechster Ordnung; vgl. Schlömich, a. a. O. S. 124.

2) Als Kontrolle betrachte man eine Kurve Γ von der Ordnung n, die aus zwei Kurven Γ_1, Γ_2 von den Ordnungen n_1 bzw. n_2 zusammengesetzt ist. Der Ort der Endpunkte der Polarsubnormalen von Γ besteht alsdann aus den beiden Γ_1 und Γ_2 entsprechenden Orten, ist daher von der Ordnung $n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1)$. Diese Zahl muß man auch erhalten, wenn man den obigen Satz auf Γ, welches die Ordnung $n_1 + n_2$ hat, anwendet, als $(n_1+n_2)(n_1+n_2+1) - 2n_1n_2$; dies ist aber gleich $n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1)$, wie eben gefunden.

Ordnung reduziert sie sich daher auf $n(n+1)-(n-1)(n-2) = 2(2n-1)$. Wenn ferner der Pol ein p-facher Punkt ist, so vermindert sich die Ordnung um p^2 Einheiten.

Die Analogie führte auch zur Betrachtung des Ortes Γ_1 der Endpunkte der Polarsubtangenten[1]). Sind $P(\varrho, \omega)$ und $P_1(\varrho_1, \omega_1)$ zwei entsprechende Punkte der beiden Kurven, so hat man

$$\varrho_1 = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega}, \qquad \omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

welche Beziehungen uns die Gleichung von Γ_1 finden lassen, wenn die von Γ gegeben ist. Wenn hingegen Γ durch eine Gleichung in kartesischen rechtwinkligen Koordinaten gegeben wäre, so hätte man, um die von Γ_2 zu finden, folgende Formeln anzuwenden:

$$x_1 = -y\,\frac{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}, \qquad y_1 = x\,\frac{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}{x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \ldots \quad (7)$$

die man durch ähnliche Rechnungen wie die Gleichungen (5) findet. Aus (7) ergibt sich durch eine der obigen ähnliche Betrachtung, daß **der Ort der Endpunkte der Polarsubtangenten einer Kurve n^{ter} Ordnung von der Ordnung $n(n+1)$ ist**; jeder p-fache Punkt vermindert diese um $p(p-1)$ Einheiten [für eine rationale Kurve ist sie daher $2(2n-1)$], wenn aber dieser Punkt mit dem Pole zusammenfällt, so beträgt die Verminderung p^2 Einheiten.

277. Aus der durch Gleichung (1) dargestellten Kurve lassen sich noch andere unzählig viele durch ein dem vorigen entgegengesetztes Verfahren ableiten, indem man aus (1) die Gleichung

$$y = \int_0^x f(x)\cdot dx + c \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

ableitet. Hierbei bedeutet c eine beliebige Konstante, durch deren Variation man Kurven erhält, von denen die eine aus der anderen durch eine bloße Verschiebung in der Richtung der y-Achse hervorgeht; es genügt daher von diesen eine einzige zu betrachten, z. B. die durch den Anfangspunkt gehende, die dem Falle $c = 0$ entspricht. Die neuen Kurven Γ_i heißen Integralkurven und bieten mancherlei Interesse, insbesondere durch ihre praktischen Anwendungen[2]). Ihre hauptsächlichsten Eigenschaften drücken geometrisch aus, welche Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Integralen besteht: so

1) Schlömilch, a. a. O. S. 121.

2) Abdank-Abakanowicz, *Die Integraphen. Die Integralkurven und ihre Anwendungen*, deutsch bearbeitet von E. Bitterli (Leipzig, 1899). Bezüglich des Begriffes und der Eigenschaften der inversen Integralkurven und der Integralkurven in bezug auf eine gegebene Kurve verweisen wir den Leser auf die o. a. Arbeit von Sobotka.

erkennt man z. B., daß den Schnitten von Γ mit der x-Achse die Kulminationspunkte von Γ_i entsprechen, dagegen den Kulminationspunkten von Γ die Wendepunkte von Γ_i, usw. [Ist z. B. die gegebene Kurve der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$, so ist die Integralkurve

$$y = \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}. \quad . \quad . \quad (9)$$

Sie schneidet die y-Achse in den Punkten $\pm 0, \frac{r^2\pi}{2}, r^2\pi, \ldots\ldots$, hat auf den beiden Geraden $x = \pm r$ Spitzen im Abstande $r^2\pi$ und auf der y-Achse lauter Wendepunkte (s. Tafel VI, Fig. 64). Sie besteht aus lauter kongruenten Kurvenzweigen, gehört also zu den Laufmusterkurven (Nr. **237**).] Wir wollen die Reihe solcher Sätze nicht weiter verfolgen, sondern lieber den Satz von d'Ocagne beweisen, der uns das Krümmungszentrum für einen beliebigen Punkt der Integralkurve zu konstruieren lehrt[1]). Dieser Satz lautet: **Ist R der Krümmungsradius der Integralkurve Γ_i, σ die Subtangente der gegebenen Kurve Γ, und θ der Winkel, den die Tangente von Γ_i mit der x-Achse bildet, so ist**

$$\sigma = R \cos^2\theta \cdot \sin\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Es seien (Taf. VI, Fig. 65) M und M_i zwei entsprechende Punkte von Γ und Γ_i, P der Schnittpunkt von Ox mit der Ordinate MM_i, MT die Tangente von Γ, dann ist

$$PT = \sigma = y \frac{dx}{dy}.$$

Setzen wir aber $M_iP = Y$, so ist

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg} \theta,$$

also $\operatorname{tg}\theta = y$, und daher

$$\sigma = \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Wenn nun ds_i das Differential des Bogens der Integralkurve ist, so hat man bekanntlich

$$R = \frac{ds_i}{d\theta};$$

es ist aber

$$ds_i = \frac{dx}{\cos\theta}, \qquad \operatorname{tg}\theta = y, \qquad \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = dy;$$

folglich

$$R = \frac{dx}{\cos\theta} : dy \cdot \cos^2\theta = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{1}{\cos^3\theta}.$$

Eliminieren wir hieraus $\frac{dx}{dy}$ vermittelst der vorigen Gleichungen, so

---

1) Vgl. Abdank-Abakanowicz a. a. O. S. 160—161 und J. Massau, *Cours de mécanique de l'Université de Gand* (lith. 1891) S. 400

finden wir in der Tat die Relation (10). — Hieraus läßt sich eine Konstruktion des Krümmungszentrums C ableiten: Die Normale M_i an Γ_i schneide die Ordinate von T in T', die in T' auf der Normalen errichtete Senkrechte schneide die Ordinate von M_i in Q; die durch Q zur x-Achse gezogene Parallele schneidet die Normale in dem gesuchten Punkte C. Den Beweis mit Hilfe der Gleichung (10) zu führen, überlassen wir dem Leser.

Die Konstruktion von d'Ocagne könnte man auch aus einer Eigenschaft der Integralkurven herleiten, die J. Sobotka geometrisch bewiesen hat[1]), zu der man jedoch auch schnell durch folgende Rechnung gelangen kann.

Wir wollen annehmen, daß die Kurve Γ, deren Gleichung $y = f(x)$ sei, durch den Punkt $P(a, b)$ gehen möge; die Tangente t in diesem Punkte hat dann die Gleichung

$$\eta = f(a) + (x - a) f'(a),$$

wo x und η die laufenden Koordinaten auf der Tangente selbst sind. Nehmen wir nun an, daß Γ_i, die Integralkurve von Γ, durch $P_i(A, B)$ gehe, so wird deren Gleichung lauten

$$Y - B = \int_A^x f(x) \cdot dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Konstruieren wir jetzt die Integralkurve T der Tangente t unter der Voraussetzung, daß sie durch den Punkt P_i gehe, so wird deren Gleichung

$$\mathsf{H} - B = \int_A^x [f(x) + (x - a) f'(a)]\, dx$$

oder

$$\mathsf{H} - B = (x - A) f(a) + \frac{(x - A)^2}{2} f'(a). \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

T ist also eine Parabel. Aus den Gleichungen (α) und (β) ergibt sich nun sofort, daß für den Punkt P_i ist $Y = \mathsf{H}$, $Y' = \mathsf{H}'$, $Y'' = \mathsf{H}''$, und dies beweist, daß die Kurven Γ_i und T sich nicht nur in dem gemeinsamen Punkte A berühren, sondern daselbst eine Berührung zweiter Ordnung haben. Somit ergibt sich: **Der Tangente t der Kurve Γ in irgendeinem Punkte P derselben entspricht als Integralkurve eine Parabel T, welche die Integralkurve Γ_i von Γ in dem dem Punkte P entsprechenden Punkte P_i oskuliert.**

278. Eine gewisse Analogie mit den Differentialkurven bieten solche Linien, die man aus der Kurve $y = f(x)$ erhält, wenn man y gleich einer speziellen Funktion von $f'(x)$ setzt.[2]) Auf die haupt-

1) S. § I. des in Note 1, S. 330 zitierten *Beitrages*.

2) Elementarer, jedoch weniger wichtig und fruchtbar ist das Verfahren, aus einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ eine neue $y_1 = F(f(x))$ abzuleiten, wo F eine neue gegebene Funktion ist. Z. B. kann man als neue Kurve ableiten

sächlichsten derselben soll hingewiesen werden, sowie auf einige neuen Kurven, die man durch solches Verfahren erhält.

I. Wir betrachten wieder eine Kurve Γ mit der Gleichung $y = f(x)$, sowie in ihrer Ebene einen beliebigen festen Punkt K (Taf. VI, Fig. 66), den wir als auf der x-Achse gelegen mit der Abszisse $-k$ annehmen wollen, und eine beliebige Gerade g, die wir der Einfachheit halber als mit der y-Achse zusammenfallend annehmen. In einem beliebigen Punkte P von Γ ziehen wir die Tangente und durch K zu ihr die Parallele, bis sie die Gerade g in Q schneidet; die in Q zu g errichtete Senkrechte schneide die Ordinate von P in P'. Variiert man nun P auf Γ, so beschreibt der Punkt P' eine neue Kurve Γ', die von A. Hochheim die Differentialkurve von Γ genannt wird.[1]) Um deren Gleichung zu finden, beachte man, daß die Gleichung der Tangente im Punkte $P(x, y)$ lautet

$$Y = f'(x)(X - x),$$

die zu ihr durch K gezogene Parallele aber hat die Gleichung

$$Y = f'(x)(X + k);$$

wenn man nun $X = 0$ macht, so erhält man $k \cdot f'(x)$ als Wert für die gemeinsame Ordinate der Punkte Q und P'. Daraus folgt, daß

$$y_1 = k \cdot f'(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

die Gleichung von Γ' ist; diese Kurve ist also affin zu der Differentialkurve von Γ in Kästnerschem Sinne (Nr. **276**). Wiederholen wir für Γ' dieselbe Operation wie bei Γ und fahren so fort, so erhalten wir nach r Operationen die Kurve

$$y_r = k^r f^{(r)}(x), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

die nach Hochheim die r^{te} Differentialkurve von Γ heißt.

Falls Γ durch eine Gleichung, die nicht nach y auflösbar, gegeben ist, etwa durch

$$F(x, y) = 0,$$

$y_1 = \frac{1}{f(x)}$; eine einfache Rechnung zeigt, daß die beiden Kurven in zwei derselben Ordinate entsprechenden Punkten gleiche Subtangenten, aber von entgegengesetzten Vorzeichen haben (W. Rulf, *Über eine allgemeine Eigenschaft der Kurve der reziproken Ordinaten*, Arch. Math. Phys. 2. Ser. XIII, 1894; vgl. auch den § VI des o. a. *Beitrags* von J. Sobotka). — Ähnlich kann man die Kurve $y_1 = f(x)^2$ bilden; die Subtangente in einem beliebigen Punkte der neuen Kurve ist gleich der Hälfte der Subtangente im entsprechenden Punkte der gegebenen (W. Rulf, *Bemerkung zu den aus einer Kurve abgeleiteten Kurven*, das.). Im allgemeinen Falle hat man, wenn S und S_1 die Subtangenten in entsprechenden Punkten der beiden Kurven $y = f(x)$, $y_1 = F(f(x))$ sind,

$$S_1 : S = F(f) : f \cdot F'(f).$$

1) *Über die Differentialkurve der Kegelschnitte* (Halle a. S., 1874).

so würde man die Differentialkurve erhalten, indem man y aus dieser Gleichung und der folgenden

$$\frac{\partial F}{\partial y} y_1 + k \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

eliminiert; ist also F eine algebraische Funktion n^{ten} Grades in x, y, so ist die abgeleitete Kurve im allgemeinen von der Ordnung $2n(n-1)$; sie ist ferner von immer demselben Geschlechte wie Γ.

Welches auch die Natur der Funktion f sein möge, immer hat man

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} y_1 \cdot dx = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} k \cdot f'(x) \cdot dx = k[f(\beta) - f(\alpha)], \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und daher ist die abgeleitete Kurve immer quadrierbar.

Als erstes Beispiel nehmen wir zunächst die Parabel $y^2 = 2px$; dann ist die Gleichung von Γ'

$$y_1 = k\sqrt{\frac{p}{2x}} \quad \text{oder} \quad 2xy_1{}^2 = k^2 p.$$

Demnach ist Γ' eine Kurve dritter Ordnung symmetrisch zur x-Achse und ganz auf der positiven Seite derselben gelegen; der unendlich ferne Punkt von Ox ist eine Spitze der Kurve, der unendlich ferne von Oy ein Wendepunkt. Die Tangentialgleichung dieser Kurve lautet

$$uv^2 + \frac{8}{27k^2p} = 0$$

und bezeugt, daß sie von der dritten Klasse ist in Übereinstimmung mit den Plückerschen Formeln.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Γ' hat dann die Gleichung

$$y_1 = \frac{kb}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{oder} \quad a^2x^2y_1{}^2 - k^2b^2x^2 - a^4y_1{}^2 = 0,$$

und ist demnach (vgl. Nr. **97**; Bd. I, S. 226) eine Kohlenspitzkurve.

Wechseln wir das Vorzeichen von b^2, so erkennt man, daß die von der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ abgeleitete Kurve die Gleichung hat

$$a^2x^2y_1{}^2 + k^2b^2x^2 - a^4y_1{}^2 = 0;$$

diese ist also eine Kreuzkurve (s. Nr. **97**, Bd. I, S. 226).

279. II. Die Daten seien dieselben wie im Falle I; auf die Kurve Γ werde dieselbe Konstruktion angewendet mit dem Unterschiede, daß an Stelle der Tangente die Normale in P tritt, und daß $k, 0$ die Koordinaten des festen Punktes seien. Durch eine Rechnung, die ähnlich wie im vorigen auszuführen ist, läßt sich zeigen, daß, wenn der Punkt P die Kurve Γ $y = f(x)$ durchläuft, der Punkt P' eine Kurve Γ' beschreibt, deren Gleichung ist

$$y_1 = \frac{k}{f'(x)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

sie heißt die erste abgeleitete Kurve in bezug auf Γ[1]); ihre unendlich fernen Punkte entsprechen den Kulminationspunkten von Γ. Verfährt man mit Γ' ebenso wie mit Γ, so erhält man die zweite abgeleitete Kurve; ihre Gleichung lautet

$$y_2 = \frac{k}{\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{f'(x)}\right)} = -\frac{f'^2(x)}{f''(x)}, \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

daher ist Γ'' unabhängig von k; ihre unendlich fernen Punkte entsprechen den Wendepunkten von Γ. In ähnlicher Weise kann man die dritte abgeleitete Kurve betrachten, usw. — Wenn Γ durch eine Gleichung von der Form

$$F(x, y) = 0$$

dargestellt wäre, so würde man die von Γ' erhalten, indem man y aus dieser und der folgenden

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

eliminiert; wenn daher Γ von der Ordnung n ist, so muß Γ' im allgemeinen von der Ordnung $2n(n-1)$ sein; beide Kurven sind ferner vom selben Geschlecht.

Aus der Gleichung (14) geht hervor, daß, damit Γ' mit Γ zusammenfalle, es notwendig und hinreichend ist, daß

$$y = k\frac{dx}{dy}, \quad \text{oder} \quad y^2 = 2kx + l; \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

mit Variation der beliebigen Konstanten l stellt (16) ∞^1 von sich selbst abgeleitete Parabeln dar.

Ähnlich ergibt sich aus (15), daß Γ'' mit Γ übereinstimmt, wenn y der Differentialgleichung

$$-\frac{y'^2}{y''} = y, \quad \text{oder} \quad \frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} = 0$$

Genüge leistet. Wird die erste Integration ausgeführt, so ergibt sich

$$y \cdot y' = a \qquad \text{(wo } a \text{ eine Konstante bedeutet)}$$

und wird nochmals integriert, so erhält man

$$y^2 = 2ax + b, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

welche Gleichung ∞^2 Parabeln darstellt, deren jede mit ihrer eigenen zweiten abgeleiteten Kurve übereinstimmt. Offenbar sind in dieser neuen Serie die ∞^1 durch (16) dargestellten Parabeln mit einbegriffen.

Wenden wir das hier beschriebene Ableitungsverfahren auf einen zentrischen Kegelschnitt an, so gelangen wir zu zwei bemerkenswerten

1) C. Völker, *Über die Relation zwischen einer gegebenen Kurve* $y = f(x)$ *und einer daraus abgeleiteten Kurve* $y = k\frac{dx}{dy} = \frac{k}{f'(x)}$ *mit spezieller Anwendung auf die Ellipse* (Diss. Marburg, 1880). Vgl. auch Azzarelli, *Alcuni luoghi geometrici* (Atti Accad. Nuovi Lincei XLVI, 1893).

Kurven vierter bzw. sechster Ordnung. Ist nämlich die Gleichung von Γ

$$\frac{y^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

so hat Γ' die Gleichung

$$y = \mp \frac{ak\sqrt{a^2 - x^2}}{bx} \quad \text{oder} \quad b^2x^2y^2 + k^2a^2x^2 - k^2a^4 = 0; \quad . \quad (18)$$

sie ist demnach eine rationale Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch in bezug auf die Koordinatachsen ist, durch die Endpunkte der Fokalachse der Ellipse geht, im unendlich Fernen von Ox einen isolierten Punkt und im unendlich Fernen von Oy einen Berührungsknoten mit dieser Achse als zugehöriger Tangente hat. Die Kurve besitzt keine anderen vielfachen Punkte, aber die vier Punkte mit den Koordinaten

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y = \pm \frac{ka\sqrt{2}}{b}$$

sind Wendepunkte (vgl. Taf. VI, Fig. 67).

Die zweite abgeleitete Kurve hingegen hat die Gleichung

$$y = \pm \frac{bx^2\sqrt{a^2 - x^2}}{a^3} \quad \text{oder} \quad a^6y^2 + b^2x^6 - a^2b^2x^4 = 0; \quad . \quad (19)$$

sie ist eine rationale Kurve sechster Ordnung (Taf. VI, Fig. 68), die durch die Endpunkte der Fokalachse der Ellipse geht, und im Mittelpunkte einen Berührungsknoten mit dieser Achse als zugehöriger Tangente hat. Die Punkte mit den Koordinaten

$$x = \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad y = \pm \frac{2b}{3\sqrt{2}}$$

sind Kulminationspunkte; sie liegt ganz innerhalb der Ellipse, hat keine reellen unendlich fernen Punkte außer den auf der y-Achse, usw.[1])

280. III. Nehmen wir wieder die Kurve Γ als durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmt an; wir betrachten die Ordinate eines beliebigen Punktes P derselben und ziehen durch den Koordinaten-

1) Vgl. die Progammabhandlung (Berlin, 1884) von C. Völker, *I. Die derivierten Kurven der Hyperbel. II. Die Lemniskate zweiter Art.* Mit letzterem Namen bezeichnet Völker folgende Kurve: Eliminiert man aus obiger Gleichung (18) und ihrer Abgeleiteten die Konstante k, so erhält man

$$a^2y \cdot dx + x(a^2 - x^2) \cdot dy = 0.$$

Folglich lautet die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien des Systems der ∞^1 Kurven (18)

$$a^2y \cdot dy - x(a^2 - x^2) \cdot dx = 0.$$

Integriert man unter der Voraussetzung, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so bekommt man

$$y = \frac{x}{a\sqrt{2}}\sqrt{2a^2 - x^2}.$$

Die Diskussion dieser Gleichung offenbart uns leicht die Gestalt dieser Kurve und zeigt, daß der Name, den sie erhielt, berechtigt ist: es ist eben die Völkersche Lemniskate zweiter Art.

anfang eine Parallele zu der Tangente und zu der Normale in P an Γ, diese mögen die Ordinate in P_1 bzw. P_2 schneiden. Variieren wir nun P, so beschreiben die Punkte P_1 und P_2 zwei neue Kurven, von denen die erste die Tangentenkurve, die zweite die Normalenkurve von Γ heißt.[1]) Eine kurze Rechnung lehrt uns, daß jene beiden Kurven bzw. die Gleichungen haben

$$y_1 = x \cdot f'(x), \qquad y_2 = \frac{x}{f'(x)}. \quad \dots \dots \quad (20)$$

Wenden wir diese Verwandlung anstatt auf die Kurve Γ, auf die Kurve $\overline{\Gamma}$ an, die durch

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)} \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

dargestellt ist, so erkennt man leicht, daß die Tangentenkurve von Γ mit der Normalenkurve von $\overline{\Gamma}$ zusammenfällt und umgekehrt; man nennt daher solche Kurven konjugiert. — Wir bemerken außerdem, wenn man teilweise integriert, so erhält man

$$\int y_1 \cdot dx = \int x \cdot f'(x) \cdot dx = x \cdot f(x) - \int f(x) \cdot dx = x \cdot f(x) - \int y \cdot dx,$$

daher ist
$$\int_a^b y_1 \cdot dx + \int_a^b y \cdot dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a); \quad \dots \quad (22)$$

wenn man also Γ quadrieren kann, so kann man auch Γ_1 quadrieren und umgekehrt.

Dieses Ableitungsverfahren soll jetzt auf die Parabel

$$y^2 = 2p(x - \alpha) \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

angewendet werden, wobei $p > 0$ angenommen wird. Wir bemerken zunächst, daß sie als konjugierte Kurve die semikubische Parabel besitzt

$$9py^2 = 8(x - \alpha)^3.$$

Ihre Tangentenkurve dagegen ist

$$y_1 = \frac{px}{\sqrt{2p(x-\alpha)}} \quad \text{oder} \quad y_1^2(x - \alpha) = \frac{p}{2}x^2. \quad \dots \quad (24)$$

Die hierdurch dargestellte Kurve dritter Ordnung ist symmetrisch in bezug auf Ox, der Anfang ist ein Doppelpunkt, genauer ein Knoten oder isolierter Punkt, je nachdem $\alpha \lessgtr 0$ (Taf. VI, Fig. 69 u. 70); die reellen Punkte der Kurve erhält man für $x > \alpha$. Wenn $\alpha > 0$, so sind die Punkte mit $x = 2\alpha$ Kulminationspunkte (bzw. mit zu Ox paralleler Tangente), die mit $x = 4\alpha$ sind Wendepunkte. In allen Fällen ist die Gerade $x = \alpha$ Wendeasymptote der Kurve. In dem bislang ausgeschlossenen Falle $\alpha = 0$ zerfällt die Gleichung (24) in

---

1) L. Henkel, *Über die aus einer Kurve $y = f(x)$ abgeleitete Kurve $y_1 = x\dfrac{dy}{dx} = xf'(x)$ (Tangentenkurve) und $y_2 = -x\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x}{f'(x)}$ (Normalkurve) mit spezieller Anwendung auf die Parabel* (Dissert. Marburg, 1882).

$x = 0$, $y_1 = \frac{1}{2} y$, d. h. in die y-Achse und die Parabel, deren Ordinaten die Hälfte der gegebenen sind. Durch Anwendung der Gleichung (24) erhalten wir ferner

$$\int_a^b y_1 \cdot dx = b\sqrt{2p(b-\alpha)} - a\sqrt{2p(a-\alpha)} - \int_a^b \sqrt{2p(x-\alpha)} \cdot dx$$
$$= \sqrt{2p(b-\alpha)}\,\frac{b+2\alpha}{3} - \sqrt{2p(a-\alpha)}\,\frac{a+2\alpha}{3};$$

wenn $\alpha < 0$, hat man im besonderen

$$\int_\alpha^0 y_1 \cdot dx = \sqrt{-2p\alpha}\,\frac{2\alpha}{3},$$

als bemerkenswerten Ausdruck für die Fläche zwischen der Kurve und der Asymptote.

Bestimmen wir hingegen die Normalenkurve derselben Parabel (23), so erhalten wir

$$y_2 = x\sqrt{\frac{2(x-\alpha)}{p}}, \quad \text{oder} \quad \frac{p}{2} y^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0;$$

diese ist ebenfalls eine zur x-Achse symmetrische Kurve dritter Ordnung, deren reelle Punkte man für $x > \alpha$ erhält (Taf. VI, Fig. 71 u. 72); sie hat im Anfang einen Knoten-, Rückkehr- oder isolierten Punkt, je nachdem $\alpha \lesseqgtr 0$; im zweiten Falle ist die Kurve nichts anderes als die semikubische Parabel. Wenn $\alpha < 0$, so sind die beiden Punkte mit der Abszisse $\frac{2\alpha}{3}$ Kulminationspunkte, wenn $\alpha < 0$, die mit $x = \frac{4\alpha}{3}$ Wendepunkte; in allen Fällen ist der unendlich ferne von Oy ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente.

Die Transformation, durch welche man von einer Kurve zu ihrer Tangentenkurve gelangt, wurde später auch von H. Brocard wieder aufgefunden[1]) und von ihm pseudo-Newtonsche Transformation genannt. Indem er sie auf spezielle transzendente Kurven anwandte, leitete er aus ihnen algebraische Kurven ab, und gelangte so zu einer neuen Verbindungsbrücke zwischen diesen beiden großen Kategorien, in welche sich alle ebenen Kurven verteilen. Wendet man sie aber auf algebraische Kurven an, so erhält man immer wieder Kurven derselben Art; die Beziehungen zwischen diesen und den ursprünglichen Kurven findet man in einer speziellen Arbeit von V. Retali niedergelegt.[2])

---

1) *Sur une transformation géométrique (Transformation pseudonewtonienne)* (Mém. Acad. Belgique LIX, 1899).

2) *Sur une transformation géométrique* (Mém. Soc. Liège, 3e. Sér. II, 1900).

281. IV. H. Brocard hat jedoch noch eine zweite Methode erdacht, von einer Kurve andere abzuleiten; diese, die er die Robervalsche Transformation nannte, besteht in folgendem: Es sei wieder eine Kurve Γ gegeben, dargestellt durch Gleichung (1), sowie eine beliebige Gerade r, die man als durch den Anfang gehend annehmen kann,

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b}.$$

Man betrachte die Tangente in einem beliebigen Punkte P von Γ und bestimme ihren Schnittpunkt M mit r; die durch P zu Oy gezogene Parallele schneide die durch M zu Ox gezogene in P': der Ort der Punkte P' ist die Robervalsche Kurve von Γ. — Da nun

$$\frac{Y - f(x)}{X - x} = f'(x)$$

die Gleichung der genannten Tangente, so ist die Ordinate des Punktes M, in welchem sie die r schneidet,

$$Y = b\,\frac{x f'(x) - f(x)}{a f'(x) - b}; \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

sie ist zugleich die Ordinate von P'; die Abszisse dieses Punktes ist dieselbe wie von P, und daher ist (25) die Gleichung der Robervalschen Kurve. Die Robervalsche sowie die pseudo-Newtonsche Transformation sind Spezialfälle einer dritten von V. Retali[1]) untersuchten geometrischen Transformation.

V. Auf der Tangente in einem beliebigen Punkte P der durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellten Kurve Γ bestimme man einen Punkt P' derart, daß das von den Ordinaten der beiden Punkte P, P' abgeschnittene Stück der x-Achse eine bestimmte Länge k habe und außerdem PP' die positive Richtung der Tangente bezeichne. Der Ort des Punktes P' ist eine neue Kurve Γ', welche die Tangentialkurve von Γ genannt wird.[2]) Es ist klar, daß die Gleichung von Γ' erhalten wird, wenn man x, y aus

$$x - x' = k, \qquad y - y' = (x - x')\,\frac{dy}{dx}, \qquad y = f(x)$$

eliminiert; sie lautet daher

$$y' = f(x' + k) - k f'(x' + k)^{3)} \quad \ldots \quad (26)$$

1) *Sopra una corrispondenza* $[m, n]$ (Rendic. Ist. Lomb. 2. Ser. XXXII, 1899).

2) Hochheim, *Tangentialkurven der Kegelschnitte* (Zeitschr. Math. Phys. XV, 1870). S. auch das schon in Note 1 S. 335 zitierte Werkchen, S. 100 ff.

3) Eine ähnliche Konstruktion, für die Normalen ausgeführt, liefert eine Kurve, deren Gleichung

$$y = f(x' + k) + \frac{k}{f'(x' + k)}$$

lautet, und deren Studium wir dem Leser überlassen.

Als Kurve Γ nehmen wir einmal die Parabel

$$y^2 = p(x - k),$$

dann wir die Γ' sein

$$y' = \frac{\sqrt{p}\,(2x' - k)}{2\sqrt{x'}}, \quad \text{oder} \quad 4x'y' = p\,(2x' - k)^2.$$

Die Tangentialkurve einer Parabel ist demnach eine Kurve dritter Ordnung, die symmetrisch zu deren Achse liegt, den Punkt $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ als Doppelpunkt, den unendlich fernen von Oy als Wendepunkt hat mit dieser Achse als zugehöriger Tangente; im unendlich fernen Punkte von Ox wird die Kurve von der unendlich fernen Geraden berührt (s. Taf. VI, Fig. 73).

Wird dieselbe Ableitung auf die Ellipse

$$\frac{(x - k - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{2a(x - k) - (x - k)^2}$$

angewendet, so erhält man die Gleichung

$$y' = \frac{2ax' - x'^2 - k(a - x')}{\sqrt{2ax' - x'^2}} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

für die Tangentialkurve der betrachteten Ellipse. Sie ist also eine in bezug auf die große Achse symmetrische Kurve vierter Ordnung, die ganz innerhalb des von $x' = 0$ und $x' = 2a$ begrenzten Streifens liegt. Auf der Abzsissenachse hat sie einen Doppelpunkt und einen isolierten, dessen Abszissen bzw. $\frac{1}{2}\left(2a + k \pm \sqrt{4a^2 + k^2}\right)$ sind; ein dritter Doppelpunkt ist der unendlich ferne von Oy, mit den Geraden $x' = 0$, $x' = 2a$ als entsprechenden Tangenten (Taf. VI, Fig. 74).

Ähnlich läßt sich zeigen, daß die Tangentialkurve der Hyperbel $\frac{(x - k - a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dargestellt wird durch

$$y' = \frac{b}{a}\,\frac{2ax' - x'^2 - k(a - x')}{\sqrt{x'^2 - 2ax'}}.$$

Sie ist eine mit denselben projektiven Eigenschaften wie (27) ausgestattete Kurve vierter Ordnung, hat aber eine ganz andere Gestalt, die uns Fig. 75 auf Taf. VI wiedergibt.

282. VI. Es sei noch eine von M. d'Ocagne[1]) vorgeschlagene Ableitung besprochen. „Gegeben seien zwei feste Punkte O und P sowie eine Kurve Γ; M sei ein beliebiger Punkt derselben, M_1 dagegen derjenige Punkt, in welchem der Radiusvektor OM von der

---

1) *Sur certaines courbes qu'on peut ajoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales* (Amer. Journ. Math. XI, 1899). In dem *Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne à M. Craig* (das. XIV, 1892) ist ein zweifelhafter Punkt jener Abhandlung richtiggestellt worden.

durch P zu der Normalen in M parallel gezogenen Geraden geschnitten wird. Variiert man M auf Γ, so beschreibt M_1 eine Kurve Γ_1, welche die von d'Ocagne betrachtete ist." Fällt M in den Fußpunkt einer von P gezogenen Normalen, so fällt M_1 mit M zusammen; folglich enthält die Kurve Γ_1 die Fußpunkte der von P auf Γ gefällten Normalen. Wenn hingegen M in den Fußpunkt einer von O auf Γ gefällten Normalen fällt, so befindet sich M_1 im Unendlichen; also geht Γ_1 durch die unendlich fernen Punkte der von O zu Γ gezogenen Normalen. Nehmen wir an, daß die Kurve Γ_1 vollständig gezeichnet vorliegt, so ist klar, daß man in jedem beliebigen Punkte von Γ die Normale zeichnen kann und d'Ocagne hat gezeigt, daß man damit auch das Krümmungszentrum finden kann. Ohne uns hiermit aufzuhalten, gehen wir zu der Bemerkung über, daß das angegebene Verfahren zwei Methoden liefert, die eine invers zur anderen, um aus einer Kurve eine andere abzuleiten. Um dies klar zu legen, wollen wir die Koordinaten von M mit x, y, die von M_1 mit x_1, y_1 bezeichnen, O als Anfangspunkt und OP als x-Achse nehmen. Setzen wir $OP = a$, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a - x_1}{y_1}. \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Ist also die Gleichung von Γ als $f(x, y) = 0$ gegeben, so kann die von Γ_1 durch einfache Differentiationen und Eliminationen erhalten werden. Ist hingegen die Gleichung von Γ_1 als $F(x_1, y_1) = 0$ gegeben, so erkennt man, indem aus (28) sich ergibt

$$x_1 = \frac{ax \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}, \quad y_1 = \frac{ay \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy},$$

daß Γ die Integralkurve folgender homogenen Differentialgleichung ist

$$f\left(\frac{ax \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}, \frac{ay \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}\right) = 0,$$

somit kann die Aufsuchung von Γ immer auf Quadraturen zurückgeführt werden.

Als Beispiel nehmen wir für Γ_1 die Gerade $y_1 = mx_1 + n_1$; Γ wird dann eine Integralkurve von folgender Gleichung sein

$$ay \cdot dx = max \cdot dx + n(x \cdot dx + y \cdot dy).$$

Setzen wir nun $y = tx$, so wird diese Gleichung zu

$$\frac{dx}{x} + \frac{t \cdot dt}{t^2 - \frac{a}{n}t + \frac{ma}{n} + 1} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

wo die Variabeln schon getrennt sind. Wird die Integration ausgeführt, so erhält man je nach der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung

$$t^2 - \frac{a}{n}t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = 0$$

verschiedene Resultate.

1. Fall. Es sei $t^2 - \frac{a}{n}t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = (t-p)(t-q)$, und $p > q$. Dann ist

$$\frac{t}{t^2 - \frac{a}{n}t + \frac{ma}{n}t + 1} = \frac{p}{(p-q)(t-p)} - \frac{q}{(p-q)(t-q)},$$

daher bekommt man durch Integration von (29)

$$\log x + \frac{p}{p-q}\log(t-p) - \frac{q}{p-q}\log(t-q) = \frac{1}{p-q}\log c,$$

oder

$$x^{p-q}\frac{(t-p)^p}{(t-q)^q} = c,$$

und, wenn für t wieder sein Wert gesetzt wird,

$$(y - px)^p = c\,(y - qx)^q. \qquad (30)$$

In diesem Falle ist Γ also eine Parabel oder Hyperbel, die algebraisch oder interszendent ist, je nachdem p und q beide rational sind oder nicht.

2. Fall. $t^2 - \frac{a}{n}t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = (t-p)^2$. In diesem Falle hat man

$$\frac{t}{t^2 - \frac{a}{n}t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right)} = \frac{p}{(t-p)^2} + \frac{1}{(t-p)};$$

daraus ergibt sich bei der Integration von (29)

$$\log x - \frac{p}{t-p} + \log(t-p) = \log c,$$

oder

$$x(t-p) - ce^{\frac{p}{t-p}}$$

bzw.

$$y - px = ce^{\frac{px}{y-px}}. \qquad (31)$$

Γ ist demnach immer eine transzendente Kurve.

3. Fall. $t^2 - \frac{a}{n}t + \left(\frac{ma}{n} + 1\right) = (t+\alpha)^2 + \beta^2$. Setzt man $t + a = \tau$, so ist

$$\frac{t \cdot dt}{(t+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{(\tau - \alpha)\cdot d\tau}{\tau^2 + \beta^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d(\tau^2+\beta^2)}{\tau^2+\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{d\frac{\tau}{\beta}}{1 + \left(\frac{\tau}{\beta}\right)^2};$$

folglich liefert Gleichung (29)

$$\log x + \log\sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\tau}{\beta} = \log c,$$

oder

$$x\sqrt{(t+\alpha)^2 + \beta^2} = ee^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\tau}{\beta}},$$

und endlich

$$\sqrt{(y+\alpha x)^2 + \beta^2 x^2} = ce^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{y+\alpha x}{\beta x}}, \qquad (32)$$

die immer eine transzendente Kurve darstellt. Dieses Beispiel läßt hinreichend erkennen, daß der Übergang von Γ_1 zu Γ in der Regel zu ziemlich komplizierten Kurven führen dürfte.

Die für Γ_1 angegebene Konstruktion führt von selbst zu einer anderen Kurve Γ_2, die in folgender Weise konstruiert wird. Die Daten seien dieselben, man läßt aber dem Punkte M denjenigen Punkt M_2 entsprechen, in welchem der Radiusvektor OM die durch P zur Tangente in M gezogene Parallele schneidet; Γ_2 ist dann der Ort des Punktes M_2, wenn M die Kurve Γ durchläuft. Γ_2 muß ersichtlich durch die Berührungspunkte der von P an Γ gezogenen Tangente gehen. Die neue Kurve kann, wenn sie gezeichnet vorliegt, nicht bloß zur Konstruktion der Tangenten an Γ dienen, sondern ebenfalls zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte. Werden dieselben Bezeichnungen und Achsen beibehalten, so finden zwischen den Koordinaten der Punkte M und M_2 die Beziehungen statt

$$\frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}, \qquad y_2 = (x_2 - a)\frac{dy}{dx}$$

oder

$$x_2 = \frac{ax \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}, \qquad y_2 = \frac{ay \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx};$$

wenn also $f(x_2, y_2) = 0$ die Gleichung von Γ_2 ist, so wird Γ eine Integralkurve der folgenden homogenen Differentialgleichung sein:

$$f\left(\frac{ax \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dy}, \quad \frac{ay \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Nehmen wir als Γ_2 wieder die Gerade $y_2 = mx_2 + n$; dann hat Γ der Gleichung zu genügen

$$ay \cdot dy = max \cdot dy + n(x \cdot dy - y \cdot dx).$$

Setzen wir wieder
$$y = tx,$$

so erhalten wir
$$\frac{dx}{x} + \frac{ma + n - at}{at(m-t)} dt = 0,$$

oder
$$\frac{dx}{x} + \frac{ma+n}{ma}\left[\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-m}\right] + \frac{dt}{t-m} = 0;$$

wir integrieren und erhalten

$$\log x + \frac{ma+n}{ma} \log \frac{t}{t-m} + \log(t-m) = \log k,$$

oder auch

$$x\left(\frac{t}{t-m}\right)^{\frac{ma+n}{ma}} (t-m) = k,$$

und schließlich
$$y^{ma+n} = c(y - mx)^n,$$

wo c und k beliebige Konstanten sind; die entstandene Kurve ist demnach wieder eine Parabel oder Hyperbel, die algebraisch oder interszendent ist, je nachdem die beiden Größen $ma + n$ und n beide rational sind oder nicht.

Die Integration der Gleichung (33) läßt sich auch in dem Falle ausführen, daß Γ_2 ein Kreis mit dem Zentrum O ist. Alsdann kann Γ betrachtet werden als der Ort eines Punktes, der mit konstanter Geschwindigkeit auf einen festen Punkt zustrebt, während er zugleich von einem anderen nach Richtung und Kraft konstanten Zuge beeinflußt wird. Sie ist demnach die Kurve, die von einem Schwimmer beschrieben wird, der auf einen Punkt des Flußufers zustrebt; man könnte sie daher die Schwimmerkurve nennen. Vor M. d'Ocagne wurde sie schon von E. Collignon[1]) betrachtet.

283. VII. Schließlich hat A. Mannheim folgendes Verfahren erdacht, um aus einer ebenen Kurve Γ eine andere Γ_1 abzuleiten: „In der Ebene von Γ seien zwei Geraden r und d gegeben; die Normale in einem beliebigen Punkte A von Γ schneidet r in einem Punkte N; durch ihn ziehen wir die Strecke NA_1 parallel zu d und gleich $\lambda \cdot \overline{NA}$, wo λ eine gegebene Zahl ist; der Ort der Punkte A_1 ist dann die Kurve Γ_1."

Im allgemeinen wird Γ_1 symmetrisch in bezug auf r sein, derart, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte immer parallel zu d sind, sie kann daher in zwei sich symmetrisch entsprechende Kurven zerfallen; z. B. wenn Γ eine Gerade ist, so besteht Γ_1 aus zwei Graden. Alle Schnittpunkte von Γ mit r liefern einen Doppelpunkt von Γ_1. Bei Variation von λ erhält man unzählig viele Kurven Γ_1, von denen immer zwei beliebige sich in einer Affinität mit r als Achse entsprechen, deswegen werden die Tangenten an alle Kurven Γ_1 in den Punkten, die einem und demselben Punkte von Γ entsprechen, durch denselben Punkt der Geraden r gehen.

Um analytisch die Beziehung zwischen Γ und Γ_1 festzulegen, nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das r zur x-Achse hat. Es sei

$$f(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

die Gleichung von Γ, und α der Winkel, den d mit r bildet. Da nun

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

die Gleichung der Normalen im Punkte $A(x, y)$ ist, so sind $x - y\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ und O die Koordinaten von N, und also ist

$$AN = y\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

---

1) Assoc franç. 1887.

Die Koordinaten von A_1 sind dann

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - y\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} + \lambda y \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \cos\alpha \\ y_1 &= \lambda y \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

wo die Wurzel mit doppeltem Vorzeichen genommen werden kann. Bemerken wir, wenn Γ eine Richtungskurve (Bd. I, S. 437) ist, so läßt sich die Funktion

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

als rationale Funktion von x, y ausdrücken; daher stellen dann die Formeln (35) zwei verschiedene Kurven dar, die eine dem $+$-Zeichen, die andere dem $-$-Zeichen entsprechend. Im allgemeinen stellen sie jedoch eine einzige dar.

Um die Ordnung von Γ_1 zu finden im Falle, daß Γ algebraisch und von der Ordnung n sei, suchen wir die auf einer Geraden

$$a x_1 + b y_1 + c = 0$$

gelegenen Punkte auf. Diese entsprechen denjenigen Werten von x, y, die außer Gleichung (34) auch der folgenden Genüge leisten:

$$a\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda y\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\cdot\cos\alpha\right) + b\lambda y\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\cdot\sin\alpha + c\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

oder

$$\left[a\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + c\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 = \lambda^2 y^2 \left(a\cos\alpha + b\sin\alpha\right)^2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]. \quad (36)$$

Nun stellt diese eine Kurve von der Ordnung $2n$ dar, demnach muß Γ im allgemeinen von der Ordnung $2n^2$ sein. Welche Modifikationen eintreten, wenn Γ mehrfache Punkte hat, möge der Leser selbst eruieren.

Sind für Γ die Koordinaten eines Punktes x, y in Funktionen des Bogens s gegeben, so vereinfacht sich Gleichung (35); alsdann hat man ja identisch, wenn wir die Ableitungen nach s durch Strichel bezeichnen,

$$x'^2 + y'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

An Stelle von (35) treten dann hingegen die folgenden Formeln

$$x_1 = x + \frac{y\cdot y'}{x'} + \frac{\lambda y\cdot\cos\alpha}{x'}, \qquad y' = \frac{\lambda y\cdot\sin\alpha}{x'} \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Um die Tangente in dem beliebigen Punkte A_1 von Γ_1 zu finden, suchen wir deren Schnitt T mit der x-Achse. Die Gleichung derselben lautet

$$\frac{X - x_1}{x_1'} = \frac{Y - y_1}{y_1'},$$

folglich haben wir für $Y = 0$

$$X = \frac{1}{y_1'} \begin{vmatrix} x_1 & x_1' \\ y_1 & y_1' \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

Setzen wir hierin aus (38) die Werte für x_1, y_1, x_1', y_1' ein, so erhalten wir nach einigen Reduktionen

$$X = \frac{1}{x'(x' \cdot y' - x'' \cdot y)} \begin{vmatrix} x \cdot x' + y \cdot y' & x' + y(x' \cdot y'' - x'' \cdot y') \\ y & x' \cdot y' - x'' \cdot y \end{vmatrix}.$$

Jedoch zufolge der Identitäten (37) haben wir

$$x' + y(x' \cdot y'' - x'' y') = \frac{x' y' - x'' \cdot y}{y'},$$

und daher

$$X = \frac{1}{y' \cdot x'} \begin{vmatrix} x \cdot x' - y \cdot y' & x'^2 + y'^2 \\ y & y' \end{vmatrix} = \frac{1}{y'} \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (40)$$

Die Vergleichung dieser Formel mit (39) zeigt nun, daß T wohl verschieden ist von dem Schnitte der Tangente in A an der Kurve Γ; es schneiden sich also die beiden Tangenten in den entsprechenden Punkten A, A_1 der beiden Kurven Γ, Γ_1 auf der Geraden r. **Man erhält also die Tangente an Γ_1 in A_1, wenn man A_1 mit dem Schnittpunkte der Tangente von Γ im zugehörigen Punkte A auf der Geraden r verbindet.**[1]

Elftes Kapitel.

Die Gegenkurven.

284. In einem (recht- oder schiefwinkligen) kartesischen Koordinatensystem sei

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden m; wir bestimmen die Schnittpunkte A und B mit den Koordinatachsen und ebenso die Mitte $M(x, y)$ der Strecke AB. Dann ist offenbar

$$x = -\frac{1}{2\xi}, \quad y = -\frac{1}{2\eta},$$

---

1) A. Sucharda, *Deux constructions de la tangente et du centre de courbure d'une certaine courbe* (Bulletin intern. de l'Acad. des Sciences de Bohème, 1899).

und umgekehrt
$$\xi = -\frac{1}{2x}, \quad \eta = -\frac{1}{2y}.$$
Es besteht demnach zwischen den Punkten M und den Geraden m der Ebene eine eindeutige quadratische Korrespondenz[1]). Beschreibt der Punkt die Gerade
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$
so umhüllen die entsprechenden Geraden m den Kegelschnitt
$$\alpha\eta + \beta\xi - 2\gamma\xi\eta = 0,$$
der eine die Achsen berührende Parabel darstellt. Dreht sich dagegen m um den Punkt
$$a\xi + b\eta + c = 0,$$
so beschreibt der Punkt M den andern Kegelschnitt
$$ay + bx - 2cxy = 0,$$
der eine Hyperbel ist, die durch den Anfang und die unendlich fernen Punkte der Koordinatachsen geht. Allgemein: **Umhüllt m eine algebraische Kurve von der Ordnung n, die O als r-fachen Punkt hat, so beschreibt M eine Kurve, die im allgemeinen von der Ordnung $2n(n-1)$ ist, und O als $2r(r-1)$-fachen Punkt hat.** Z. B. einem zentrischen Kegelschnitte entspricht im allgemeinen eine Kurve 4. Ordnung mit O als Doppelpunkt; im speziellen ist diese Kurve eine Kreuzkurve oder Kohlenspitzkurve, wenn die Kegelschnittachsen mit den rechtwinkligen Koordinatachsen zusammenfallen, G. de Longchamps hat ein Verfahren angegeben, die Tangente einer beliebigen der transformierten Kurven zu konstruieren.[2])

Einen ähnlichen Ursprung hat eine andere birationale Punkt-Transformation, die aber dritter Ordnung ist.

Es liege wieder ein recht- oder schiefwinkliges kartesisches Koordinatensystem vor; will man einen Punkt P konstruieren, dessen Koordinaten x, y gegeben sind, so verfährt man gewöhnlich in der Weise, daß man auf der Abszissenachse $OM = x$, auf der Ordinatachse $ON = y$ abträgt und durch M zu der letzteren Achse, durch N zu der ersteren die Parallele zieht; diese schneiden sich dann in dem gesuchten Punkte P. Man kann aber die Konstruktion auch anders ausführen. Nachdem man wie oben die Punkte M und N gezeichnet hat, beschreibe man um M mit $|y|$, und um N mit $|x|$ als Radius einen Kreis; die beiden schneiden sich in P. Sie schneiden sich aber noch in einem zweiten, eindeutig bestimmten Punkte P_1. Auf diese Weise wird jedem Punkte P der Ebene ein zweiter P_1 eindeutig zu-

1) Als Methode der Kurvenverwandlung wurde diese Korrespondenz von G. Cardoso Laynes untersucht, *Sopra una trasformazione delle curve piane* (Period. di matem. XIX, 1903).

2) Period. di matem. XIX, 1903. S. 241.

geordnet, welchen man den Gegenpunkt des ersteren nennen könnte, und wenn P eine Kurxe Γ durchläuft, beschreibt P_1 die Gegenkurve Γ_1 von Γ.[1])

Die Konstruktion des Punktes P_1 läßt sich praktisch in bequemerer Weise ausführen. Es sei ω der Winkel der beiden Achsen (Tafel VI, Fig. 76), α der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks NPP_1, β der an der Grundlinie von MPP_1; verbindet man nun die in der Figur gezeichneten Punkte miteinander, so lassen sich die Werte der entstehenden Winkel leicht berechnen. (Die Resultate dieser Berechnung sind in der Figur selbst angegeben.) Aus ihnen ergibt sich dann, daß die Geraden NM und OP_1 zueinander parallel sind, daß PP_1 senkrecht zu diesen beiden ist, und (was weniger von Bedeutung) daß OP_1 und PM sich in einem Punkte Q des um M mit MP als Radius beschriebenen Kreises schneiden. Hieraus ist ersichtlich, daß man auch, um den Punkt P_1 aus P zu erhalten, folgendermaßen verfahren kann: Man konstruiere das Parallelogramm $OMPN$, welches zwei Seiten auf Ox und Oy, und als Gegenecken O und P hat, ziehe die Diagonale MN und zu ihr durch O die Parallele, auf diese lote man den Punkt P; der erhaltene Punkt P_1 ist der Gegenpunkt von P. Diese Konstruktion bietet den Vorteil, daß sie uns leichter zu den Formeln gelangen läßt, welche die Koordinaten x, y von P mit denen von P_1 (x_1, y_1) verknüpfen. Da $OM = x$, $ON = y$, so ist nämlich die Gleichung der Geraden MN, wenn X, Y laufende Koordinaten sind,

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1;$$

die der zu ihr parallelen Geraden OQ ist demnach

$$yX + xY = 0.$$

Dagegen hat das von P auf MN gefällte Lot die Gleichung

$$\frac{X-x}{Y-y} = \frac{y - x\cos\omega}{x - y\cos\omega}.$$

Lösen wir nun die beiden letzten Gleichungen nach X, Y auf, so erhalten wir die Koordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1, nämlich

$$x_1 = x\,\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy\cos\omega+y^2}, \qquad y_1 = y\,\frac{y^2-x^2}{x^2-2xy\cos\omega+y^2}. \quad . \quad (1)$$

Umgekehrt dagegen findet man, daß

$$x = x_1\,\frac{x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\omega}{x_1^2-y_1^2}, \qquad y = y_1\,\frac{x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\omega}{y_1^2-x_1^2}. \quad . \quad (2)$$

Aus diesen ergibt sich dann die nützliche Relation

$$\frac{x^2+y^2\mp 2xy\cos\omega}{x^2-y^2} = \frac{x_1^2+y_1^2\pm 2x_1y_1\cos\omega}{x_1^2-y_1^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

1) K. Glänzer, *Die Gegenkurve der geraden Linie* (Progr. Forbach, 1874).

Die Gleichung (1) sowohl wie (2) lassen erkennen, daß die Beziehung zwischen den Punkten P und P_1, wie oben angedeutet, eine Cremonasche Transformation dritten Grades ist, in welcher den Geraden der einen Ebene zirkulare Kurven dritter Ordnung entsprechen, die O als Doppelpunkt mit den Halbierungslinien der Achsenwinkel als zugehörigen Tangenten haben; es sind also ∞^2 Strophoiden (vgl. Bd. I, S. 65). Man hat es also hier mit einer speziellen kubischen Transformation De Jonquières' zu tun, bei welcher zwei einfache Fundamentalpunkte in die Kreispunkte, die beiden anderen aber dem Doppelpunkte in zueinander senkrechten Richtungen unendlich nahe liegen.

Setzt man zur Abkürzung

$$x_1^2 - y_1^2 = D_1, \qquad x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 \cos\omega = T_1,$$

so sieht man, daß für die Kurve Γ, deren Gleichung

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k(x, y) = 0$$

ist, die Gegenkurve Γ_1 dargestellt wird durch

$$\sum_{k=0}^{k=n} D_1^{n-k}\, T_1^k\, u_k(x_1, -y_1) = 0.$$

Die Gegenkurve einer Kurve n^{ter} Ordnung ist also im allgemeinen von der Ordnung $3n$, hat die unendlich fernen Kreispunkte als n-fache und den Anfangspunkt als $2n$-fachen Punkt; von den Tangenten in diesem Punkte fallen n mit der einen, n mit der anderen Halbierungslinie der Achsenwinkel zusammen.

Die Gegenkurve einer Geraden ist, wie schon gesagt, eine Strophoide, die eines Kegelschnittes eine Kurve sechster Ordnung, die K. Glänzer im allgemeinen sowohl, als auch für spezielle Fälle genau untersucht hat[1]). Aus seinen Untersuchungen ergibt sich, daß jene Kurve auf den vierten Grad zurückgeht, wenn der Kegelschnitt ein durch den Anfang gehender Kreis, oder eine gleichseitige Hyperbel mit dem Zentrum im Anfange (alsdann ist die Gegenkurve eine Bernoullische Lemniskate) oder eine Parabel mit dem Scheitel im Anfangspunkte ist. Alle diese Kurven vierter und sechster Ordnung sind ziemlich bekannte Kurven.

Da die betrachtete Transformation nicht involutorisch ist, so wird man, wenn sie auf Γ_1 angewendet wird, eine Kurve Γ_2 erhalten, die von Γ verschieden ist, sie heißt die zweite Gegenkurve von Γ; aus ihr läßt sich in derselben Weise die dritte ableiten, usw. Ist

---

1) *Die Gegenkurven der Kegelschnitte* (Progr. Hamburg, 1889).

nun $P_2(x_2, y_2)$ der Gegenpunkt von $P_1(x_1, y_1)$, so erhalten wir zufolge Gleichung (2)

$$x_1 = x_2 \frac{x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos\omega}{x_2^2 - y_2^2}, \quad y_1 = y_2 \frac{x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos\omega}{y_2^2 - x_2^2}, \quad . \quad (2')$$

und die Gleichung (3) ergibt

$$\frac{x_1^2 + y_1^2 \mp 2x_1 y_1 \cos\omega}{x_1^2 - y_1^2} = \frac{x_2^2 + y_2^2 \pm 2x_2 y_2 \cos\omega}{x_2^2 - y_2^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Multiplizieren wir die Ausdrücke (2) mit den homologen (2′) und benutzen (3′), so entstehen, wenn D_2 und T_2 die analoge Bedeutung wie oben D_1 und T_1 haben, und noch $x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 \cos\omega = U_2$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$x = x_2 \frac{U_2 \cdot T_2}{D_2^2}, \quad y = y_2 \frac{U_2 \cdot T_2}{D_2^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

diese bestimmen die Koordinaten des zweiten Gegenpunktes P_2 von P. Betrachtet man in ähnlicher Weise P_3, den dritten Gegenpunkt von P, so erhält man die Gleichungen

$$x_2 = x_3 \frac{T_3}{D_3}, \quad y_2 = -y_3 \frac{T_3}{D_3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2'')$$

und

$$\frac{x_2^2 + y_2^2 \mp x_2 y_2 \cos\omega}{x_2^2 - y_2^2} = \frac{x_3^2 + y_3^2 \pm 2x_3 y_3 \cos\omega}{x_3^2 - y_3^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (3'')$$

Kombinieren wir diese mit (4), so ergibt sich

$$x = x_3 \frac{U_3 \cdot T_3^2}{D_3^3}, \quad y = -y_3 \frac{U_3 \cdot T_3^2}{D_3^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und diese Beziehungen geben analytisch die Beziehung zwischen den Koordinaten des Punktes P und denen seines dritten Gegenpunktes wieder. Wird nun dieses Verfahren wiederholt, so gelangt man zu dem Ergebnis, daß zwischen den Koordinaten x, y des Punktes P und denen seines r^{ten} Gegenpunktes $P_r\,(x_r, y_r)$ die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{wenn } r \text{ ungerade,} & x = x_r \dfrac{T_r^{\frac{r+1}{2}} \cdot U_r^{\frac{r-1}{2}}}{D_r^r}, \quad y = -y_r \dfrac{T_r^{\frac{r+1}{2}} \cdot U_r^{\frac{r-1}{2}}}{D_r^r} \\[2ex] \text{wenn } r \text{ gerade,} & x = x_r \dfrac{T_r^{\frac{r}{2}} \cdot U_r^{\frac{r}{2}}}{D_r^r}, \quad y = y_r \dfrac{T_r^{\frac{r}{2}} \cdot U_r^{\frac{r}{2}}}{D_r^r} \end{array}\right\}. \quad (6)$$

Zwischen P und P_r besteht also eine Cremonasche Transformation $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades. Den Geraden der einen Ebene entsprechen in der anderen Kurven $(2r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die man als Verallgemeinerungen der Strophoide ansehen kann (und zwar der geraden, wenn $\omega = 90^0$, der schiefen, wenn $\omega \neq 90^0$ ist).

Zwölftes Kapitel.

Die von einer Kurvengruppe abgeleiteten Kurven.

285. Die bisher in diesem Abschnitte behandelten Kurven sind alle nur von einer einzigen Kurve abgeleitet; das Beispiel der Jacobischen Kurve dreier gegebenen zeigt aber, daß man auch aus einer Kurvengruppe eine neue Kurve ableiten kann. Auf derartige andere Ableitungsgesetze soll nun in diesem Schlußkapitel hingewiesen werden, wir wollen uns in der Regel jedoch darauf beschränken, ihre Definition zu geben und die bezüglichen Arbeiten anzuführen, da es sich um Linien handelt, die nur von minderer Wichtigkeit sind.

I. Es seien m Kurven Γ_k durch ihre Polargleichungen $\varrho_k = f_k(\omega)$ gegeben (wo $k = 1, 2, \ldots, m$), und m Zahlkoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, dann stellen die beiden Gleichungen

$$\varrho = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k f_k(\omega) \quad . \ . \ (1) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\varrho} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{f_k(\omega)} \quad . \ . \ . \ (2)$$

zwei neue Kurven dar; da die beiden rechten Seiten dieser Gleichungen Funktionen sind, die man als eine Verallgemeinerung des arithmetischen bzw. harmonischen Mittels der m Größen f_k ansehen kann, und demnach als hyperarithmetische bzw. hyperharmonisches Mittel genannt werden können[1]), so heißen die entsprechenden durch (1) und (2) dargestellten Linien die hyperarithmetische[2]) bzw. hyperharmonische Kurve der gegebenen in bezug auf das System der Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Wenn man an die gegebenen Kurven Γ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ die Tangenten ziehen kann, so kann man es auch an die ab-

---

1) O. Schlömilch, *Hyperarithmetische und hyperharmonische Mittel, nebst gèometrischen Anwendungen* (Zeitschrift. Math. Phys. XXXIV, 1889).

2) Unter hyperarithmetischen Kurven versteht man auch in einem anderen Sinne solche, deren Gleichung eine derartige Mischung algebraischer und transzendenter Funktionen darstellt, daß sie sich den gewöhnlichen arithmetischen Berechnungen meist ganz entziehen, z. B.

$$y = x^{\operatorname{tg} x}, \qquad \log(y^2 + ay) = \sin(x^2 - bx).$$

geleiteten Kurven. Sind nämlich $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}, \ldots, S_n^{(m)}$ die Polarsubnormalen der Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ und S die der Kurve (1), so hat man, da $S_n = \frac{d\varrho}{d\omega}$, die Beziehung

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k S_n^{(k)},$$

welche uns die Normale und demnach die Tangente an (1) zu konstruieren gestattet.

Bezeichnen wir ähnlich mit $S_t^{(1)}, \ldots S_t^{(m)}$ die Polarsubtangenten der Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ und mit S_t die der Kurve (2) und beachten, daß

$$\frac{1}{S_t} = \frac{d\varrho}{\varrho^2 \cdot d\omega} = -\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

so erhalten wir

$$\frac{1}{S_t} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{S_t^{(k)}},$$

vermittelst welcher Beziehung wir die Subtangente und damit die Tangente von (2) erhalten können.

Auch für den Krümmungsradius der Kurve (2) gibt es eine elegante Konstruktion, die von A. Mannheim[1]) herrührt. Wir schreiben nämlich (2) in der Form

$$\frac{1}{\varrho} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\lambda_k}{\varrho_k}$$

und setzen $\frac{1}{\varrho} = u$, bezeichnen mit α den Winkel, den die Transversale mit der Normalen bildet in dem Punkte, in welchem sich die betrachtete Kurve schneidet, mit l die Transversale selbst, mit R den Krümmungsradius; die entsprechenden Stücke der gegebenen Kurven heißen u_i, α_i, R_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Dann läßt sich leicht zeigen, daß

$$\cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + u'^2}}, \qquad R = \frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3(u + u'')}, \qquad u + u'' = \frac{1}{R \cdot \cos^3\alpha},$$

wo die Ableitungen nach ω zu nehmen sind. Ähnliche Ausdrücke erhält man für $\cos\alpha_i$ und R_i; infolgedessen ist

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{R_i \cos^3\alpha_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i (u_i + u_i'') = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i'' = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{\varrho_i} + \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{\varrho_i}\right)'',$$

demnach

$$\frac{1}{R\cos^3\alpha} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{R_i \cos^3\alpha_i},$$

welche Beziehung zur Konstruktion von R dienen kann.

---

1) *Note de géométrie infinitésimale* (Ann. di matem. 2 Ser. I, 1859).

II. In gleicher Weise seien m durch die Gleichungen $y = f_k(x)$ definierte Kurven gegeben, so kann man aus diesen zwei neue ableiten, wenn man setzt

$$y = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k f_k(x) \quad . \; . \; . \; (3) \qquad \frac{1}{y} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{f_k(x)}. \quad . \; . \; . \; (4)$$

Ein Beispiel hatten wir bei den Schwingungskurven S. 16. Insbesondere ist der Fall betrachtet worden, daß nur zwei Kurven Γ_1, Γ_2 gegeben sind, und $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$; die resultierende Kurve Γ_m

$$y = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

heißt dann kurz die Mittelkurve.[1])

Beispiele. **1.** Ist Γ_2 eine Gerade, so ist Γ_m projektiv zu Γ_1. **2.** Für zwei sich berührende Kreise hatten wir einen speziellen Fall in der Doppelherzkurve, Bd. I, S. 193. **3.** Hat man zwei Ellipsen mit denselben Fokalachsen, so entsteht die sogenannte Bérardsche Kurve[2]); haben die Achsen aber eine beliebige Lage, so entsteht die auf Taf. VI Fig. 77 abgebildete Kurve. **4.** Hat man die zwei Hyperbeln

$$y = \frac{a^2}{a+x}, \qquad y = \frac{a^2}{a-x},$$

so entsteht die Kurve
$$y = \frac{a^3}{a^2 - x^2},$$

der C. Huygens begegnete[3]) und die man *Hyperversiera* nennen könnte, da man sie von einer gleichseitigen Hyperbel durch dieselben Methoden ableiten kann, mit denen man die Versiera (I. Bd., Nr. 44) aus dem Kreise herleitet. **5.** Sind die beiden logarithmischen Linien $y = ae^{\frac{x}{a}}$, $y = ae^{-\frac{x}{a}}$ gegeben, so ist ihre Mittelkurve die Kettenlinie $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Γ_m geht immer durch die Schnitte von Γ_1 mit Γ_2; ihre Ordnung ist, wenn Γ_1 und Γ_2 beide algebraisch sind, gleich dem Produkte der von Γ_1 und Γ_2; jede Γ_1 oder Γ_2 berührende Ordinate ist Doppeltangente von Γ_m usw.

III. Aus denselben beiden Gleichungen $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ kann man auch die „geometrische" Mittelkurve ableiten

$$y = \sqrt{f_1(x) \cdot f_2(x)}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

1) H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques (Partie complémentaire)* (Bar-le-Duc, 1899) S. 208.

2) Brocard, Das.

3) Brief an Leibniz vom 6. Februar 1691 (*Oeuvres de Huygens* X, La Haye 1905, S. 10).

da nun Gl. (6) ergibt
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}\right),$$
so besteht zwischen den Subtangenten der drei Kurven die Beziehung
$$\frac{1}{S_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_t^{(1)}} + \frac{1}{S_t^{(2)}}\right),$$
die uns die Tangente an die dritte Kurve zu ziehen lehrt, wenn wir die Tangente der beiden ersten zu konstruieren wissen.[1])

IV. Es seien zwei beliebige Kurven gegeben (die eine kann auch auf einen Punkt reduziert sein), dann heißt der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche beide Kurven berühren, die Äquidistante der beiden gegebenen[2]); sind die letzteren z. B. Kreise, so ist die Äquidistante bekanntlich ein Kegelschnitt. Allgemeiner kann man den Ort der Punkte betrachten, deren Abstände von zwei gegebenen Kurven in einem bestimmten Verhältnisse stehen.[3]) In ähnlicher Weise hat man den Ort der Punkte erforscht, von denen die Tangenten an zwei gegebenen Kurven ein gegebenes Verhältnis haben, insbesondere einander gleich sind.[4])

Reduziert sich die eine Kurve auf den Punkt O und ist außerdem die eigentliche Kurve Γ gegeben, so geht die Äquidistante über in den Ort Δ derjenigen Punkte, die gleichen Abstand von O und Γ haben, und der als Isotele bezeichnet worden ist.[5]) Ist N ein Punkt von Δ, so liegt er auf der Normalen von Γ in einem gewissen Punkte P derart, daß $NP = NO$. Sind nun X und Y die Koordinaten von N, x und y die von P für O als Anfangspunkt, so bestehen die Beziehungen
$$X - x + y'(Y - y) = 0, \qquad (X - x)^2 + (Y - y)^2 = X^2 + Y^2,$$
daher ist
$$X = \frac{x^2y' - 2xy - y^2y'}{2(xy' - y)}, \qquad Y = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2(xy' - y)},$$
oder, wenn $f(x, y) = 0$ die Gleichung von Γ ist,

1) De Lisleferme, *Construction de la tangente à certaines courbes* (Mathésis III, 1883). Wir bemerken mit F. Dingeldey (*Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung*, I. Bd., Leipzig 1910, S. 69) daß eine ähnliche Beziehung besteht, wenn die Zahl der gegebenen Kurven größer als zwei ist.

2) Frolov, *Sur les courbes équidistantes* (Ass. fr., Caen 1894).

3) Mannheim, *Construction du centre de la courbure*, *lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant* (Ann. di Matem. I, 1858).

4) Laguerre, *Sur le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points à deux courbes planes soient égales entre elles* (Bull Soc. math. France, V, 1876—77).

5) P. de Lepiney, *Sur le courbes isotèles,* (Mathésis III, Ser. IX, 1909). Einige Spezialfälle und interessante Anwendungen findet man bei V. Retali (Mathésis III, Ser. VIII, 1908) und E. N. Barisien, *Sur les courbes lieu des points équidistantes d'une conique et d'un point fixe* (Das. X, 1910).

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}}{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \\ Y &= \frac{(y^2-x^2)\frac{\partial f}{\partial y} + 2xy\frac{\partial f}{\partial x}}{2\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Die Gleichung der Isotele $\varDelta$ würde man nun durch Elimination von x, y aus den drei letzten Gleichungen erhalten. Wenden wir das schon so oft in ähnlichen Fällen eingeschlagene Verfahren an, so läßt sich zeigen, daß $\varDelta$ im allgemeinen von der Ordnung $n(n+1)$ ist, und daß jeder r-fache Punkt von Γ einen $r(r+1)$-fachen für $\varDelta$ zur Folge hat. Ferner läßt sich zeigen: **Die Isotele einer Kurve Γ in bezug auf einen Punkt O ist ähnlich und ähnlich gelegen zur Polarreziproken der Inversen von Γ in bezug auf O als Pol.**

V. Bewegen sich zwei Punkte A und B auf zwei gegebenen Kurven derart, daß die Tangenten in A und B mit AB als Grundlinie immer ein gleichschenkliges Dreieck bilden, so beschreibt der Mittelpunkt der Strecke AB eine Kurve, die in der angewandten Mathematik auftritt: früher wurde sie wohl als Longitudinalachse bezeichnet, heute nennen sie die französischen Mathematiker nach einem Vorschlage von M. d'Ocagne[1]) fibre moyenne[2]), die Deutschen Mittelfaserkurve. — Nimmt man dagegen an, daß die Punkte A und B sich in der Weise bewegen, daß die Bogen der beiden Kurven, gerechnet jeder von einem festen Punkte an, bis zu A bzw. B immer gleichbleiben, so beschreibt der Mittelpunkt der Strecke AB eine andere ‚Mittelkurve', deren Tangente und Krümmungsradius C. A. Laisant[3]) zu konstruieren gelehrt hat.

286. VI. Es seien zwei Kurven Γ_1, Γ_2 durch die Gleichungen $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$ gegeben; der Ort eines Punktes A von der Beschaffenheit, daß das zwischen den beiden Kurven gelegene Stück A_1A_2 seiner Normalen den Punkt A als Mittelpunkt hat, heißt die Axoide der beiden gegebenen Kurven.[4]) Sind x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 die Koordinaten von A, A_1, A_2, so hat man

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad (x_1-x_2)\,dx + (y_1-y_2)\,dy = 0.$$

---

1) *Cours de géométrie descriptive* (Paris, 1896) S. 275.

2) G. de Longchamps, *Sur la courbe dite fibre moyenne* (Journ. math. spéc. XXI, 1897); Mannheim, Das.

3) *Note sur un système de deux courbes planes* (Bull. Soc. math. France, XVI, 1887—88).

4) Résal, *Axoïdes de deux lignes planes* (C. R. CXX, 1895).

Die Differentialgleichung der Axoide wird demnach erhalten, wenn man x_1, y_1, x_2, y_2 aus diesen Gleichungen und den beiden folgenden

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \qquad f_2(x_2, y_2) = 0$$

eliminiert; die Elimination von x_2, y_2 vollzieht sich leicht und ergibt

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \qquad f_2(2x - x_1, 2y - y_1) = 0,$$
$$(x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy = 0;$$

um aber auch x_1, y_1 zu beseitigen, muß man die Form der Funktionen f_1, f_2 kennen. Ist z. B. $f_1 = mx$, $f_2 = -mx$, so erhält man als Axoiden die Hyperbeln $xy^m = Const.$ — Es möge bemerkt werden, daß bei der Definition der Axoiden die beiden gegebenen Kurve auch identisch sein können. Fallen die beiden z. B. mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, oder der Parabel $y^2 = 2px$ zusammen, so erhält man als Axoide die beiden transzendenten Linien $x^{a^2} y^{b^2} = c$, $y = ce^{-\frac{x}{p}}$. Bemerkenswert ist noch „daß die Evoluten der Axoiden ebenfalls Axoiden sind".[1])

VII. Wenn zwei gegebene Kurven parallele Normalen haben, so hat Aoust eine dritte Kurve betrachtet, die er Resultantenkurve nannte, deren Normalen parallel zu den Normalen der beiden ersteren und deren Krümmungsradius in jedem Punkte gleich der Summe der Krümmungsradien in den entsprechenden Punkten der gegebenen ist.[2])

VIII. Es seien wieder zwei Kurven Γ_n und Γ_m von der Ordnung n bzw. m gegeben und ein Punkt O ihrer Ebene; man ziehe durch O eine beliebige Gerade g, die Γ_n in n Punkten A, Γ_m in m Punkten B schneidet; dadurch entstehen auf g $n \cdot m$ verschiedene Strecken AB; trägt man nun diese von O aus auf g ab, so ist der Ort ihrer Endpunkte eine neue Kurve, die Sektorie genannt worden ist.[3]) Benutzt man die Polargleichungen von Γ_n und Γ_m mit O als Pol, so ist die Auffindung der analogen Gleichung der Sektorie nur Sache einer Elimination.[4])

IX. Gegeben drei Kurven Γ, Γ_1, Γ_2; eine Tangente von Γ schneidet Γ_1 und Γ_2 in den Punkten M_1 und M_2; der Ort der Mitten der Strecken M_1M_2 heißt die Diametralkurve von Γ_1 und Γ_2.

---

1) A. Mannheim, *Une propriété générale des axoïdes* (Das.).

2) *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris, 1873) S. 53—56.

3) O. Ježek, *Über Sektorien* (Prager Ber., 1882).

4) Andere Ableitungsgesetze findet man im Aufsatze von F. Sibirani, *Sul luogo di un punto univocamente coordinato ad una coppia di punti mobili* (Period. Matem., XX, 1904).

J. Massau hat bemerkenswerte Konstruktionen ihrer Tangente und ihres Krümmungsradius angegeben.[1])

X. Die bisherigen Kurven hatten eine metrische Definition; das kann man jedoch nicht sagen von einer durch H. Sisam[2]) untersuchten Kurve, indem er eine Betrachtung von Steiner[3]) verallgemeinerte, und die in folgender Weise hergeleitet wird: Gegeben sind zwei in derselben Ebene gelegene algebraische Kurven Γ_1 und Γ_2; man betrachte die Tangenten von Γ_1 und die Punkte, in denen sie die Γ_1 schneiden, in diesen lege man an Γ_2 die Tangenten; der geometrische Ort ihrer Schnittpunkte ist eine neue algebraische Kurve, deren Plückersche Zahlen Sisam als Funktionen der von Γ_1 und Γ_2 bestimmt hat. Wenn Γ_2 sich auf einen Punkt reduziert, so haben wir die Steinersche Kurve.

1) *Cours de mécanique de l'université de Gand.* III éd. 1891, S. 376 und 402.

2) *On some loci associated with plane curves* (Amer. Journ. Math. 31, 1909).

3) *Ges. Werke* II, S. 599.

Nachwort.

Rückblick über die historische Entwickelung der Theorie der ebenen Kurven.

Das Bestreben, die vielgestaltigen Untersuchungen, die im Laufe von zwanzig Jahrhunderten (so alt ist schon jene Disziplin) über spezielle ebene Kurven aufgenommen und durchgeführt sind, in eine logische Ordnung zu bringen, veranlaßte uns häufig, in unserer Darlegung die chronologische Ordnung zu verlassen (vgl. I. Bd., Vorwort). Um diesem Übelstande abzuhelfen, halten wir es für das beste, zum Schlusse noch einen flüchtigen Rückblick zu halten über das, was auf den vorigen Seiten nur vereinzelt und verstreut dargelegt ist.

Der Ursprung der Theorie der ebenen Kurven verliert sich ins Dunkel der Zeiten; die Betrachtung der Bewegung der Gestirne und des Falles schwerer Körper, die Beobachtung des geradlinigen Weges des Lichtes und die des Schattens, den undurchsichtige Körper werfen, diese und viele andere Phänomene solcher Art mußten bei jedem, der Augen hatte zu sehen, und den Verstand zum Nachdenken, den Begriff der Linie hervorrufen, sei es als die Spur, die ein bewegter Punkt hinterläßt, oder als eines gewissen Etwas, das den einen Teil einer Fläche von dem benachbarten scheidet. Und in der Tat, alle alten Bauwerke, die als Reste einer verschwundenen Kultur übrig geblieben sind, tragen auf ihren Wänden Zeichnungen von Kurven, oder sie setzen in ihrer Konstruktion Kenntnisse über solche Linien voraus. Wir werden jedoch nicht versuchen festzulegen, welcher Person, ebensowenig welchem Volke die Entdeckung des Begriffes der Linie zuzuschreiben ist; das grosse Buch der Geschichte würde stumm bleiben für jeden, der sich mit dieser Frage befassen würde. Wir begnügen uns mit der Bestätigung, daß bei allen Völkerschaften, die es zu einer gewissen Kulturstufe gebracht haben, nicht bloß der Begriff der Geraden und des Kreises vorhanden ist, sondern auch Versuche vorliegen, die Länge dieser Linien zu messen und die Größe der von ihr umschlossenen Fläche zu bestimmen.

Ein festerer Boden bietet sich aber demjenigen, der auf den Ursprung der Kegelschnitte zurückgehen will, da man nämlich die Entdeckung jener berühmten Triade dem Menaechmus, dem Lehrer Alexanders des Großen zuschreibt; mehr als zweitausend Jahre eifrigen und fast ununterbrochenen Studiums haben nicht ausgereicht, die Aufzählung aller ihrer Eigenschaften zu erschöpfen. Menaechmus erhielt diese Kurven, indem er einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene schnitt, oder sollte er diese Kurven in der Ebene gezeichnet haben, in der Absicht, das Problem der

Würfelverdoppelung zu lösen? Die Antwort ist zweifelhaft. Nicht unwichtig ist aber die Bemerkung, daß zufolge seines Verfahrens die Geometrie wenigstens um eine Methode bereichert wurde, die der weitgehendsten Anwendung und vielfacher Verallgemeinerung fähig ist, um neue Kurven zu erzeugen und zu erforschen; sie besteht darin, eine bekannte Oberfläche durch Ebenen zu schneiden, oder eine Kurve mit ihrer Zentralprojektion in Beziehung zu setzen, oder schliesslich eine metrische Beziehung aufzustellen, der alle Punkte einer Kurve gehorchen. — Eine Anwendung des ersten Verfahrens findet sich drei Jahrhunderte v. Ch. bei Perseus, um eine interessante Gruppe von Kurven zu erhalten, nämlich die spirischen Linien; das zweite Verfahren lieferte dem Newton seine Klassifikation der ebenen Kurven dritter Ordnung, und kann als Urquell der gesamten heutigen projektiven Geometrie betrachtet werden; in dem dritten schließlich erkennt man die ersten Anfänge der analytischen Geometrie. Dennoch enthüllten jene Methoden — wie sehr sie auch in verschiedener Weise angewendet, in mehrfacher Weise modifiziert und gewissermaßen umgeändert wurden, durch Apollonius von Pergae in seinem berühmten Werke über die Kegelschnitte — ihre ganze Fruchtbarkeit erst viele Jahrhunderte später. Im allgemeinen waren es jedoch nicht jene Methoden, die von den alten Geometern angewendet wurden, um die Zahl der speziellen ebenen Kurven zu vermehren, vielmehr gaben sie den kinematischen Methoden den Vorzug. Und es darf uns nicht wundernehmen; ist es doch viel natürlicher, eine Linie dadurch zu definieren, daß man die Gesetze der Bewegung des sie erzeugenden Punktes angibt! So war es die Vereinigung der drehenden Bewegung einer Geraden mit der fortschreitenden eines Punktes (oder einer zweiten Geraden), welche die von dem Sophisten Hippias von Elea, einem Zeitgenossen des Sokrates, erdachte Quadratrix entstehen ließ. Die Quadratrix des Hippias und des Dinostratus bilden die ersten Glieder in der Reihe der Kurven, die zum Zwecke der Quadratur des Kreises ersonnen wurden; unter ihnen finden sich sowohl algebraische Kurven, wie die virtuellen Parabeln von G. a. S. Vincentio (1647), als auch transzendente Kurven, wie die Tschirnhausensche Quadratrix (1686) und die Kochleoide (1700).

Der Bewegung entstammen auch die um 300 v. Ch. von Archimedes erfundene Spirale und die ein wenig jüngere Konchoide des Nikomedes, dasselbe gilt von der Cykloide, die vielleicht auch schon den Alten bekannt gewesen, aber erst nach 1625 gründlich untersucht wurde; ebenso von den Kurven, die, wie z. B. die Pascalsche Schnecke durch Erweiterung des Begriffes der Konchoide erhalten werden und von den cyklischen Kurven (1730 u. f.), für die kartesische Parabel (1637) und die Koppelkurve, insbesondere die Watt'sche Kurve, die 1784 entdeckt wurde.

Wenn nun auch die Konchoide des Nikomedes vermittels der Bewegung definiert wurde, so war sie doch zu dem Zwecke erdacht, das berühmte Problem der Würfelverdoppelung und der Winkeldreiteilung zu lösen, welche Probleme bekanntermaßen die Dämonen waren, welche den alten Geometern schlaflose Nächte bereiteten. Zu demselben Zwecke wurde ungefähr um dieselbe Zeit die Kissoide des Diokles erfunden, und es ist bemerkenswert, daß durch die Erfindung der Kissoide — ebenso durch die der Konchoide —

die Geometrie um ein treffliches Verfahren bereichert war, aus einer beliebigen Kurve eine andere abzuleiten, die man die kissoidale oder konchoidale Kurve der ersteren zu nennen pflegt. Konchoide und Kissoide gehören überdies einer zahlreichen Gruppe von Kurven neueren Ursprungs an, die man wegen ihrer hauptsächlichsten Anwendungen als Multiplikatrix-, Mediatrix- und Sektrix-Kurven bezeichnet hat und die man wegen ihrer schönen Eigenschaften zu den interessantesten Gebilden der Geometrie zählen darf.

Die Völkerwanderungen, die Einfälle der Barbaren, und die Religionskriege, die das Mittelalter erfüllten, wie auch humanistische Studien, die dazumal ihr Interesse beanspruchten, verursachten eine derartige Stagnierung bezw. Ablenkung der geistigen Tätigkeit des Menschengeschlechts, daß ganz besonders die von den Mathematikern des goldenen Zeitalters der griechischen Geometrie gestreuten Keime schlummerten, ohne Früchte zu zeitigen. Das überkommene Erbteil der Geometrie blieb nicht nur nicht auf seinem Bestande, sondern erlitt auch beklagenswerte Verluste; wir brauchen nur daran zu erinnern, daß in jener Epoche der Barbarei, in welcher die rohe Gewalt über die Vernunft herrschte, Werke wie die Porismen des Euklides, die Ebenen Örter des Apollonius, und wer weiß wie viele andere Schriften, von denen nicht einmal der Titel oder der Name des Autors übrig geblieben, für immer vernichtet worden sind. Die von den Arabern nach Europa gebrachten Fragmente griechischer Wissenschaft, die sich aus dem gewaltigen geistigen Schiffbruche des Mittelalters gerettet hatten, erweckten alsbald auch bei den Abendländern den eingeschläferten Geist zur Erforschung der Wahrheit, und die ebenen Kurven gaben alsbald den Beweis von der geistigen Arbeit der Mathematiker. Die Theorie dieser interessanten Gebilde erfuhr alsbald durch die Verdienste eines Descartes und Fermat eine vollständige Umwandelung und eine ungeahnte Entwickelung. Die Koordinatenmethode ist die Zauberin, die mit einem Schlage eine derartige Umwandlung bewirkte! Sie liefert ja nicht bloß ein einheitliches Verfahren, jede Kurve symbolisch darzustellen, sondern sie bietet auch die Möglichkeit eine allgemeine Theorie der Kurven zu schaffen, und setzt jeden in den Stand, die Schar der speziellen ebenen Kurven um neue Elemente zu bereichern.

Mit der Entstehung der analytischen Geometrie ist die Untersuchung einer Kurve eigentlich identifiziert mit der einer Funktion; jeder Fortschritt in der Analysis macht sich auch in einem solchen der Geometrie bemerkbar; zwei Disziplinen, die zunächst in verschiedener Richtung und zu verschiedenen Zwecken streben, vereinigen sich und gehen für immer zusammen. Und dieser Vereinigung verdanken unzählige wichtige Kurven ihre Entstehung; wir erwähnen zunächst das Folium Cartesii (1638), die Parabeln (1638) und die Hyperbeln höherer Ordnung (um 1700), die Perlkurven (1658), die Lamé'schen Kurven (1818) und die triangulär-symmetrischen (1867); ebenso die Polyzomalkurven (1868) und andere. In zweiter Linie heben wir hervor die gegen Ende des 17. Jahrhunderts betrachteten trigonometrischen und die hypertrigonometrischen (neueren Ursprungs), die logarithmische (1644), die Kurve von Wallis (1655) und die hypergeometrische von Euler, sowie

die aus der Geometrie der Polynome entspringenden (1799) und die sonderbaren außerordentlichen Kurven, die man dem 19. Jahrhundert verdankt.

In der Epoche in der Descartes und Fermat herrschten, begannen auch die schon von Archimedes ausgestreuten Samen der Infinitesimalrechnung, die Hunderte von Jahren unfruchtbar im Boden gelegen hatten, Keime zu treiben. Eben in dieser Epoche gelangen Ergänzungen zur Theorie einiger wichtiger Kurven von allergrößter Bedeutung, die man nach heutiger Bezeichnung als Bestimmung analytischer Natur gewisser, in der Geometrie auftretender Funktionen bezeichnen kann. Denn, gehört nicht die Untersuchung hierher, die zu dem hübschen Satze führt, daß jeder Bogen der Archimedischen Spirale gleich einem passend gewählten auf der Parabel sei? Heute sind wenige Zeilen Rechnung erforderlich, um die Wahrheit dieses Satzes nachzuweisen, aber welch großer Scharfsinn war nicht erforderlich, um die Identität von Bogen solch verschiedener Kurven, wie die obigen, zu erkennen? Und das um so mehr, als das Problem der Rektifikation einer Kurve ein Hindernis war, dem die Waffen der alten Geometer nicht gewachsen waren, und vor dem selbst ein Archimedes sich als besiegt erklären mußte!

Dieses glänzende Resultat ermutigte die Mathematiker, den Versuch zu machen, auch andere gekrümmte Linien auszumessen oder sie mit anderen verschiedenen zu vergleichen. In der Tat verallgemeinerte Fermat (1636) den obengenannten Satz, indem er die Gleichheit zwischen dem Bogen einer Parabel höherer Ordnung und dem einer jener Spiralen erkannte, zu denen man durch Verallgemeinerung der Archimedischen gelangte. Nicht lange Zeit war verflossen, als auch schon (und zwar fast gleichzeitig und unabhängig voneinander) der Franzose Fermat, der Engländer Neil und der Holländer Heuraet eine algebraische Kurve entdeckten, die exakt rektifizierbar war: die semikubische Parabel; diesem Resultate kann die fast zur selben Zeit gelungene Rektifikation einiger transzendenter Kurven an die Seite gestellt werden, wie die der logarithmischen Spirale (Torricelli), der gemeinen Zykloide (Wren), der Epi- und Hypocykloiden (De la Hire), sowie einiger anderer ähnlicher Art. Diese schönen Ergebnisse führten 1714 den Grafen von Fagnano zu einer ganzen Familie von Parabeln, die Bogen enthalten, deren Differenz rektifizierbar ist und zu seinen epochemachenden Untersuchungen über die Rektifikation der Lemniskate, die die fundamentalen Vorarbeiten zur Theorie der elliptischen Funktionen bildeten. Von derselben Bedeutung sind auch die neueren Untersuchungen über die Kurven, deren Rektifikation von vorher bestimmten Funktionen abhängt; von den Früchten, die sie gezeitigt haben, weisen wir nur auf die Entdeckung der Sinusspiralen (1842) sowie die der Serret'schen Kurven (1845) hin.

Das durch die analytische Geometrie angewiesene Verfahren, unzählig viele spezielle Kurven zu erhalten (nämlich sie durch die entsprechenden Gleichungen zu definieren) läßt nicht immer ihre Gestalt erkennen und führt meistens nur mit großer Umständlichkeit zu einer organischen Erzeugung derselben. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn ein Geometer — Guido Grandi — sich 1723 die Aufgabe stellte, die Eigenschaften gewisser Kurven von vorher bestimmter Gestalt, nämlich der Rhodoneen

zu untersuchen, und wenn bald darauf die Gelehrten zu der Methode der Alten, d. h. zu der kinematischen Methode zurückkehrten, um neue Kurven zu erhalten. Dem Beispiele des genannten italienischen Geometers sind auch einige der neueren gefolgt: das zeigt uns die Erfindung der dreieckigen und orbiformen Kurven Eulers (1781), einiger Ovale (1895), des Trifolium pratense (1894) und der geometrischen Blätter (1895). Jene Rückkehr zu den älteren Methoden bezeugen uns weiter mehrere treffliche Arbeiten De la Hires (1730) — es genüge die Anführung derjenigen, die sich auf die allgemeinen Konchoiden beziehen —; als neuere Ergebnisse dieser Methode haben wir die Zykloiden und die glänzende Schar verwandter Linien, wie die Epi- und Hypozykloiden, die allgemeinen dem Descartes nicht unbekannten Trochoiden, insbesondere die Kurven von Delaunay und Sturm (1841), die Olistoiden — insbesondere die Astroiden — die Verfolgungskurven, die Reptorien Joh. Bernoullis, die syntrepenten und isotrepenten Kurven von Miquel (1853) anzuführen.

Derartige Studien führten zu wichtigen Untersuchungen und zur Aufstellung von Folgerungen, die besonders in den Annalen der Mathematik niedergelegt worden sind. Außer den unzähligen Sätzen über das Ziehen der Tangenten, über die Bestimmung der Kurvenbogen und Flächenberechnung (viele derselben, wenn sie auch heute in Vergessenheit geraten sind, sind dennoch würdig, den berühmten Resultaten, die Archimedes erzielte, an die Seite gestellt zu werden) möge noch eine Gruppe vollständig neuer Sätze und Aufgaben erwähnt werden, die aus derartigen Studien hervorgegangen sind. Entdeckt wurde der Tautochronismus der Zykloide, bemerkt wurde, daß sie die Brachistochrone im leeren Raume sei, man ging an die Aufgabe, statt Kurven mit vorherbestimmten geometrischen Eigenschaften aufzusuchen, solche mit bestimmten mechanischen Eigenschaften zu bestimmen. So entstand vor 1687 das Problem der „curva descensus aequabilis", das der parazentrischen Isochrone von Leibniz (1687), das von der semikubischen Parabel gelöst wird (1690), das der Seil- und Segelkurven, welches die Kettenlinie löst (Nr. **234**), das der Elastizitäts- oder Muldenkurve, das durch dieselbe Kurve gelöst wird. Nicht unerwähnt bleibe auch die Aufgabe, die (1693) zur Traktrix führt und ein allgemeines, von Joh. Bernoulli gestelltes Problem, welches von den heute Tautobaryden und Barytropen genannten Kurven gelöst wird; ferner mögen denjenigen Kurven, die man als physikalisch-mathematische bezeichnen kann, noch die Cartesischen Ovale (1637) hinzugefügt werden, indem man sie als aplanetische Linien betrachtet, und die Cassinischen Ovale (vor 1740), angesehen als vorgebliche Bahnen der Planeten, die Äquitangentialkurven, die Isophanen, die Galileische Spirale, die Kettenlinie gleichen Widerstandes (1826), die Konchospiralen (1840), die Lissajous'schen Kurven (1850), die Herpolhodie und die Poinsotsche Spirale (1851), die elektromagnetische Kurve Em. Weyr's (1869), die Klothoide (1882) u. a. m.

Das inverse Problem der Tangente ist in seinem Ursprunge mit einer bemerkenswerten Kurvenklasse verknüpft, welche als Debeaunesche Kurven bezeichnet werden (Nr. **217**), während es in anderen Stadien seiner Entwickelung zu den Ribaucourschen Linien, zur Spirale von Norwich (1869) und zur Eulerschen Kurve (1781) führte.

Die Koordinatenmethode führt auch, abgesehen davon, daß sie unzählig viele spezielle Kurven hervorsprießen läßt, zu einem sehr einfachen Verfahren, eine Kurve in eine andere zu verwandeln, dessen Idee zuerst Varignon 1704 voll und klar erfaßt hatte: man verwandelt nämlich die kartesischen in Polarkoordinaten. Diesem einfachen Verfahren verdanken ihre Entstehung außer der logarithmischen Spirale (zu der man allerdings auch auf anderem Wege gelangt), die hyperbolische und die parabolische Spirale und die höheren Grades; ferner der Lituus von Côtes, sowie ein großer Teil der algebraischen Spiralen. Indem man ein ähnliches Verfahren auf die gewöhnliche Traktrix anwandte, gelangte R. Côtes (1722) auch zur Traktrix complicata.

Die geometrische Methode des Descartes und Fermat, wenngleich sie von dem allerhöchsten und unbestreitbaren Nutzen ist, bietet dennoch unter Umständen ziemliche Unbequemlichkeiten, die man vergeblich zu leugnen oder zu beseitigen versuchen würde: die erste derselben ergibt sich aus der Notwendigkeit, daß man immer die Koordinatachsen zu berücksichtigen hat, und zwar als fremde und häufig hinderliche Elemente. Die Versuche, diesen Unbequemlichkeiten auszuweichen, gehen bis zum Ende des 18. Jahrhunderts zurück. Dies zeigen folgende Worte, die S. F. Lacroix in der Vorrede seines großen *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (Paris, 1797) S. XXV schrieb: „En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géometrie, qu'on pourroit appeler Géométrie analytique, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique á l'égard des propriétés de l'equilibre et du mouvement.“ Diese Richtung in der Geometrie, meisterhaft innegehalten in den Werken besonders eines Hesse und Clebsch, hat schließlich dazu geführt, das Studium der ebenen Kurven mit der Theorie der ternären algebraischen Formen zu identifizieren: ihr verdanken wir fast die ganze allgemeine Theorie der algebraischen Kurven, auf ihren ungeheuren Wert hinzuweisen, wäre daher überflüssig. Aber auch sie genügt noch nicht vollständig den Wünschen nach Befreiung von der unumgänglichen Betrachtung solch künstlicher Elemente, wie die Koordinaten sind, dem Bestreben eine analytische Geometrie zu besitzen, die ausschließlich mit Elementen operiert, die mit der zu untersuchendenden Kurve in engem Zusammenhange stehen. Diesem Bedürfnisse zu genügen, versuchte Leibniz mit seiner *Characteristica geometrica*, und dies gelang H. Graßmann durch den in seiner *Ausdehnungslehre* enthaltenen geometrischen Kalkül. Dies zu erreichen waren auch diejenigen bemüht, die eine Kurve durch eine Gleichung darzustellen suchten, in welcher keine künstliche Elemente, sondern nur solche vorkommen, die mit der Gestalt der Kurve zusammenhängen, wie Bogenlänge und Krümmungsradius. Die Anfänge dieser Methode sind schon mehr als ein Jahrhundert alt, und schon 1798 bemerkt Lacroix im II. Bande des vorhin rühmlichst erwähnten *Traité*, nachdem er davon eine Anwendung gemacht hat (S. 392): „cette manière de présenter l'équation d'une courbe, est remarquable en ce qu'elle n'emploie que des quantités absolument inhérentes à la courbe proposée et

qu'elle ne laisse d'arbitraire que le choix du premier point.“ Andere Beiträge für denselben Gedankengang liefern die beiden Werke von K. C. F. Krause und A. Peters, die wichtigen Abhandlungen von Whewell, Onnen und anderen[1]). Derjenige Geometer aber, dem dieser neue Zweig der analytischen Geometrie einen Kanon von Gesetzen verdankt, die einen richtigen Gebrauch desselben sichern, ist E. Cesàro, der dieser Disziplin (die er *Natürliche Geometrie* nannte), zunächst eine Reihe von Abhandlungen, und dann ein vorzügliches Buch widmete, das 1901 auch in einer deutschen Bearbeitung von G. Kowalewski erschienen ist.

Wir haben auf diesen neuen Zweig der Geometrie besonders deswegen hingewiesen, weil aus ihm die Entdeckuug vieler spezieller Kurven und Eigenschaften schon früher bekannter Kurven hervorgewachsen ist, ferner aber auch, weil er ein Mittel bietet — ähnlich dem von Varignon gelieferten — um wieder neue Kurven zu erhalten; man braucht nur in der Gleichung irgend einer Kurve die kartesischen oder Polarkoordinaten ganz oder teilweise durch natürliche Koordinaten zu ersetzen, um aus jener eine neue Kurve abzuleiten. Es möge auch nicht verschwiegen werden, daß in vielen Fällen die natürliche Gleichung einer Kurve ganz von selbst zu Verallgemeinerungen führt, zu denen man wohl nie auf anderen Wegen gelangt sein würde; die Sternkardioiden, die Pseudozykloiden, die Pseudotraktrix und die Pseudokatenarien mögen zum Nachweise dafür dienen.

An diese Erzeugungs- oder Verallgemeinerungsarten analytischer Natur schließen wir diejenigen an, die in der Anwendung einer vorher bestimmten geometrischen Transformation auf eine gegebene Kurve bestehen, und wollen wir unter diese auch jene rechnen, die einer Kurve ihre Evolute, Evolvente, Parallelkurve, Radiale, Brennlinie oder Fußpunktkurve oder ihre Differential- oder Integralkurve[2]) entsprechen lassen.

Erwähnen wir schließlich noch die Untersuchung der Kurven, die durch eine geometrische Transformation wieder in sich selbst übergehen, so haben wir damit die Aufzählung der wichtigsten Wege erschöpft, auf denen die

1) Wer sich spezieller hierüber informieren will, nehme den trefflichen *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* von E. Wölffing zur Hand (Bibl. math. 3. Ser. I, 1900). Einen Zusatz dazu findet man bei E. Sös, *Zur Geschichte der nat. Geometrie* (Id. VI, 1906). Nicht unerwähnt möge bleiben, daß die Frage nach natürlichen Koordinaten schon 1802 von Krause in seiner *Inauguraldissertation* (Jena) aufgeworfen wurde.

2) Es sei hier auch darauf aufmerksam gemacht, daß man die Untersuchung der Intregralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung auch ohne vorherige Integration der Gleichung ausführen kann durch Methoden, die wir Poincaré verdanken und die wir dargelegt finden im III. Bd. des *Traité d'analyse* von E. Picard (Paris, 1896) S. 198ff. sowie in dem Aufs. von P. Painlevé, *Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen* (Enzyklopädie d. math. Wiss. Bd. II, S. 189ff.). Andere Einzelheiten über diesen Gegenstand finden sich in der Abh. von C. F. E. Björling *Über singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades* (Arch. f. Math. Phys. II Ser. IV 1886); dann in verschiedenen Abhandlungen von W. von Dyck, deren neueste im XXV. Bd. der *Abh. d. K. Bayr. Akad. d. Wiss.* (München 1910) erschienen ist; endlich in drei Arbeiten von W. Büchel in den Mitt. d. math. Ges. Hamburg (Bd. IV) und im Jahresber. der Realschule in Eppendorf bei Hamburg (1906).

Gelehrten an der Aufstellung und Erforschung der reichen Scharen spezieller ebener Kurven gearbeitet haben, und die jederzeit von allen denen beschritten werden können, die ihnen nacheifern wollen.

Aber gerade die beträchtliche Ausdehnung, welche diese Scharen langsam und unaufhörlich annahmen, und die große Mannigfaltigkeit ihrer Elemente ließen immer dringender den Wunsch hervortreten, sie in eine gute und gesetzmäßige Ordnung zu bringen. Die Klassifikation der Kurven dritter Ordnung, die vor mehr als zweihundert Jahren ausgeführt wurde, dann die der Kurven vierter Ordnung, sowie die gegen 1750 von Euler und Cramer geschaffenen methodischen Bearbeitungen der algebraischen Kurven, bezeugen, wie alt dieser Wunsch schon ist. Derartige Arbeiten hat das verflossene Jahrhundert nicht weniger als vier von größter Bedeutung hinzugefügt: zwei von wesentlich analytischer Natur, durch Plücker (1839) und Clebsch (1876), die dritte, die man als eklektisch bezeichnen kann, von Salmon (1852), und schließlich die vierte halb- oder pseudosynthetische von Cremona (1862); von derselben Art, aber mehr elementarer Natur ist das 1903 erschienene Handbuch von H. Wieleitner. Für eine streng synthetische Theorie der algebraischen Kurven haben schon R. de Paolis und E. Kötter die wesentlichsten Elemente geliefert.[1]

Was uns durchaus noch fehlt, ist eine Theorie der nicht algebraischen Kurven, die, wenn sie auch nicht alle bekannten, so doch wenigstens die größte Zahl der transzendenten Kurven umfassen möchte; die Lehre der panalgebraischen Kurven, die seit 1901 festen Boden gewonnen hat, kann als ein erster Schritt in dieser Richtung angesehen werden.

Möge das zwanzigste Jahrhundert, gewappnet mit allen ihm aus den vorigen Jahrhunderten überkommenen Hilfsmitteln, es dahin bringen, daß die allgemeine Theorie der transzendenten Kurven aufhört, ein sehnlichst erwünschter und unerfüllter Traum der Geometrie zu sein. Wenn für derartige Bestrebungen die vorliegende Schrift ein Vorbereitungs- und Hilfsmittel sein könnte, so würde der Verfasser für die Mühe, die ihm die Abfassung dieses Buches verursacht hat, reichlich entschädigt sein.

---

1) Eine erschöpfende Darstellung des gegenwärtigen Standes der Theorie der algebraischen Kurven findet man in dem bezügl. Artikel von L. Berzolari in der *Enzyklopädie der math. Wiss.*

Berichtigungen und Zusätze.

Zum ersten Bande.

S. 58 Z. 17 v. u. lies **192** statt **190**.

„ 68 „ 11 „ „ „ boucle „ bouche.

„ 117 „ 18 „ „ Zusatz: Zu den elliptischen Kurven 4. Ordnung gehört auch der Ort der Punkte, die in einer gegebenen Polarität sich in einem bestimmten Abstande von den ihnen entsprechenden Geraden befinden. Er hat als Doppelpunkte die unendlich fernen der Fundamentalkurve der Polarität, hat also einen Berührungsknoten für den Fall, daß diese Kurve eine Parabel ist. Die betreffende Kurve wird untersucht im II. Kap. der Diss. von R. Dittrich *Abstandsörter im Polarraum* (Breslau, 1910). — Auf andere Kurven derselben Art stieß K. Brandenberger bei seinen Untersuchungen *Über Lamberts flächentreue Azimutalprojektion* (Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. Zürich Bd. 54, 1910).

S. 118 Z. 14 v. u. lies ϱ^2 statt ϱ^3.

„ 135 „ 12 „ „ „ **eines Rotationsparaboloides mit einem Kegel.**

„ 149 „ 3 „ „ „ F. Gomes statt J.

„ 156 „ 4 „ o. „ $\cos\frac{\omega}{2}$ „ $\frac{\omega}{3}$.

„ 205 „ 2 „ u. „ Cardoso „ Cardose.

„ 211 „ 5 „ „ „ Taf. VII „ VI.

„ 212 „ 7 „ „ Zusatz: Bei seinen Untersuchungen über das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche fand A. Wedemayer (Astron. Nachr. 1909), daß die Cassinische Kurve auch definiert werden kann als der geometrische Ort für die unter demselben Winkel erfolgenden Schnitte aller Kreise, die man über den Diagonalen eines Rechteckes als Sehnen konstruieren kann.

S. 232 Z. 2 v. o. lies $\frac{a^4}{4}$ statt $\frac{a^2}{4}$.

„ 280 „ 3—8 sind so zu modifizieren: Die „Übergangskurve" ist von der zehnten und die Flachpunktskurve von der achten Ordnung; in speziellen Fällen des gleichschenkligen Kurbelmechanismus erhält man die letztere aus der „Polkurve" durch die konforme, durch $z' = z^2$ definierte Transformation; immer hat sie die festen Ecken des Gelenkvierecks zu Doppelpunkten und die Kreispunkte zu vierfachen.

S. 280: Schluß des Kapitels: Eine andere mit den Gelenkvierecken verknüpfte Kurve ist von J. Cardinaal in der Abh. *Sur une courbe plane de huitième degrée* (Arch. Teylor II. Ser. 12. Bd., 1910) eingehend untersucht.

S. 286 Z. 3 v. u. lies dans épure statt espace.

„ 290 „ 9 „ „ „ $+ b^2\cos^2\varphi$ „ $b^2\varphi$.

„ 338 „ 1 „ o. „ der so erhaltenen „ 50.

„ 341 „ 7 „ u. „ Alg. Analysis „ Allg.

„ 387 „ 11 „ o. „ a^{n+1} „ a^{m+1}.

„ 393 „ 3 „ u. „ Nr. 47 „ 46.

„ 393 „ 14 „ „ „ $n' - n - 1$ „ $n - n' - 1$.

S. 406 Z. 7 u. 12 v. u. lies OC statt RC.
„ 463 „ 4 v. o. lies $\varDelta = \sqrt{-\varrho^4 + \cdots}$ „ ϱ^n.
„ 472 „ 3 „ u. „ $2\varrho^n \cos n\omega$ „ $2\varrho n$.
„ 473 „ 2 „ o. „ $\frac{(2a)^n}{2}$ „ $(2a)$.
„ 474 „ 8 „ „ „ $\frac{d\varrho}{\varrho}$ „ $\frac{d\varrho}{d\omega}$.
„ 481 „ 1 „ „ „ $\varrho^2 = \frac{a^2}{2} \cos^3 \frac{2\omega}{3}$ „ $\cos^2$.

„ 485: Zusatz: Die Lissajousschen Kurven sind besonders für den Fall, daß sie algebraisch sind, untersucht worden, aber auch im entgegengesetzten Falle erfreuen sie sich bemerkenswerter Eigenschaften. Um diese nachzuweisen, beachten wir, daß die Gl. (1) S. 482 zeigen, daß die kartesische Gleichung der entsprechenden Kurve lautet

$$\frac{1}{m}\left(\arcsin \frac{x}{a} - \gamma\right) = \frac{1}{n}\left(\arcsin \frac{y}{b} - \delta\right).$$

Nun folgt hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\sqrt{a^2 - x^2}}{n\sqrt{b^2 - y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

woraus sich ergibt: Die Berührungspunkte der von dem Punkte $P(x_0, y_0)$ an die unendlich vielen, allen möglichen Werten der Konstanten γ, δ entsprechenden Kurven (1) gezogenen Tangenten liegen auf der Kurve 4. Ordnung

$$\frac{y - y_0}{x - y_0} = \frac{m\sqrt{a^2 - x^2}}{n\sqrt{b^2 - y^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Demnach sind die transzendenten Lissajousschen Kurven panalgebraisch. Die durch (B) dargestellte Kurve hat P als Doppelpunkt, liegt P aber auf einer der Geraden $x = \pm a$, $y = \pm b$, so wird P eine Spitze; wenn aber $x_0 < |a|$ und $y_0 < |b|$, oder $x_0 > |a|$ und $y_0 > |b|$, so wird P ein Knoten, andernfalls ein isolierter Punkt sein. Alle Kurven (B) haben vier reelle unendlich ferne Punkte gemeinsam, die entsprechenden Asymptoten haben die zusamenfassende Gleichung $m^2(x - x_0)^4 - n^2(y - y_0)^4 = 0$, sie laufen somit in P zusammen und haben von den Konstanten a, b unabhängige Richtungen.

Diejenigen Tangenten der betrachteten Kurven, die mit der x-Achse den Winkel λ bilden, liegen auf der Kurve

$$\frac{m^2\sqrt{a^2 - x^2}}{n^2\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda},$$

also auf der Hyperbel

$$m^2 \cos^2 \lambda \cdot x^2 - n^2 \sin^2 \lambda \cdot y^2 = m^2 a^2 \cos^2 \lambda - n^2 b^2 \sin^2 \lambda,$$

diese hat die Koordinatachsen zu ihren Achsen, und wenn man ihre Halbachsen p und q nennt, so hat man

$$\frac{1}{p^2} = \frac{m^2 \cos^2 \lambda}{m^2 a^2 \cos^2 \lambda - n^2 b^2 \sin^2 \lambda}$$

$$\frac{1}{q^2} = \frac{n^2 \sin^2 \lambda}{m^2 a^2 \cos^2 \lambda - n^2 b^2 \sin^2 \lambda},$$

daher besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$\frac{a^2}{p^2} - \frac{b^2}{q^2} = 1,$$

die unabhängig von m und n ist. — Die Quadratur der Kurven läßt sich elementar ausführen; man hat nämlich

$$\int y\,dx = \frac{mab}{2}\left\{\frac{\cos[(m-n)t+(\gamma-\delta)]}{m-n} - \frac{\cos[(m+n)t+(\gamma-\delta)]}{m+n}\right\} + \text{Const};$$

nicht aber gilt dasselbe von der Rektifikation.

Zum zweiten Bande.

S. 39 Z. 14 v. o. lies $2n\pi a$ statt α.

„ 100 „ 18 „ u. „ Wolstenholme statt Wolstenhohne.

S. 123: Zusatz: Während des Druckes erschien die Étude géometrique des roulettes planes et sphériques, von Haton de la Goupillière (Paris, 1910) eine wichtige Monographie, in der alle bekannten sowie einige neue Eigenschaften der allgemeinen Trochoidalen in einheitlicher und eleganter Methode bewiesen werden.

S. 147 Z. 13—18 sind wie folgt zu modifizieren:

$$s = \int \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - [\psi(\varrho) - c]^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

da nun aus den Gleichungen $R = \varphi(\varrho)$, $\int \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\varphi(z)} = \psi(\varrho) - c$

$$R = \frac{\varrho}{\psi'(\varrho)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

folgt, so ist die natürliche Gleichung der in Rede stehenden Kurve das Resultat der Elimination von ϱ aus (5) und (6); man kann daher das System (5), (6) als **eine natürliche parametrische Darstellung der Kurve betrachten.**

S. 148 Z. 16 lies: aus den Gleichungen $R_1 = R\frac{dR}{ds}$, $s_1 = R$, statt: wenn man ... setzt.

„ 149 „ 6 v. o. lies im Nenner $\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2}\cdot\frac{d\omega}{dt}$ „ $\frac{d\varrho}{dt}$.

„ 149 „ 9 „ „ „ „ „ $\varrho^2\left(\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^3$ „ ϱ.

„ 173 „ 1 „ u. „ Kleyer „ Kelyer.

„ 207 „ 5 „ o. „ 230 „ 231.

„ 273 „ 4 „ „ „ $ds_1 = \frac{\sqrt{\mu^2 ds^2 + dR^2}}{1-\mu}$, „ $\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1-\mu}$.

„ 289 „ 13 „ „ Zusatz: Hierdurch lassen sich dann die Parallelkurven der Kardioide ableiten, wie es O. Losehand getan hat und die im allgemeinen Kurven 16. Ordnung und 12. Klasse sind.

S. 315: Zusatz: L. Braude hat noch gefunden, daß die Fußpunktkurve einer Kissoide in bezug auf einen Punkt der Achse eine Kurve 6. Ordnung ist, aber vom Punkte $(+8r, 0)$ aus eine Kardioide. Ferner: Die Fußpunktkurve der Neilschen Parabel $y^2 = x^3$ für den Anfangspunkt als Pol lautet $3^6 \cdot y^5(x^2+y^2) - 2^5x^6 = 0$, ist also eine Kurve siebenter Ordnung.

S. 333 Z. 4 v. u. lies 1889 statt 1899.

Nachweis für die Tafeln des zweiten Bandes.

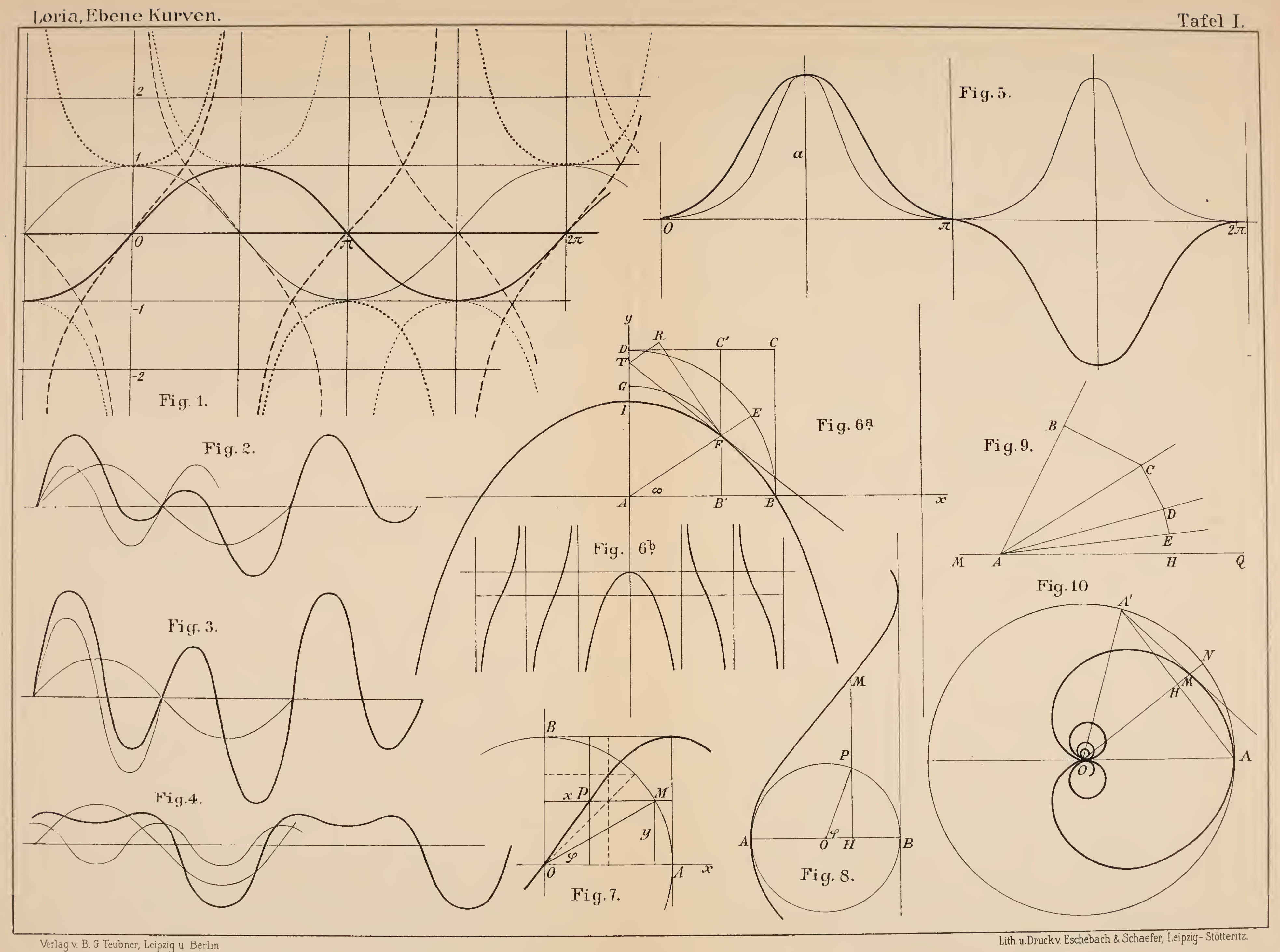
Namenregister.

(Die Nummern bedeuten die Seitenzahlen; vor die des zweiten Bandes ist eine II gesetzt.)

Sachregister.

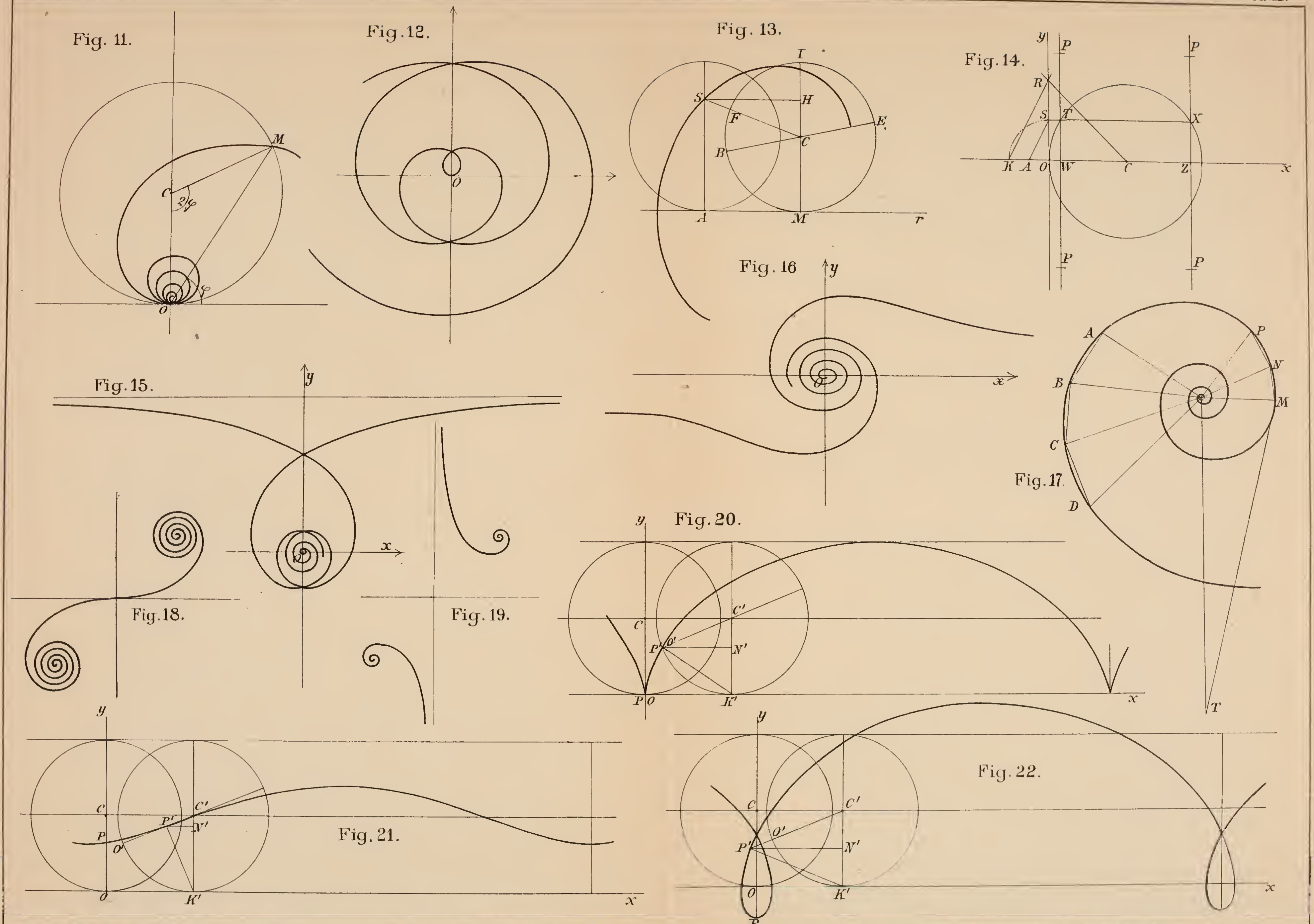
Die Nummern bedeuten die Seitenzahlen; vor die des zweiten Bandes ist eine II gesetzt. Wenn mehrere Seitenzahlen angegeben sind, ist die Stelle, wo der Gegenstand hauptsächlich behandelt wird, fett gedruckt. Mit Ausnahme von Kurve, welches überall durch K. abgekürzt ist, suche man den Artikel unter dem Hauptworte, z B. Archimedische Spirale unter Sp., aber Eulersche Kurve unter E. Nach Eigennamen benannte Formeln und Sätze suche man vermittels des Namenregisters.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



Verlag v. B. G Teubner, Leipzig u Berlin
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.

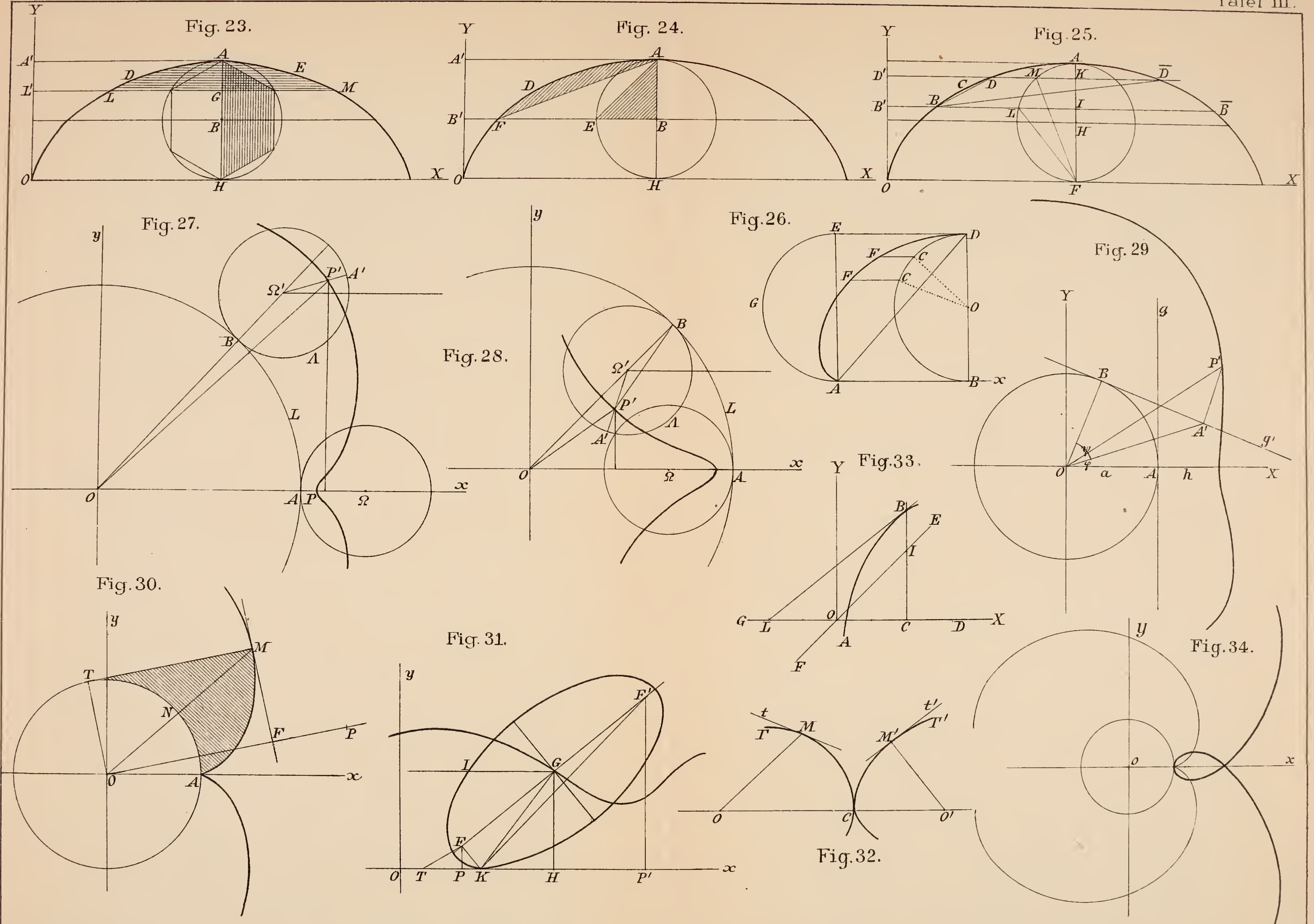




Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith u Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig - Stötteritz.





Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.



Fig. 35.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 39.

Fig. 40.

Fig. 41.

Fig. 42.

Fig. 43.

Fig. 44.

Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig Stötteritz



Fig. 45

Fig. 46.

Fig. 47.

Fig. 48.

Fig. 49.

Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 52.

Fig. 53.

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 56.

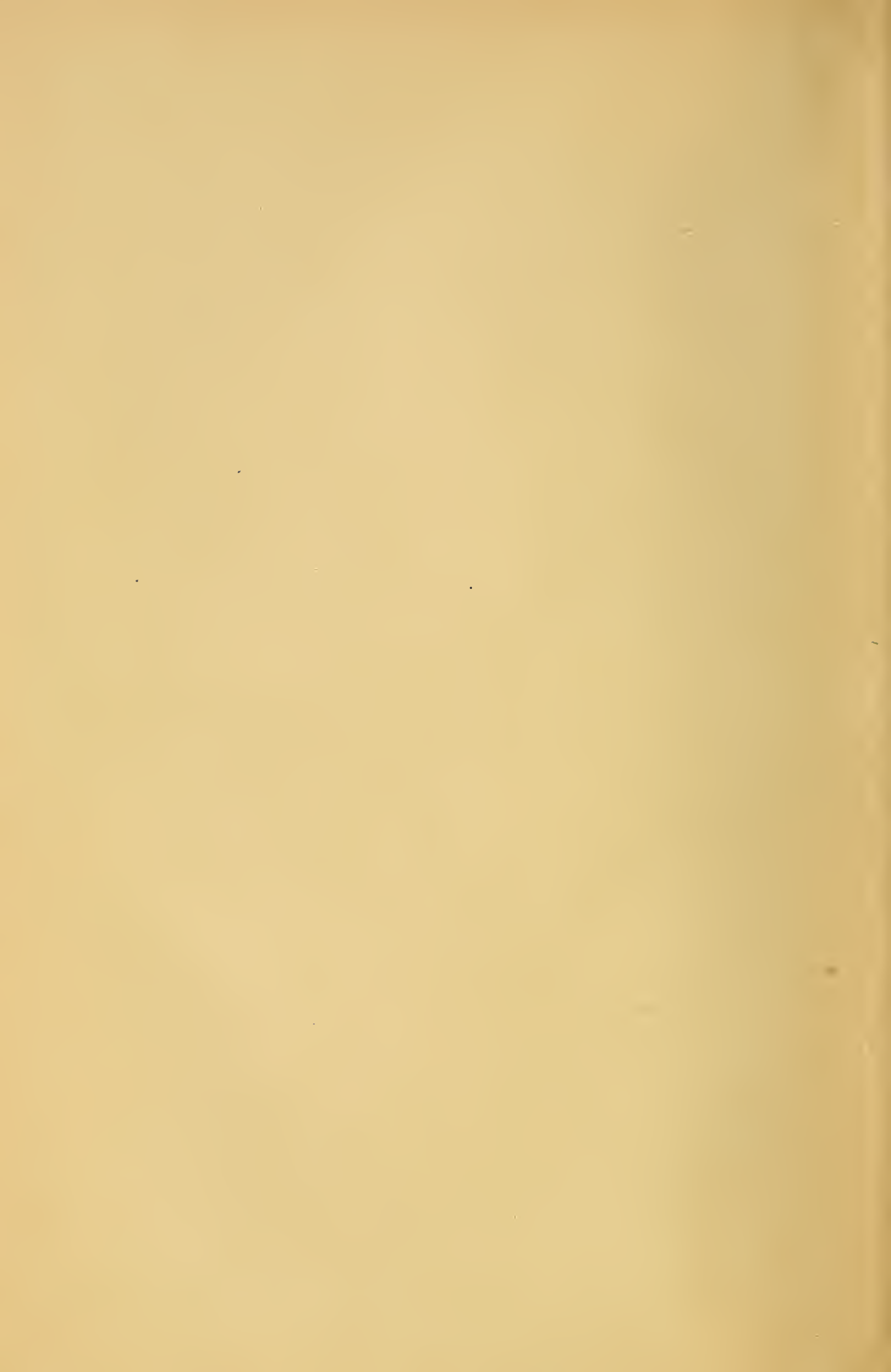
Fig. 57.

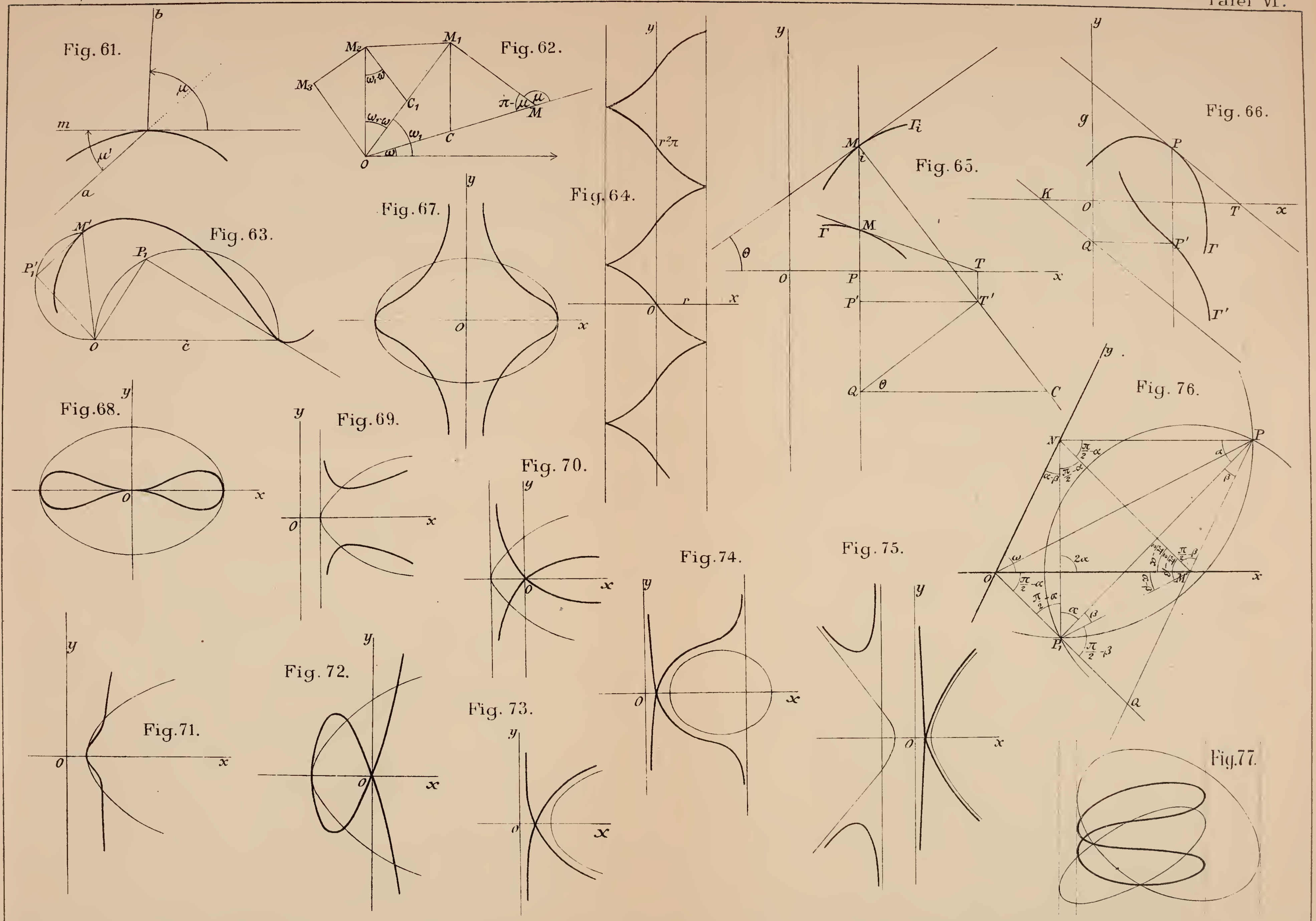
Fig. 58.

Fig. 59.

Fig. 60.

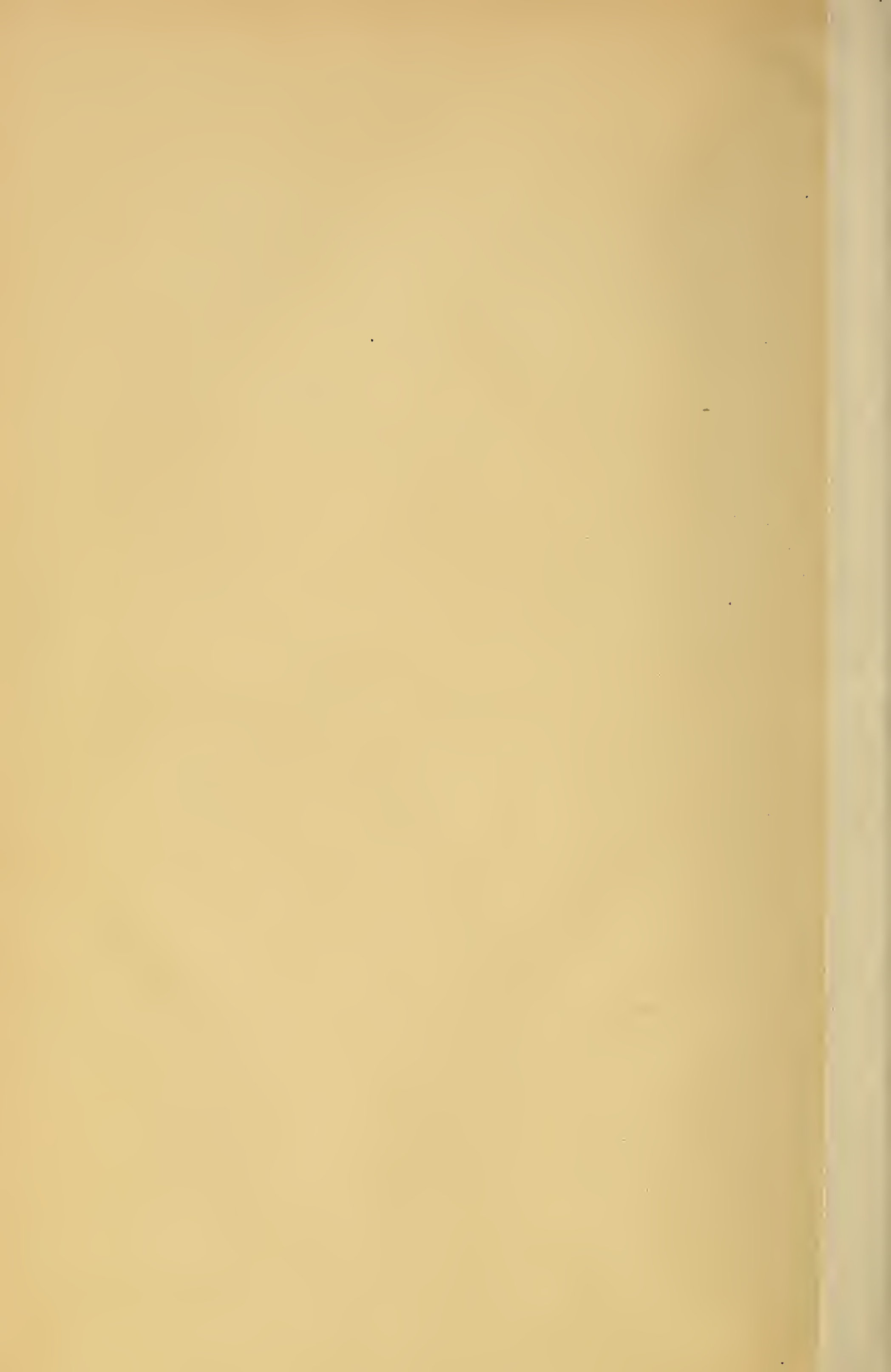
Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin. Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.





Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz



Borel, Dr. **E.**, Professor an der Sorbonne zu Paris, die Elemente der Mathematik. In 2 Bänden. Deutsche Ausgabe besorgt von P. Stäckel, Professor in Karlsruhe i. B.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. *M.* 8.60.

II. — Geometrie. Mit 403 Figuren. [XII u. 324 S.] gr. 8. 1909. In Leinw. geb. *M.* 6.40.

Castelnuovo, G., Professor an der Universität Rom, und **F. Enriques**, Professor an der Universität Bologna, Theorie der algebraischen Flächen. gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

Cesàro, Dr. **Ernesto**, weil. Professor an der Königl. Universität Neapel, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. Gerhard Kowalewski, Professor an der Universität Bonn. Mit 48 Figuren. [VIII u. 341 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. *M* 12.—

Czuber, Hofrat Dr. **E.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. [X u 382 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. *M.* 12.—

Dingeldey, Geh. Hofrat Dr. **Fr.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Teil: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. Mit 99 Figuren. [V u. 202 S.] 1910. *M.* 6.—

Durège, Dr. **H.**, weil. Professor an der Universität Prag, die ebenen Kurven dritter Ordnung. Eine Zusammenstellung ihrer bekannteren Eigenschaften. Mit 44 Figuren. [XII u. 343 S.] gr. 8. 1871. Geh. *M.* 7.20

Ebner, Dr. **F.**, Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Einbeck, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren. [VIII u. 197 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand *M.* 4.—

Enriques, Dr. **F.**, Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. Hermann Fleischer in Königsberg i. Pr. Mit einem Einführungswort von F. Klein und 187 Figuren. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 8.—, in Leinw. geb. *M.* 9.—

Fort, O., und **O. Schlömilch**, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Teile.

I. Teil: Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. 7. Auflage von Dr. R. Heger, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden. Mit Holzschnitten. [XVII u. 268 S.] gr. 8. 1904. Geh. *M* 4.—, in Leinwand geb. *M* 4.80.

II. — Analytische Geometrie des Raumes von Dr. O. Schlömilch, weil. Kgl. S. Geh. Rat a. D. 6. Auflage, von Dr. R. Heger in Dresden. Mit Holzschnitten. [VIII u. 338 S.] gr. 8. 1898. Geh. *M* 5.—, in Leinwand geb. *M* 5.80.

Ganter, Dr. **H.**, Professor an der Kantonschule zu Aarau, und Dr. **F. Rudio**, Professor am Polytechnikum zu Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit vielen Figuren und zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb. jeder Teil *M.* 3.—

I. Teil. Die analytische Geometrie der Ebene. 7. verbesserte Auflage. Mit 53 Figuren. [VIII u. 190 S.] 1910.

II. — Die analytische Geometrie des Raumes. 4. verbesserte Auflage. Mit 20 Figuren. [X u. 194 S.] 1908.

Graßmann, Dr. **H.**, Professor an der Universität Gießen, projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. In 2 Bänden.

I. Band: Binäres. Mit 126 Figuren. [XII u. 360 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M.* 12.—, geb. *M.* 13.—

II. — [Unter der Presse.]

[Gregorius a. St. Vincentio.] Die Kegelschnitte des Gregorius a. St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. Von Dr. K. Bopp, Privatdozent an der Universität Heidelberg. Mit 329 Figuren. [III u. 228 S.] gr. 8. 1907. Geh. *M.* 10.—

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Figuren. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Teil. Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände.

I. Band. Arithmetik. Bearbeitet von Dr. Carl Färber, Professor an der Luisenstädtischen Oberrealschule in Berlin. Mit 9 Figuren. [XV u. 410 S.] gr. 8. 1911. Geb. M. 9.—

II. — Von E. Netto in Gießen. [In Vorbereitung.]

II. Teil. Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Frz. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.

I. Band. Die Elemente der Geometrie. Von Professor Dr. Hermann Thieme, Direktor des Realgymnasiums zu Bromberg. Mit 323 Figuren. [XII u. 394 S.] 1909. M 9.—

II. — Von Frz. Meyer in Königsberg. [In Vorbereitung.]

Gundelfinger, Geh. Hofrat Dr. **Siegmund,** vorm. Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Geh. Hofrat Dr. Friedr. Dingeldey, Professor ebendaselbst. Mit Figuren und einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1895. Geh. M. 12.—

Heffter, Dr. **L.,** Professor an der Universität Kiel, und Dr **C. Koehler,** Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. In 2 Bänden.

I. Band. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. M. 14.—

II. — Geometrie im Bündel und im Raume. [In Vorbereitung.]

Hesse, Dr. **O.,** weil. Professor am Kgl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage, revidiert und ergänzt von Dr. S. Gundelfinger, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. [VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. M. 6.—

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.,** Professor an der Universität Göttingen, autographierte Vorlesungshefte. 4. Geh.

Höhere Geometrie. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. Unveränderter Neudruck 1907.

Heft 1 [VI u. 566 S.] (W.-S. 1892/93) }
Heft 2 [IV u. 388 S.] (S.-S. 1893) } zusammen M. 15.—

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Ausgearbeitet von Conrad Müller. (S.-S. 1901.) Neuer Abdruck 1907. [VIII u. 484 S.] M. 10.—

Kötter, Dr. **E.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Aachen, die Entwicklung der synthetischen Geometrie. In 2 Teilen. Teil I: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. V, 2. [XXVIII u. 486 S.] gr. 8. 1901. Geh. M. 18.80. Erschien auch in 2 Lieferungen: 1. Lieferung: (128 S.) 1898. M 4.40. 2. Lieferung: (XXVIII u. S. 129—414.) 1901. M. 14.40.

v. Lilienthal, R., Professor an der Universität Münster i. W., Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Kurventheorie. Mit 26 Figuren. [VI u. 368 S.] 1908. n. M. 12.—

II. — [Erscheint im Herbst 1910.]

——— Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. Geh. n. M. 5.—

Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Von Dr. Ernst Pascal, Professor an der Universität Neapel. Deutsche Ausgabe von A. Schepp in Wiesbaden. In 2 Teilen. 2., neubearb. Aufl. gr. 8.

I. Teil: Analysis. Repertorium der höheren Analysis. Unter Mitwirkung von R. Fricke sowie E. Pascal, Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, H. E. Timerding herausgegeben von Dr. P. Epstein, Professor an der Universität Straßburg i. E. I Hälfte: Algebra, Differential- und Integralrechnung. [XV u. 527 S.] 1910. In Leinwand geb. M 10.—

II. — Geometrie. Repertorium der höheren Geometrie. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, Fr. Dingeldey, E. Enriques, G. Giraud, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler herausgegeben von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. I. Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie. Mit 54 Figuren. [XVI u. 534 S.] 1910. In Leinwand geb. M 10.—

Richter, Dr. O., Professor am König-Albert-Gymnasium zu Leipzig, Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 147 Figuren. [X u. 188 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 4.40, in Leinwand geb. ℳ 4.80.

Runge, Dr. C., Professor an der Universität Göttingen, analytische Geometrie der Ebene. Mit 75 Figuren. [IV u. 198 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. ℳ 6.—

Salmon-Fiedler, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. 4. bzw. 3., verbesserte Auflage. 2 Teile. gr. 8. Geh. n. ℳ 24.—, in Leinwand geb. ℳ 26.40. Einzeln:

I. Teil. Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 4. verbesserte Auflage. Mit Holzschnitten. [XXXIV u. 448 S.] 1898. Geh. ℳ 8.—, in Leinwand geb. ℳ 9.—

II. — Analytische Geometrie der Kurven im Raume, der Strahlensysteme und und der algebraischen Flächen. 3. Auflage. Mit Holzschnitten. [LXXII u. 686 S.] 1880. Geh. ℳ 16 —, in Leinwand geb. ℳ 17.40.

——— analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Nach George Salmon frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. 2 Teile. gr. 8. In Leinw. geb. ℳ 19.— Einzeln:

I. Teil. 7. verbesserte Auflage. [XXXIV u. 444 S.] 1907. In Leinwand geb. ℳ 10.—

II. — 6. Auflage. [XXIV u. S. 443—854.] 1903. Geh. ℳ 8.—, in Leinwand geb. ℳ 9.—

——— analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 508 S.] gr. 8. 1882. Geh. ℳ 11.20, in Leinwand geb. ℳ 12.20.

Schafheitlin, Dr. P., Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin, synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Für die Prima höherer Lehranstalten bearbeitet. Mit 62 Figuren. [VI u. 96 S.] gr. 8. 1907. Geb. ℳ 1.80.

Schell, Dr. W., weil. Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Zur Einführung in das Studium der Kurventheorie. Mit Holzschnitten. 2. erweiterte Auflage. [VIII u. 163 S.] gr. 8. 1898. Geh. ℳ 5.—

Schoenflies, Dr. A., Professor an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2 Teile. gr. 8. Geh.

I. Teil. Mit Figuren. [VI u. 251 S.] 1900. ℳ 8.—

II. — Mit 26 Figuren. [X u. 431 S.] 1908. ℳ 12.—

——— Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Mit 98 Figuren. [V u. 92 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 2.20, in Leinw. geb. ℳ 2.80.

Schur, Dr. F., Professor an der Universität Straßburg i. E., Grundlagen der Geometrie. Mit 63 Figuren. [X u. 192 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 6.—, in Leinwand geb. n. ℳ 7.—

v. Stahl, H., Professor an der Universität Tübingen, u. Dr. **V. Kommerell**, Rektor des Realprogymnasiums zu Nürnberg, die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Mit 1 lithogr. Tafel. [VI u. 114 S.] gr. 8. 1893. Geh. ℳ 4.—

Staude, Dr. Otto, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren. [VIII u 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. ℳ 14.—

Staude, O., Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Teilen. gr. 8. 1910. Geh. u. geb.

I. Band. Mit 181 Figuren. [X u. 548 S.] Geh. ℳ 20.—, geb. ℳ 22.—
II. — Mit 47 Figuren. [IV u. S. 549—1000.] Geh. ℳ 16.—, geb. ℳ 18.—

——— Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit Figuren. [VIII u. 186 S.] gr. 8. 1896. Geh. ℳ 7.—

Study, Dr. E., Professor an der Universität Bonn, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. ca. 5 Bände von je 10—12 Bogen. [Band I unter der Presse.] gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Sturm, Geh. Reg.-Rat Dr. R., Professor an der Universität Breslau, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. In 4 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. [XII u. 415 S.] 1908. ℳ 16.—
II. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. [VIII u. 346 S.] 1908. ℳ 16.—
III. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. [VIII u. 574 S.] 1909. ℳ 20.—
IV. — Die nichtlinearen und die mehrdeutigen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe. [X u. 486 S.] 1909. ℳ 20 —

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. II. Jahrgang. 1911. Unter Mitwirkung von D. Hilbert, H Greinacher, G. Hessenberg, O. Knopf, H. Liebmann, W. Lietzmann, H. Reissner, K. Simons, O. Töplitz, W. Wien und R. Ziegel herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. Mit einem Bildnis H. Minkowskis. [ca. 500 S.] 8. In Leinwand geb. ca. ℳ 6.—

Vahlen, Dr. K. Th., Professor an der Universität Greifswald, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nichteuklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. ℳ 12.—

Vogt, Dr. W., Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der linearen Linienörter des elliptischen Raumes. [VIII u. 58 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 2.40.

Volk, K. G., Professor an der Oberrealschule mit realgymnasialer Abteilung zu Freiburg i. Br., die Elemente der neueren Geometrie unter besonderer Berücksichtigung des geometrischen Bewegungsprinzips. Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten und zum Selbststudium. Mit 93 zum großen Teil zweifarbigen Figuren. [VIII u. 77 S.] gr. 8. 1907. Steif geh. ℳ 2.—, in Leinw. geb. ℳ 2.20.

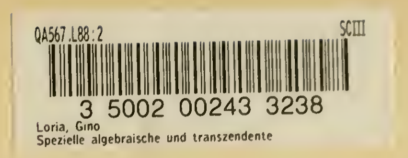
Weber, H., und J. Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. Mit zahlr. Figuren. gr. 8. Geb.

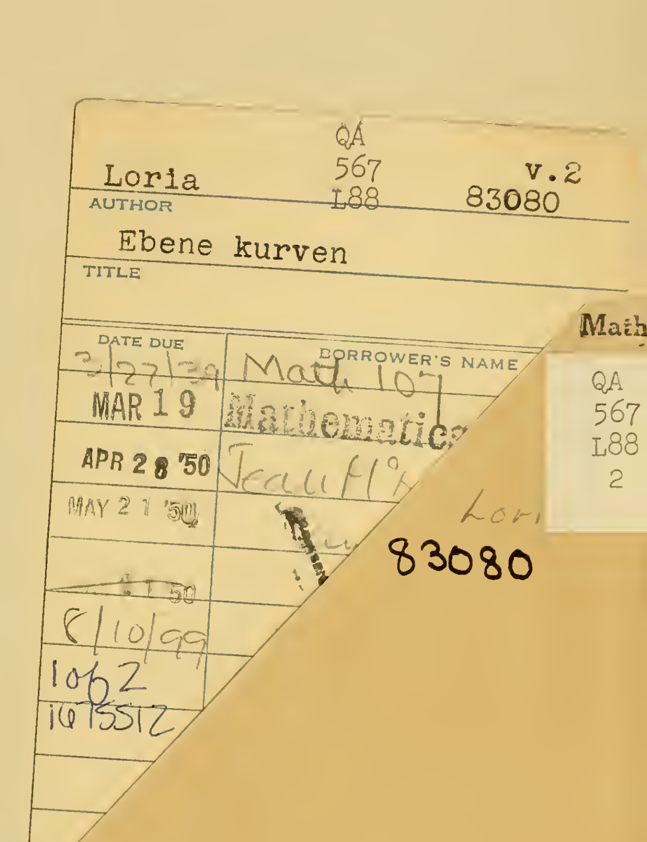
I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. ℳ 10.—
II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. ℳ 12.—
III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Figuren. [XIII u. 666 S.] 1907. ℳ 14.—

Wilczynski, E. J., A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Professor at the University of Urbana Ills., projective differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. ℳ 10.—




APR 28 '50


QA567.L88:2
SCIII
3 5002 00243 3238
Loria, Gino
Spezielle algebraische und transzendente


QA
567
L88
Loria
v.2
83080
AUTHOR
Ebene kurven
TITLE
DATE DUE
BORROWER'S NAME
MAR 19
Mathematics
APR 28 '50
MAY 21 '50
Math
QA
567
L88
2
83080

